CHAPITRE IV

MOUVEMENT DES FLUIDES

§ 259. **Équations différentielles du mouvement des fluides.** — Lorsqu'un fluide est en mouvement sous l'action de diverses forces, on peut lui étendre la notion que nous avons acquise relativement à la pression en un point quelconque d'une masse fluide en équilibre (§ 212). Cette notion repose essentiellement, il est vrai, sur l'hypothèse de la fluidité parfaite, hypothèse qui ne peut pas être admise complètement, quand il s'agit d'un fluide en mouvement ; en effet, l'expérience prouve qu'il se développe un certain frottement dans le glissement des diverses parties d'un fluide les unes sur les autres, et que ce frottement est d'autant plus grand que la vitesse de glissement est elle-même plus grande ; mais on peut regarder les choses comme se passant de la même manière que s'il s'agissait d'un fluide parfait, et que le frottement qui se développe en réalité fût une force extérieure appliquée aux diverses molécules de ce fluide parfait.

D'après cela, on voit que l'on peut distinguer, en chaque point de l'espace occupé par un fluide en mouvement, et à un instant quelconque : 1° la pression qui a lieu en ce point ; 2° la masse spécifique du fluide au même point ; 3° enfin la vitesse de la molécule qui y est située. Si l'on rapporte les positions des divers points du fluide à trois axes coordonnés rectangulaires, la connaissance complète de la vitesse dont il vient d'être question suppose celle de ses trois composantes u, u_1, u_2, parallèles aux

axes des x, y et des z ; de sorte qu'en y joignant la pression p et la masse spécifique ρ, cela fait cinq quantités dont on doit connaître les valeurs, pour que le mouvement du fluide soit connu. Ces cinq quantités, considérées pour un même point de l'espace, varient en général avec le temps t ; d'ailleurs, à un même instant, elles varient aussi quand on passe d'un point de l'espace à un autre point, c'est-à-dire quand on fait varier les coordonnées x, y, z du point auquel elles se rapportent : ce sont donc des fonctions de t, x, y, z. Nous allons établir les équations différentielles qui peuvent servir à déterminer ces cinq fonctions inconnues.

D'après le théorème de d'Alembert, pour trouver les équations du mouvement du système matériel quelconque, on peut exprimer qu'il y a équilibre entre les forces qui lui sont appliquées et les forces d'inertie de ses différents points. Nous pouvons donc ici nous appuyer sur la théorie de l'équilibre des fluides, pour établir les équations que nous cherchons. Considérons en particulier une molécule située au point dont les coordonnées sont x, y, z ; désignons par j, j_1, j_2 les projections de son accélération totale sur les trois axes, et par X, Y, Z les trois projections de l'accélération totale que lui communiquerait la résultante des forces extérieures auxquelles elle est soumise, si elle était libre. Nous devons exprimer que l'équation différentielle (b) du § 214 est satisfaite quand on y remplace X, Y, Z par $X - j$, $Y - j_1$, $Z - j_2$; ou bien, ce qui revient au même, que la fonction p satisfait aux trois équations

$$\frac{dp}{dx} = \rho(X - j), \qquad \frac{dp}{dy} = \rho(Y - j_1), \qquad \frac{dp}{dz} = \rho(Z - j_2).$$

Remarquons maintenant que, pendant le temps dt, les coordonnées x, y, z de la molécule que nous considérons s'accroissent de udt, u_1dt, u_2dt ; et par conséquent l'accroissement qu'éprouve la composante u de sa vitesse a pour valeur

$$\frac{du}{dt}dt + \frac{du}{dx}udt + \frac{du}{dy}u_1dt + \frac{du}{dz}u_2dt :$$

$$\rho + \frac{d\rho}{dt}dt + \frac{d\rho}{dx}udt + \frac{d\rho}{dy}u_1dt + \frac{d\rho}{dz}u_2dt,$$

on aura la masse du même fluide considéré à la fin du temps $t + dt$. Ces deux masses devant être égales, on en conclut facilement la relation

$$\rho\left(\frac{du}{dx} + \frac{du_1}{dy} + \frac{du_2}{dz}\right) + \frac{d\rho}{dt} + u\frac{d\rho}{dx} + u_1\frac{d\rho}{dy} + u_2\frac{d\rho}{dz} = 0,$$

que l'on peut mettre sous la forme plus simple

$$\frac{d\rho}{dt} + \frac{d.\rho u}{dx} + \frac{d.\rho u_1}{dy} + \frac{d.\rho u_2}{dt} = 0. \qquad (b)$$

Outre cette équation (b), nous pouvons en trouver une autre qui nous sera fournie par la nature du fluide. S'il s'agit d'un fluide incompressible, homogène ou hétérogène, la masse spécifique d'une portion infiniment petite quelconque du fluide restera toujours la même, de quelque manière que cette portion du fluide se place : donc, d'après ce qui précède, on aura

$$\frac{d\rho}{dt} + u\frac{d\rho}{dx} + u_1\frac{d\rho}{dy} + u_2\frac{d\rho}{dz} = 0,$$

et par suite l'équation (b) se réduira à

$$\frac{du}{dx} + \frac{du_1}{dy} + \frac{du_2}{dz} = 0.$$

S'il s'agit d'un fluide élastique, auquel la loi de Mariotte soit applicable, on aura

$$p = k\rho,$$

k étant un coefficient constant. En général, la connaissance de la nature du fluide fournira une relation entre la masse spécifique ρ et la pression p que cette masse spécifique permet au fluide de supporter ; et cette relation, dont les deux exemples que nous venons de citer ($\rho =$ constante, $p = k\rho$) ne sont que des cas particuliers, étant jointe aux équations (a), (b), complétera le système d'équations nécessaires pour déterminer les inconnues p, ρ, u, u_1, u_2, en fonction de t, x, y, z.

L'intégration de ces équations différentielles introduira des fonctions arbitraires qui devront être déterminées d'après les circonstances initiales du mouvement, et aussi d'après les conditions dans lesquelles se trouve la surface du fluide considéré, qui peut se mouvoir le long de parois fixes, ou bien éprouver sur sa surface libre des pressions constantes ou variables suivant des lois données.

Il est à peine nécessaire d'ajouter que les quatre théorèmes généraux démontrés dans le premier chapitre de ce livre sont applicables au mouvement d'une masse fluide quelconque, et que, toutes les fois que leur application pourra suffire pour arriver aux résultats que l'on cherche, on devra s'en contenter, sans recourir aux équations différentielles qui viennent d'être établies.

§ 260. **Mouvement permanent d'un fluide.** — Lorsque le mouvement d'un fluide est tel que, pour chaque point de l'espace dans lequel le fluide se meut, les cinq quantités p, ρ, u, u_1, u_2, conservent constamment les mêmes valeurs, ces quantités ne changeant que quand on passe d'un point à un autre de l'espace dont il s'agit, on dit que le mouvement du fluide est *permanent*. Pour donner un exemple de ce genre de mouvement, on peut citer le mouvement des eaux dans les fleuves et les rivières ; les circonstances qui caractérisent le mouvement permanent s'y trouvent à très peu près réalisées. Dans un pareil mouvement, chaque molécule ne conserve pas nécessairement la même vitesse; mais les diverses molécules qui viennent successivement passer par un même point de l'espace y prennent des vitesses de même grandeur et de même direction. Il est aisé de voir que toutes les molécules qui viennent ainsi passer par un même point de l'espace se suivent constamment et parcourent toutes la même trajectoire; l'ensemble de ces molécules, réparties le long de leur trajectoire commune, constitue ce qu'on nomme un *filet* du fluide en mouvement.

D'après la définition même du mouvement permanent, les dérivées partielles des quantités p, ρ, u, u_1, u_2, prises par rapport à t, sont toutes nulles. Ces cinq quantités ne sont fonctions que des trois variables indépendantes x, y, z. Il en résulte une simplification notable dans les équations qui servent à les déterminer.

§ 261. **Écoulement permanent d'un liquide pesant par un orifice.** — Supposons qu'un vase renferme un liquide pesant, et qu'un orifice de petites dimensions soit pratiqué dans la paroi du vase, de telle sorte que le liquide puisse s'écouler en le traversant. A partir de l'instant où l'écoulement commence, le liquide sort avec une vitesse qui croît assez rapidement; bientôt cette vitesse d'écoulement cesse d'augmenter, et si le niveau du liquide est entretenu constant dans le vase, par un moyen quelconque, le mouvement devient permanent. Nous allons nous proposer de déterminer la vitesse avec laquelle le liquide sort du vase, lorsque la permanence du mouvement a été ainsi établie.

Nous admettrons que l'orifice est percé dans une paroi sans épaisseur, pour ne pas avoir à tenir compte de l'influence que la surface intérieure d'un orifice pratiqué dans une paroi épaisse peut exercer sur l'écoulement du liquide; nous admettrons, en outre, que les molécules liquides traversent l'orifice avec des vitesses égales, dirigées toutes perpendiculairement au plan de l'orifice; enfin nous supposerons que la surface libre du liquide dans le vase a une étendue très grande par rapport à celle de l'orifice d'écoulement, de sorte que le mouvement descendant des molécules qui se trouvent près de cette surface libre à un instant quelconque s'effectue avec une vitesse très petite.

Appliquons le théorème des forces vives au mouvement du liquide pendant un élément de temps dt. Si nous désignons par u la vitesse avec laquelle les diverses molécules traversent l'orifice de sortie, par ω l'aire de cet orifice, et par ρ la masse spécifique du liquide, nous aurons $\omega u dt$ pour l'expression du volume de liquide sorti pendant le temps dt, et par conséquent $\rho\omega u dt$ pour l'expression de sa masse. Considérons le liquide qui était contenu dans le vase au commencement du temps dt, entre la surface libre à laquelle il se termine vers le haut et le plan

de l'orifice de sortie; et voyons ce qu'est devenu ce liquide à la fin du temps dt. Pendant le temps infiniment petit dont il s'agit, un volume $\omega u dt$ de liquide traverse l'orifice; en même temps les molécules qui étaient d'abord sur la surface libre s'abaissent de manière à parcourir dans leur ensemble un espace ayant également pour volume $\omega u dt$, puisque le volume total du liquide que nous considérons ne change pas. Si nous comparons les conditions dans lesquelles se trouve ce liquide au commencement et à la fin du temps dt, nous verrons qu'à ces deux instants il se compose d'une partie commune, comprise entre le plan de l'orifice et la surface sur laquelle sont venues se placer à la fin du temps dt les molécules qui étaient sur la surface libre au commencement de ce temps; de plus, les molécules placées de la même manière, dans cette partie commune, sont animées des mêmes vitesses dans les deux cas, puisque le mouvement est supposé permanent : donc l'accroissement de la force vive du liquide tout entier, pendant le temps dt, se réduit à la différence qui existe entre la force vive du liquide de volume $\omega u dt$ qui traverse l'orifice pendant ce temps, et la force vive d'une quantité de liquide de même volume prise immédiatement au-dessous de la surface libre. Mais cette dernière force vive peut être négligée, puisque nous admettons que, près de la surface libre, le liquide descend très lentement : on aura donc simplement

$$\rho\omega u dt \times u^2$$

pour l'accroissement de la force vive dont il s'agit.

Le travail de la pesanteur, dans le mouvement que nous étudions, peut s'obtenir facilement de la manière suivante. Observons que le centre de gravité du liquide tout entier que nous considérons éprouverait le même déplacement pendant le temps dt, si, au lieu que toutes les molécules de ce liquide se mettent en mouvement pour se rapprocher de l'orifice de sortie, il n'y avait qu'une tranche infiniment mince de volume $\omega u dt$ qui passât de la surface libre à l'orifice, le reste du liquide ne changeant nullement de position : le travail de la pesanteur sur le liquide tout entier, pendant le temps dt, peut donc s'obtenir en multipliant le poids $\rho g\omega u dt$ de cette tranche par la distance h du centre de gravité de l'orifice de sortie au plan horizontal qui forme la surface libre du liquide dans le vase (§ 173).

Le liquide n'étant soumis qu'à l'action de la pesanteur, et le frottement que ces molécules éprouvent dans leur glissement les unes sur les autres et sur les parois du vase étant négligé, on aura, d'après le théorème des forces vives,

$$\rho\omega u dt \times u^2 = 2.\rho g\omega u dt \times h;$$

d'où l'on tire

$$u = \sqrt{2gh}.$$

Telle est la vitesse avec laquelle s'effectue l'écoulement permanent du liquide à travers l'orifice, dans les circonstances où nous nous sommes placés. On voit que cette vitesse est précisément celle qu'acquerrait un corps pesant en tombant, sans vitesse initiale, d'une hauteur égale à h.

Si l'on supposait que le liquide fût soumis à une même pression extérieure sur la surface libre et à l'orifice d'écoulement, comme cela a lieu à très peu près lorsque l'écoulement se produit au milieu de notre atmosphère, on arriverait encore au même résultat; cette pression qui s'exerce de part et d'autre, et qui s'équilibrerait d'elle-même sur le liquide supposé immobile, ne donne lieu qu'à un travail nul dans le mouvement dont ce liquide est animé, de sorte que la vitesse d'écoulement n'en dépend en aucune manière.

Le volume du liquide qui sort du vase pendant le temps dt étant égal à $\omega u dt$, le volume du liquide qui s'écoule pendant l'unité de temps a pour valeur ωu ou $\omega\sqrt{2gh}$: c'est ce qu'on nomme la *dépense*. L'expérience montre qu'il ne s'écoule pas réellement une quantité de liquide aussi grande que celle qu'indique cette formule; la *dépense effective* n'est guère que les 0,62 de la *dépense théorique* dont nous venons de trouver l'expression. Cela tient à ce que les molécules liquides qui traversent l'orifice de sortie ne se meuvent pas suivant des directions parallèles; les filets liquides, à l'intérieur du vase, convergent de tous côtés vers l'orifice, et cette convergence ne disparaît

complètement que lorsque les molécules ont déjà parcouru une certaine distance en dehors du vase : la veine liquide, en un mot, se contracte à partir de l'orifice, au lieu d'être cylindrique comme nous l'avions supposé. Mais, s'il est inexact de raisonner comme nous l'avons fait, toute inexactitude disparaît en remplaçant l'orifice de sortie par la section contractée de la veine, c'est-à-dire par la section faite dans cette veine au point où les filets liquides sont devenus sensiblement parallèles entre eux. Ainsi, ce qu'il y avait de défectueux dans notre hypothèse n'influe pas sur la vitesse d'écoulement, qui a bien réellement pour valeur $\sqrt{2hg}$; cela n'a d'influence que sur la valeur de la dépense, qui doit être regardée comme égale à $\omega'\sqrt{2gh}$, ω' étant l'aire de la section contractée de la veine, et non pas l'aire de l'orifice, comme nous l'avions trouvé d'abord.

Si l'orifice est muni d'un ajutage cylindrique, et si le liquide traverse cet ajutage en coulant le long de ses parois, les circonstances de l'écoulement ne sont plus les mêmes que précédemment. La veine liquide présente, immédiatement après sa sortie de l'orifice, la forme cylindrique que nous lui avions attribuée tout d'abord : l'action de l'ajutage fait complètement disparaître la convergence des filets liquides aussitôt qu'ils pénètrent à son intérieur. Dans ce cas, la dépense doit nécessairement être exprimée par ωu, ω étant l'aire de l'orifice; ou bien par $\omega\sqrt{2gh}$, si la vitesse u a pour valeur $\sqrt{2gh}$. L'expérience indique encore que la dépense effective est plus petite que la dépense théorique $\omega\sqrt{2gh}$, et qu'elle n'en est que les 0,82. Cela tient à ce que la vitesse d'écoulement du liquide est inférieure à $\sqrt{2gh}$; la présence de l'ajutage, en obligeant les filets liquides qui étaient convergents dans le vase à devenir brusquement parallèles dès qu'ils traversent l'orifice, occasionne une perte de force vive qui se manifeste par une diminution dans la vitesse d'écoulement du liquide. Si nous désignons par μ le rapport de la dépense effective à la dépense théorique, rapport que l'on désigne souvent sous le nom de *coefficient de dépense*, la dépense effective aura pour expression

$$\mu\omega\sqrt{2gh},$$

et la vitesse u avec laquelle le liquide s'écoule sera égale à

$$\mu\sqrt{2gb} = \sqrt{2g.\mu^2 h}.$$

Ainsi la vitesse d'écoulement u est celle avec laquelle le liquide coulerait à travers un orifice percé en mince paroi, si la hauteur de la surface libre du liquide dans le vase au-dessus du centre de gravité de l'orifice était $\mu^2 h$. La hauteur dont il s'agit étant en réalité h, on voit que l'ajutage cylindrique a pour effet de rendre complètement inutile la portion $h - \mu^2 h$ de cette hauteur; $h - \mu^2 h$, ou ce qui revient au même $\frac{u^2}{2g}\left(\frac{1}{\mu^2} - 1\right)$, est ce qu'on nomme la *perte de charge* due à l'ajutage cylindrique.

§ 262. **Écoulement permanent d'un gaz par un orifice.** — Supposons qu'un gaz, contenu dans un réservoir, s'écoule en dehors uniquement en vertu de sa force expansive, par un orifice de petites dimensions, pratiqué dans une paroi mince de ce réservoir; et que, la pression intérieure et la pression extérieure étant entretenues constantes, l'écoulement soit devenu permanent. Nous allons chercher à déterminer la vitesse avec laquelle le gaz traverse l'orifice.

Soient ω l'aire de l'orifice, et u la vitesse que possède une molécule de gaz lorsqu'elle le traverse, vitesse que nous supposerons être la même pour toutes les molécules, et dont nous regarderons la direction comme étant perpendiculaire au plan de l'orifice. Pendant le temps dt, il sortira du réservoir un volume de gaz égal à $\omega u dt$, et la masse de ce gaz aura pour valeur $\rho\omega u d$, ρ étant la masse spécifique du gaz dont il s'agit, dans les circonstances où il se trouve à sa sortie du réservoir. Désignons par P la pression qui est entretenue constante dans le réservoir, ou au moins dans toutes les parties qui ne sont pas très rapprochées de l'orifice; et par P′ la pression constante, dans l'espace où se rend le gaz à sa sortie du réservoir : P′ est nécessairement plus petit que P. Si nous prenons le gaz qui traverse l'orifice pendant le temps dt, et dont le volume est alors $\omega u dt$,

et que nous remontions, par la pensée, à toutes les positions que ce gaz a occupées antérieurement, à divers instants éloignés les uns des autres du même intervalle de temps dt, nous verrons sans peine que ces positions ne se pénètrent pas, mais qu'elles sont contiguës les unes aux autres; nous verrons, de plus, que l'ensemble de ces positions successives de la quantité infiniment petite de gaz que nous considérons, forme une masse gazeuse totale complètement identique avec le gaz qui existe à un instant donné dans la portion du réservoir à laquelle correspondent ces diverses positions successives. Le gaz renfermé dans le réservoir se trouve, par là, divisé en une infinité de parties infiniment petites, de même masse, dont chacune vient prendre la place de celle qui est immédiatement à côté d'elle, pendant le temps dt.

Si nous considérons une de ces portions infiniment petites du gaz, situées assez loin de l'orifice pour que, dans tous ses points, elle soit soumise à la pression P, nous voyons que cette portion de gaz vient successivement prendre la place de toutes les autres portions de même masse qui se trouvent entre elle et l'orifice; que son volume s'accroît peu à peu, à mesure qu'elle a à supporter une pression plus faible, jusqu'à devenir égal à $\omega u dt$, à l'instant où elle traverse l'orifice, et où elle n'est plus soumise qu'à la pression P′; et qu'en même temps les vitesses de ses diverses molécules, très petites d'abord, vont en augmentant jusqu'à devenir égales à u. Prenons, à un instant quelconque, la totalité du gaz contenu dans l'espace $abcmn$ (*fig.* 119), que cette portion infiniment petite parcourt, depuis la position $abca'b'c'$, où elle supporte la pression P, jusqu'à l'orifice de sortie mn; et appliquons-lui le théorème des forces vives, pendant le temps infiniment petit dt. Ce gaz total, étant considéré dans les deux positions

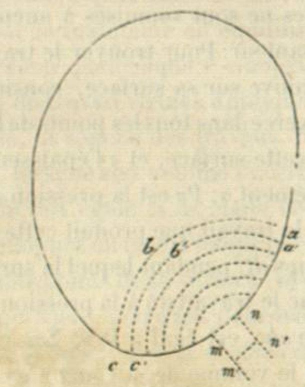

Fig. 119.

on aura donc pour la composante j de l'accélération totale de cette molécule

$$j = \frac{du}{dt} + u\frac{du}{dx} + u_1\frac{du}{d} + u_2\frac{du}{dz}.$$

Si l'on détermine de même les valeurs de j_1 et j_2, et que l'on substitue les résultats ainsi obtenus dans les équations différentielles précédentes, on trouvera

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} &= X - \frac{du}{dt} - u\frac{du}{dx} - u_1\frac{du}{dy} - u_2\frac{du}{dz},\\
\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dy} &= Y - \frac{du_1}{dt} - u\frac{du_1}{dx} - u_1\frac{du_1}{dy} - u_2\frac{du_1}{dz},\\
\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dz} &= Z - \frac{du_2}{dt} - u\frac{du_2}{dx} - u_1\frac{du_2}{dy} - u_2\frac{du_2}{dz}.
\end{aligned}\right\} \quad (a)$$

Nous avons donc déjà trois équations auxquelles doivent satisfaire nos cinq fonctions inconnues p, ρ, u, u_1, u_2. Voyons comment nous pourrons en trouver deux autres.

Nous observons d'abord que la masse spécifique ρ est nécessairement liée aux vitesses u, u_1, u_2, des diverses molécules, indépendamment de toute considération des forces qui leur sont appliquées. En effet, si l'on connaissait u, u_1, u_2, en fonction de x, y, z et t, le mouvement de la masse fluide serait complètement connu; on pourrait savoir où sont situées à un instant quelconque les diverses molécules qui occupaient primitivement des positions données ; on pourrait savoir en particulier quelles sont les molécules qui se trouvent à cet instant à l'intérieur d'un élément quelconque de volume, et par conséquent quelle est la masse totale du fluide contenu dans cet élément : donc on pourrait en conclure la valeur de la masse spécifique du fluide relative au point de l'espace où cet élément de volume est placé. Pour trouver la relation qui existe entre u, u_1, u_2 et ρ, considérons le fluide contenu, au bout du temps t, dans un parallélipipède rectangle dont les arêtes, parallèles aux axes coordonnés, aient pour valeurs les quantités infiniment petites ξ, η, ζ; voyons

ce qu'est devenu ce fluide à la fin du temps $t + dt$, en vertu du déplacement de ses diverses molécules, et exprimons que sa masse est la même dans les deux cas. Il est aisé de voir que le fluide dont il s'agit, affectant la forme d'un parallélipipède rectangle à la fin du temps t, pourra être regardé comme ayant encore la forme d'un parallélipipède à la fin du temps $t + dt$; que, les arêtes de ce nouveau parallélipipède faisant entre elles des angles dont chacun diffère infiniment peu d'un angle droit, son volume ne diffère du produit de ses trois arêtes que d'une quantité infiniment petite du second ordre par rapport à lui-même, en sorte qu'on peut le considérer comme étant égal à ce produit ; enfin que, par une raison semblable, chacune des arêtes du nouveau parallélipipède peut être regardée comme égale à sa projection sur l'axe coordonné avec lequel elle fait un angle infiniment petit. Désignons par x, y, z les coordonnées du sommet du parallélipipède primitif qui est le plus voisin de l'origine des coordonnées ; de sorte que les coordonnées du sommet opposé soient $x + \xi$, $y + \eta$, $z + \zeta$. Pendant le temps dt, x s'accroît de udt; $x + \xi$ s'accroît donc de $\left(u + \xi\frac{du}{dx}\right)dt$, et par suite l'arête du parallélipipède qui était parallèle à l'axe des x à la fin du temps t, et qui avait pour valeur ξ, s'accroît de $\xi\frac{du}{dx}dt$. Le volume du parallélipipède dont il s'agit devient donc égal à

$$\xi\left(1 + \frac{du}{dx}dt\right) \cdot \eta\left(1 + \frac{du_1}{dy}dt\right) \cdot \zeta\left(1 + \frac{du_2}{dz}dt\right),$$

à la fin du temps $t + dt$. Si nous multiplions le volume primitif $\xi\eta\zeta$ de ce parallélipipède par la masse spécifique ρ qui correspond au temps t et au point dont les coordonnées sont x, y, z, nous aurons la masse du fluide renfermé dans ce volume à la fin du temps t. En multipliant de même le nouveau volume dont nous venons de trouver l'expression, par ce que devient ρ lorsqu'on y fait croître t de dt, x de udt, y de u_1dt et z de u_2dt, c'est-à-dire par