abcmn, *a'b'c'm'n'*, qu'il occupe au commencement et à la fin du temps *dt*, contiendra évidemment une partie commune *a'b'c'mn*, dont les différents points auront une même vitesse dans les deux cas, en vertu de la permanence du mouvement ; l'accroissement de sa force vive pendant le temps *dt* se réduira donc à l'excès de la force vive du gaz *mnm'n'* qui a traversé l'orifice pendant ce temps, sur celle du gaz de même masse, qui occupait la position *abca'b'c'* au commencement de ce temps *dt*. Si nous négligeons cette dernière force vive de la couche gazeuse *abca'b'c'*, dont les différents points ne sont animés que d'une très petite vitesse, nous aurons simplement la force vive du gaz *mnm'n'*, c'est-à-dire

$$\rho\omega u dt \times u^2,$$

pour l'accroissement de force vive du gaz total *abcmn* pendant le temps *dt*.

Évaluons maintenant la somme des travaux développés pendant le temps *dt* par les forces qui agissent sur les diverses parties du gaz total *abcmn*. Ces forces se réduisent aux actions répulsives qui s'exercent entre les diverses molécules du gaz, et aux pressions qu'il éprouve aux différents points de sa surface, puisque nous supposons que l'écoulement est uniquement dû à la force expansive de ce gaz, et, par conséquent, que ses molécules ne sont soumises à aucune force extérieure, telle que la pesanteur. Pour trouver le travail dû aux pressions que le gaz éprouve sur sa surface, considérons d'abord la pression P qui s'exerce dans tous les points de la surface *abc*. Soient σ un élément de cette surface, et ε l'épaisseur de la couche *abca'b'c'* près de l'élément σ; $P\sigma$ est la pression supportée par cet élément, et $P\sigma\varepsilon$ est le travail que produit cette pression élémentaire pendant le temps *dt*, pendant lequel la surface *abc* vient se placer en *a'b'c'*; donc le travail dû à la pression P, qui s'exerce sur toute la surface *abc*, est égal à $P \times \Sigma\sigma\varepsilon$, c'est-à-dire égal au produit de P par le volume de la couche gazeuse *abca'b'c'*. On trouverait, de même, que le travail dû à la pression P' s'exerçant sur la surface *mn*, pendant que cette surface passe de *mn* en *m'n'*, est égal au

produit de P' par le volume *mnm'n'*. Mais, de ces deux travaux, le premier est positif et le second est négatif; d'ailleurs, leurs valeurs absolues sont égales, puisque *abca'b'c'* et *mnm'n'* sont les deux volumes que prend une même masse de gaz sous les pressions P et P', et que ces volumes sont en raison inverse des pressions P et P', d'après la loi de Mariotte : donc, la somme des travaux développés par les pressions que le gaz *abcmn* supporte sur toute sa surface, pendant le temps *dt*, est égale à zéro.

Il ne nous reste plus qu'à déterminer le travail développé par les actions moléculaires, dans le gaz dont il s'agit, pendant qu'il passe de la position *abcmn* à la position *a'b'c'm'n'*. Nous observerons, pour cela, que ce travail total est égal à la somme des travaux dus aux forces moléculaires dans les diverses couches dont nous regardons le gaz total comme composé, couches dont chacune vient prendre la place de la couche voisine, pendant le temps infiniment petit *dt* ; et, par conséquent, il est le même que la somme des travaux développés par les forces moléculaires dans une seule de ces couches, pendant qu'elle passe de la position *abca'b'c'* à la position *mnm'n'*. Cherchons donc à déterminer l'expression de cette dernière somme de travaux, et pour cela considérons d'une manière générale le travail dû aux forces moléculaires d'un gaz qui se dilate, en passant du volume V à un volume plus grand V'. Soit *p* la pression qu'il faudrait exercer sur toute la surface de ce gaz pour le maintenir en équilibre, lorsque son volume a pris une valeur quelconque *v* comprise entre V et V'. D'après le théorème du travail virtuel, appliqué à l'équilibre qui vient d'être indiqué, la somme des travaux dus aux forces moléculaires de ce gaz, lorsque son volume s'accroît d'une quantité infiniment petite *dv*, est égale et de signe contraire à la somme des travaux développés en même temps par la pression *p* qui s'exerce aux différents points de sa surface ; mais si l'on répète ici le raisonnement qui vient d'être fait pour trouver le travail dû à la pression P s'exerçant sur la surface *abc* (*fig.* 119), on reconnaît que, dans le cas dont nous nous occupons maintenant, la somme des travaux dus à la pression *p* appliquée à toutes les parties de la surface du gaz, est égale à $-pdv$: donc, pendant que le gaz se dilate, de manière que son volume passe de la valeur v à la valeur $v - dv$, les forces moléculaires qui agissent entre ses diverses parties développent des travaux dont la somme est égale à pdv. Or, d'après la loi de Mariotte, on a

$$p = \frac{P'V'}{v},$$

P′ étant la valeur que prend la pression p, lorsque v devient égale à V′ ; il s'ensuit que la somme de travaux que nous venons de déterminer peut s'écrire sous la forme

$$P'V'\frac{dv}{v},$$

et que, par conséquent, le travail total dû aux forces moléculaires, pendant que le gaz passe du volume V au volume V′, a pour valeur

$$P'V'\int_V^{V'}\frac{dv}{v} = P'V'l.\frac{V'}{V}.$$

Appliquons cette formule au cas que nous avons spécialement en vue, c'est-à-dire au cas d'une couche gazeuse qui passe de la position $abca'b'c'$ (*fig.* 119), où elle supporte la pression P, à la position $mnm'n'$, où elle supporte la pression P′ ; et observons que le rapport des deux volumes qu'elle a dans ces deux positions est égal au rapport inverse des pressions P et P′, et que d'ailleurs le volume V′ est égal à ωudt : nous trouverons ainsi

$$P'\omega udt.l.\frac{P}{P'}$$

pour l'expression de la somme des travaux dus aux forces moléculaires de cette couche, et par conséquent aussi de la somme des travaux développés par les forces moléculaires du gaz $abcmn$, pendant que ce gaz passe à la position $a'b'c'm'n'$.

Nous avons donc, en appliquant le théorème des forces vives

$$\rho\omega udt.u^2 = 2P'\omega udt.l.\frac{P}{P'};$$

d'où, en observant que ρ est la masse spécifique du gaz sous la pression P′, et posant en conséquence

$$P' = k\rho,$$

nous tirons

$$u = \sqrt{2k.l.\frac{P}{P'}}.$$

Telle est la vitesse avec laquelle le gaz s'écoule à travers l'orifice ω.

D'après ce qui précède, le volume du gaz qui traverse l'orifice pendant l'unité de temps doit être ωu, en supposant toutefois que ce volume soit mesuré sous la pression P′. L'expérience montre que cette valeur de la *dépense* est trop grande, ce qui tient à ce que la veine gazeuse se contracte à la sortie de l'orifice, au lieu d'être cylindrique comme nous l'avons supposé. Les choses se passent de la même manière que dans l'écoulement d'un liquide par un orifice, et tout ce que nous avons dit à l'occasion de ce dernier écoulement (§ 261), pour expliquer la différence entre les résultats de la théorie et ceux de l'observation, pourrait être répété ici. Nous devons dire cependant que, dans le cas d'un gaz, les considérations théoriques que nous avons développées ne sont complètement conformes à la réalité, quand on substitue la section contractée de la veine à l'orifice de sortie, qu'autant que le rapport des pressions P et P′ est peu différent de l'unité : s'il en était autrement, on ne serait pas dans le vrai en regardant la pression comme étant égale à P′ dans toute l'étendue de la section contractée de la veine gazeuse, parce que cette veine se dilaterait au delà de sa section contractée, ce qui indiquerait un excès de la pression qui s'exerce à son intérieur sur la pression environnante,

L'action de la pesanteur sur un gaz qui s'écoule dans les conditions que nous venons d'étudier n'a évidemment qu'une influence insignifiante sur les résultats, et on peut en conséquence ne pas en tenir compte.

§ 263. **Mouvement permanent d'un liquide pesant dans un tuyau.** — Dans les deux questions que nous venons de traiter (§§ 261 et 262), nous avons regardé le liquide ou le gaz dont il s'agissait comme jouissant de la fluidité parfaite ; nous n'avons tenu compte en aucune manière des frottements que les molécules fluides exercent les unes sur les autres. Les résultats auxquels nous sommes parvenus sont cependant d'accord avec ceux que fournit l'expérience, pourvu, bien entendu, que l'on fasse attention à la contraction de la veine fluide, ainsi que nous l'avons dit. Cela provient de ce que, dans l'un et l'autre des deux cas que nous avons étudiés, les molécules fluides ne prennent une vitesse un peu grande que dans le voisinage de l'orifice vers lequel elles se dirigent; de sorte que le frottement qui se développe entre ces molécules, et qui croît avec leur vitesse, n'agit d'une manière un peu sensible que dans une petite portion de l'espace total que le fluide occupe, et n'a en conséquence qu'une très faible influence sur l'écoulement du fluide. Mais il n'en est plus de même lorsqu'il s'agit d'un fluide qui coule dans un tuyau d'une grande longueur; l'influence du frottement se fait alors sentir d'une manière très notable. C'est dans un pareil mouvement que le frottement des fluides a été étudié : nous allons voir quels sont les résultats auxquels on est parvenu à ce sujet.

Considérons d'abord le mouvement permanent d'un liquide pesant dans un tuyau dont la section transversale est partout la même. Il est aisé de voir que le mouvement de chaque molécule doit être uniforme dans toute la longueur du tuyau. Mais les diverses molécules ne se meuvent pas toutes avec une même vitesse; celles qui sont tout près des parois du tuyau se meuvent très lentement, et, à mesure qu'on s'éloigne de ces parois pour se rapprocher de l'axe du tuyau, on en trouve dont les vitesses sont de plus en plus grandes : le liquide tout entier peut être regardé comme formé de couches cylindriques concentriques

qui glissent les unes dans les autres, et dont les vitesses sont d'autant plus petites que leurs rayons sont plus grands.

Les diverses molécules liquides étant animées de mouvements uniformes, les forces qui agissent sur chacune d'elles doivent se faire équilibre, et par conséquent il doit en être de même de toutes les forces appliquées à la portion de liquide comprise entre deux sections transversales AB, CD, *fig.* 120; la somme des projections de ces forces sur l'axe du tuyau doit donc être nulle. Désignons par ω

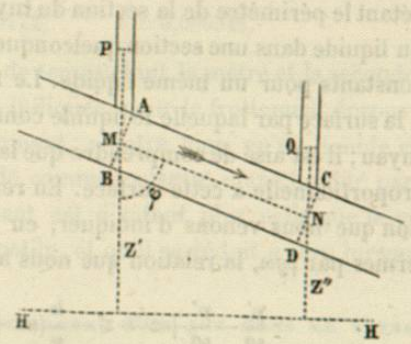

Fig. 120.

l'aire de la section du tuyau; par l la longueur de la portion du tuyau ABCD ; par φ l'angle que l'axe de ce tuyau fait avec la verticale; par z' et z'' les distances des centres M, N des deux sections AB, CD à un plan horizontal HH ; par ρ la masse spécifique du liquide; et par F une force appliquée au liquide ABCD, en sens contraire de son mouvement et capable de produire le même effet que l'ensemble des frottements que ce liquide éprouve. Soit de plus p' la pression moyenne dans la section AB, et p'' la pression analogue dans la section CD. Le liquide ABCD est soumis : 1° à la force $p'\omega$ qui agit sur la section AB, dans le sens du mouvement; 2° à la pression $p''\omega$ qui agit sur la section CD, en sens contraire de la précédente; 3° à son poids qui a pour expression $\rho g \omega l$, et dont la projection sur l'axe du tuyau a pour valeur $\rho g \omega l \cos\varphi$, ou bien $\rho g \omega (z' - z'')$; 4° à la force F qui agit en sens contraire du mouvement. Donc, d'après ce qui précède, on doit avoir

$$p'\omega - p''\omega + \rho g \omega (z' - z'') - F = 0.$$

Cette relation permet de déterminer F, lorsque l'on connaît les autres quantités qui y entrent, quantités qui peuvent être facilement déterminées. Des expériences nombreuses, discutées par Prony, lui ont fait voir que la force peut être représentée par l'expression

$$F = l\chi(\alpha u + \beta u^2),$$

χ étant le périmètre de la section du tuyau, u la vitesse moyenne du liquide dans une section quelconque, et α, β deux coefficients constants pour un même liquide. Le facteur $l\chi$ sert de mesure à la surface par laquelle le liquide considéré touche la paroi du tuyau ; il est aisé de comprendre que la force F doit en effet être proportionnelle à cette surface. En remplaçant F par l'expression que nous venons d'indiquer, en divisant ensuite tous les termes par $\rho g \omega$, la relation que nous avons trouvée devient

$$\frac{p'}{\rho g} - \frac{p''}{\rho g} + z' - z'' - \frac{l\chi}{\omega}(au + bu^2) = 0,$$

a et b étant mis au lieu de $\frac{\alpha}{\rho g}$, $\frac{\beta}{\rho g}$. Concevons que l'on implante sur le tuyau, aux points A, C, des tubes verticaux ouverts par le haut, dans lesquels une portion du liquide puisse s'élever ; et que ce liquide s'y maintienne immobile pendant que l'écoulement continue au-dessous d'eux. Les quantités $\frac{p'}{\rho g}$, $\frac{p''}{\rho g}$ sont évidemment les hauteurs MP, NQ auxquelles le liquide s'élèvera dans ces tubes au-dessus des points N, N ; et par suite

$$\frac{p'}{\rho g} - \frac{p''}{\rho g} + z' - z''$$

est la différence de niveau des points P, Q. Cette dernière quantité n'est autre chose que la charge qui tend à accélérer le mouvement du liquide ABCD, charge qui est entièrement perdue par l'effet du frottement. Ainsi,

$$\frac{l\chi}{\omega}(au + bu^2)$$

est la perte de charge due au frottement dans la longueur l du tuyau ; de sorte que la perte de charge par mètre de longueur est exprimée par

$$\frac{\chi}{\omega}(au + bu^2).$$

Prony a trouvé que, pour l'écoulement de l'eau dans un tuyau, on doit prendre

$$a = 0{,}0000173, \qquad b = 0{,}000348,$$

les unités de longueur et de temps étant le mètre et la seconde.

La loi qui vient d'être indiquée, pour le frottement éprouvé par un liquide en mouvement, montre bien qu'un liquide en équilibre peut être regardé comme jouissant d'une fluidité parfaite, puisque ce frottement est d'autant plus petit que la vitesse est elle-même plus petite, et qu'il se réduit à zéro lorsque la vitesse est nulle.

§ 264. **Mouvement permanent d'un gaz dans un tuyau.** — Lorsqu'un gaz est animé d'un mouvement permanent dans un tuyau d'une grande longueur, les choses se passent à peu près comme nous venons de le dire pour un liquide ; il y a cependant une différence qui tient à ce que le gaz se dilate à mesure qu'il est soumis à une pression plus faible. L'action de la pesanteur sur le gaz n'ayant qu'une influence insignifiante sur son mouvement, il est nécessaire que la pression soit plus grande du côté d'où vient le gaz que du côté vers lequel il marche, afin que le frottement que ce gaz éprouve dans son mouvement puisse être vaincu par l'excès de la première pression sur la seconde. Il en résulte nécessairement que la densité du gaz décroît peu à peu pendant qu'il parcourt le tuyau, et par conséquent que sa vitesse va en augmentant constamment ; car la permanence du mouvement exige que des masses égales de gaz traversent en même temps toutes les sections du tuyau, ce qui ne peut avoir lieu qu'autant que, dans ces diverses sections, la vitesse du gaz est en raison inverse de sa densité. Cependant, dans les circonstances les plus ordinaires, le rapport des pressions extrêmes est peu différent de l'unité ; la vitesse du gaz ne s'accroît pas beaucoup d'un bout à l'autre du tuyau, et on peut appliquer à son mouvement ce qui a été dit pour le mouvement permanent d'un liquide dans un tuyau, en regardant sa vitesse comme égale à la moyenne de ses vitesses extrêmes. En se fondant sur ces considérations, on a reconnu par l'expérience que la perte de charge par mètre de longueur, occasionnée par le frottement du gaz contre le tuyau dans lequel il se meut, peut être représentée par l'expression simple

$$\frac{\varepsilon}{\omega} bu^2.$$

Cette expression ne diffère de celle qui a été trouvée pour les liquides que par la suppression du terme au, suppression que l'on peut également opérer quand il s'agit d'un liquide et que la vitesse u est un peu grande. On a trouvé par l'expérience que, quel que soit le gaz, on peut prendre

$$b = 0{,}000355,$$

valeur qui diffère à peine de celle qui correspond au mouvement de l'eau.

§ 265. **Pression exercée par une veine liquide sur une surface plane.** — Pour donner une idée de la manière dont on peut trouver l'action qu'un fluide en mouvement exerce sur la surface d'un corps solide, nous considérerons le cas où une veine liquide vient rencontrer un plan fixe AB, *fig.* 121, dont la direction est perpendiculaire à l'axe de la veine. Nous supposerons que le plan est assez large pour que les filets liquides, déviés de leur route par la présence de ce plan, finissent par être tous dirigés à angle droit sur l'axe de la veine. Si le plan n'était pas maintenu dans l'immobilité, la veine le repousserait devant elle ; concevons donc qu'on lui applique une force de retenue P, dirigée suivant l'axe de la veine et en sens contraire du mouvement du liquide, et proposons-nous de déterminer la grandeur que doit avoir cette force pour que le plan ne cède pas à l'action

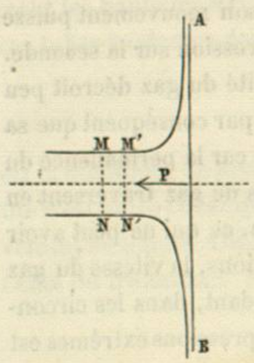

Fig. 121.

de la veine : il est clair que nous aurons par là la mesure de la pression que la veine liquide exerce sur le plan.

Considérons tout le liquide qui se trouve à un instant quelconque dans le voisinage du plan AB, depuis la section transversale MN de la veine jusqu'au contour du plan, et appliquons-lui le théorème des quantités de mouvement projetées sur un axe (§ 224), en considérant son mouvement pendant un élément de temps dt, et projetant les quantités de mouvement et les impulsions sur l'axe même de la veine. Si nous comparons le liquide dont il s'agit, dans les deux positions qu'il occupe au commencement et à la fin du temps dt, nous voyons que dans ces deux positions il renferme une partie commune ; cette partie est comprise entre la section M'N' où se trouvent, à la fin du temps dt, les molécules liquides qui étaient dans la section MN au commencement de ce temps, et la limite correspondant au contour du plan AB à laquelle se terminait le liquide considéré au commencement du temps dt. L'accroissement de la somme des quantités de mouvement projetées sur l'axe de la veine pendant le temps dt sera donc simplement la différence entre la somme des quantités de mouvement projetées correspondant au liquide qui était compris entre MN et M'N' au commencement du temps dt, et la somme des quantités de mouvement projetées correspondant à une quantité égale de liquide située vers le contour du plan AB à la fin de ce temps. Mais les vitesses de toutes les molécules de ce dernier liquide sont, par hypothèse, dirigées à angle droit sur l'axe de la veine ; donc la somme de leurs quantités de mouvement projetées sur cet axe est nulle. Ainsi l'accroissement que subit pendant le temps dt la somme des projections des quantités de mouvement du liquide tout entier sur le même axe se réduit à

$$-\rho\omega v dt . v,$$

en désignant par ρ la masse spécifique du liquide, par ω l'aire de la section transversale de la veine, et par v la vitesse des molécules liquides qui composent cette veine. D'un autre côté, les actions que le liquide éprouve de la part du plan AB sont les seules forces extérieures qui lui soient appliquées ; et la somme de leurs projections sur l'axe de la veine est évidemment égale à P ; en sorte que, si l'on observe que ces forces projetées agissent en sens contraire du mouvement du liquide, on aura

$$-\mathrm{P}dt$$

pour l'expression de la somme de leurs impulsions pendant le temp *dt*. Donc, d'après le deuxième théorème général que nous voulons appliquer ici, on a

$$-\rho\omega v dt.v = -\mathrm{P}dt,$$

d'où l'on tire

$$\mathrm{P} = \rho\omega v^2.$$

Telle est la valeur de la pression que la veine liquide exerce sur le plan AB, dans les circonstances où nous nous sommes placés.

CHAPITRE V

THÉORIE DU MOUVEMENT DES MACHINES.

§ 266. **Notions générales sur les machines.** — Si l'on passe en revue les diverses espèces de machines qui sont employées dans l'industrie, on reconnaît facilement qu'elles peuvent être groupées dans deux classes bien distinctes. Les unes servent à vaincre des résistances plus ou moins considérables; telles sont celles qui ont pour objet d'élever des fardeaux, de comprimer ou de broyer des corps, de tourner, de couper ou de percer les bois ou les métaux, etc. Les autres sont destinées à faire des ouvrages qui demandent de l'adresse plutôt que de la force ; telles sont celles qui servent à filer et à tisser les matières textiles, à broder les étoffes, à fabriquer les dentelles, etc.

En ne considérant d'abord que les machines de la première classe, nous voyons qu'elles sont employées, non seulement pour vaincre des résistances, mais encore pour faire marcher les points d'application de ces résistances. Lorsqu'une machine de cette classe est en activité, lorsqu'elle *travaille*, il y a à la fois résistance vaincue et déplacement du point d'application de la résistance en sens contraire de son action. D'ailleurs, il est aisé de voir, par divers exemples simples, que le travail effectué par la machine (en attribuant au mot *travail* son acception vulgaire) varie proportionnellement à l'intensité de la résistance vaincue, lorsque le point sur lequel cette résistance agit se déplace de la même manière; et aussi que, à égalité de résistance vaincue, le travail varie proportionnellement au