LIVRE PREMIER

STATIQUE

CHAPITRE PREMIER

CONSIDÉRATIONS. — PRINCIPES. COMPOSITION DES FORCES DE MÊME DIRECTION.

§ 1. CONSIDÉRATIONS SUR LES FORCES.

12. Forces égales. — Forces multiples. — Deux forces, quelle que soit leur nature, sont dites *égales* lorsque, étant appliquées successivement à un même point matériel et dans les mêmes circonstances, elles produisent des effets identiques, ou lorsque, étant appliquées simultanément à un même point matériel, dans la même direction, mais dans un sens opposé, elles ne produisent aucun mouvement, c'est-à-dire qu'il y ait équilibre.

Une force *double* d'une autre est une force susceptible de pouvoir se subdiviser en deux forces égales, pouvant chacune remplacer l'action de cette autre force, ou une force faisant équilibre à l'action simultanée de deux forces égales agissant dans la même direction, mais de sens opposé à la première.

En général, une force est *multiple* d'une autre si elle est susceptible de pouvoir se subdiviser en un certain nombre entier n de parties égales pouvant chacune remplacer l'action de cette autre force, ou une force faisant équilibre à l'action combinée de n forces égales agissant dans la même direction, mais de sens opposé à la première.

13. De la mesure des forces. Leur comparaison aux poids. — Les forces, malgré la diversité des effets qu'elles produisent, sont, comme toutes les grandeurs, susceptibles d'être mesurées, c'est-à-dire d'être rapportées à une même unité de force prise pour type de comparaison. Pour cela, on a été conduit à imaginer des appareils aussi simples que possible, permettant de comparer toutes les forces à l'une d'elles, au poids des corps par exemple. Ces appareils sont appelés *dynamomètres*.

14. Dynamomètres. — Les dynamomètres servent à mesurer l'intensité des forces.

Le principe sur lequel repose leur construction est celui-ci : *Lorsqu'une lame d'acier est soumise à un certain effort, cette lame fléchit, et si la limite d'élasticité n'a pas été dépassée ou, en d'autres termes, si la lame revient à sa position primitive quand la force a cessé d'agir, la flexion est proportionnelle à l'effort exercé.*

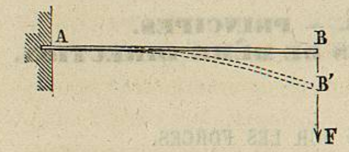

Fig. 1.

Considérons une lame d'acier AB (*fig.* 1) encastrée à l'une de ses extrémités A et soumise à un effort F appliqué à l'autre extrémité. Sous l'influence de cet effort, la lame AB fléchira et prendra une autre position AB′. Si nous substituons à la force F un poids P capable de faire occuper à la lame la même position AB′, l'effet de la force F et du poids P ayant produit une égale déformation, on convient de considérer ces deux forces comme étant égales, quoique de nature différente. De plus, si l'élasticité du ressort n'a pas été altérée, celui-ci subira la même flexion sous l'action de forces quelconques, mais égales aux précédentes.

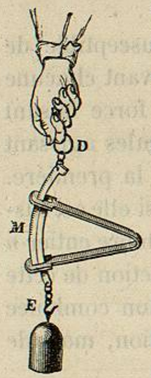

Fig. 2.

Les dynamomètres les plus employés sont les suivants :

15. Peson à ressort. — L'appareil indiqué (*fig.* 2) représente le dynamomètre le plus simple. Il se compose essentiellement d'un ressort en acier trempé recourbé en deux branches égales ; à l'extrémité de la branche inférieure est fixé un arc de cercle, ordinairement en fer, qui passe librement dans une ouverture pratiquée à la branche supérieure, et qui est terminé par un anneau D servant à maintenir l'instrument, soit à la main, soit à un point

fixe. Un autre arc concentrique au premier, lié invariablement à la branche supérieure, et passant librement dans une ouverture pratiquée dans la branche inférieure, est muni, à son extrémité, d'un crochet E auquel on applique les forces dont on veut mesurer l'intensité.

L'unité de force adoptée en France est le kilogramme, c'est-à-dire le poids d'un litre d'eau pure prise à son maximum de densité, ou à 4 degrés centigrades au-dessus de 0. Donc, une force quelconque étant donnée, on obtiendra l'intensité ou la grandeur de cette force en déterminant le nombre de kilogrammes qui, étant appliqués au même point, dans le même sens et dans la même direction, produiraient identiquement le même effet.

Cela posé, pour graduer l'appareil, on suspendra au crochet inférieur un poids de 1 kilogramme par exemple ; sous l'action de ce poids, les deux branches du dynamomètre se rapprocheront et l'on marquera la division 1, sur l'arc terminé par un anneau, au point où s'est arrêtée la branche supérieure. On ajoutera un poids de 1 kilogramme au précédent, ce qui fera un poids de 2 kilogrammes, et l'on marquera la division 2 au second point déterminé par la nouvelle position de la branche supérieure ; on opérera de même pour des poids de 3, 4, 5... kilogrammes.

Si nous appliquons au crochet de cet appareil ainsi gradué un effort quelconque, l'anneau étant maintenu soit à la main, soit à un point fixe, l'intensité de l'effort sera indiquée par la flexion du ressort ; il suffira alors de lire, sur l'arc, la division correspondante à la position de la branche supérieure.

Pour apprécier les fractions de kilogramme, on divisera les intervalles successifs 1.2, 2.3, 3.4... en un certain nombre de parties égales, suivant le degré d'approximation que l'on veut obtenir.

Afin de ne pas faire supporter au ressort des flexions trop grandes, qui auraient pour effet d'altérer sa sensibilité, car il ne reprendrait plus sa position initiale lorsqu'il serait abandonné à lui-même, on a disposé sur l'arc gradué un talon saillant qui, en venant buter contre la branche supérieure, empêche un trop grand rapprochement des deux lames.

16. — On emploie quelquefois un peson (*fig.* 3) formé d'un ressort en hélice enfermé dans une boîte cylindrique en cuivre B terminée à sa partie inférieure par un crochet E auquel on applique la force à évaluer. Le ressort est fixé d'une part au couvercle supérieur de son enveloppe, et de l'autre à un disque cylindrique P formant piston, muni d'une tige dont l'axe correspond à celui du ressort. Cette tige est terminée, en dehors de la boîte, par un anneau D servant à maintenir l'appareil.

Fig. 3.

Une force plus ou moins considérable agissant à l'extrémité du crochet inférieur, aura pour effet de comprimer le ressort, et la tige sortira de son enveloppe d'une quantité d'autant plus grande que la flexion sera plus forte.

La graduation se fera d'une manière analogue à celle indiquée précédemment, en suspendant des poids au crochet inférieur et en indiquant les divisions correspondantes aux différents points d'affleurement de la tige et du couvercle supérieur du cylindre.

Les deux dynamomètres que nous venons de décrire ne permettent d'évaluer que des efforts peu considérables ; ils sont d'un usage fréquent dans le commerce. Si les forces que l'on veut évaluer sont très grandes, on se sert du dynamomètre Régnier.

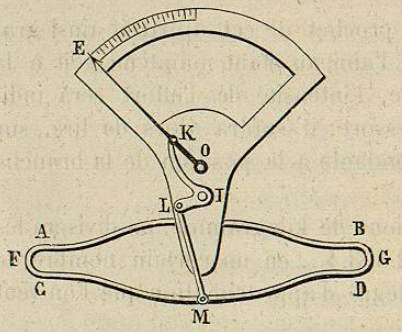

Fig. 4.

17. Dynamomètre Régnier. — Cet instrument (*fig.* 4) est formé de deux lames d'acier AB et CD, légèrement convexes, réunies à leurs extrémités par deux pièces recourbées G et F ; l'une d'elles F est maintenue à un point fixe, et l'autre G reçoit l'effort que l'on veut mesurer. Au milieu de la branche CD est articulé un levier LM se reliant avec un levier coudé KIL dont la grande branche déplace une aiguille OE mobile autour du point O. Celle-ci peut parcourir les divisions d'un limbe gradué faisant partie d'une

pièce fixée sur la branche supérieure AB du dynamomètre.

Pour se servir de l'appareil, on fixe d'abord l'extrémité F et on applique en G la force dont on veut connaître l'intensité ; sous l'influence de cette force ou de cette traction, les lames tendent à se rapprocher ; l'extrémité L du levier LM agit sur le levier KIL pour ramener la pointe E de l'aiguille vers la droite, et celle-ci parcourt un arc variant avec la grandeur de l'effort.

Le mode de graduation est identique au précédent.

La disposition du dynamomètre Régnier présente un inconvénient assez notable lorsqu'il est employé à l'évaluation des forces dont l'intensité varie à chaque instant, comme par exemple, dans le cas d'un cheval attelé à une voiture. L'action variable du cheval, jointe aux inégalités que présente le sol, font que, en aucun point du parcours, l'effort à vaincre n'est constant. Il résulte de là des oscillations permanentes de l'extrémité de l'aiguille, et par suite l'impossibilité d'apprécier exactement les indications qu'elle fournit. On remplace alors ce dynamomètre par le dynamomètre de traction à indications continues de Morin.

18. Représentation graphique des forces. — Considérons un corps M (*fig.* 5) auquel est appliquée une force F dont on connaît le point d'application, la direction, l'intensité et le sens. Pour représenter graphiquement cette force, on mène, par son point d'application B, une droite BF se confondant avec la direction de la force, et, sur cette droite, on porte, à partir du point B et dans le sens convenable indiqué par une flèche, une longueur BF proportionnelle à son intensité.

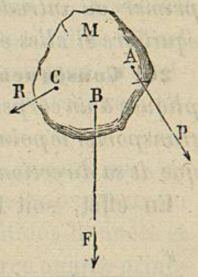

Fig. 5.

On adopte, pour représenter l'unité de force, ou 1 kilogramme, une certaine longueur, $0^{m},01$ par exemple, et l'on porte sur la direction de BF autant de centimètres que la force mesure de kilogrammes.

Cette représentation graphique des forces sera d'un emploi continuel dans la suite de ce Traité, et permettra une exposition claire et simple des principes de la statique.

§ 2. — PRINCIPES ET LEURS CONSÉQUENCES.

19. Principes généraux. — Avant de commencer les différentes théories relatives aux forces, il est indispensable de faire connaître quelques principes, nés de l'expérience et admis comme axiomes, sur lesquels on s'appuie constamment en statique.

1° *Deux forces égales et directement opposées appliquées en un même point d'un corps solide, ou agissant aux extrémités d'une même droite, se font équilibre.*

2° *Si un corps mobile autour d'un point fixe, ou d'un axe fixe, est sollicité par une seule force qui ne passe pas par ce point fixe ou qui n'est pas contenue dans un même plan avec l'axe fixe, ce corps n'est pas en équilibre.*

3° *Si un corps solide est en équilibre sous l'action de plusieurs forces, on ne détruit pas cet équilibre en fixant un ou plusieurs points du corps ou si l'on introduit entre ces points de nouvelles liaisons.*

4° *Si un corps solide est en équilibre sous l'action de plusieurs forces, on peut, sans changer l'état d'équilibre de ce corps, supprimer ou introduire des forces qui seraient elles-mêmes en équilibre si elles étaient seules appliquées au corps.*

20. Conséquences de ces principes. — *Si une force est appliquée à un corps solide, on peut, sans changer l'état de ce corps, transporter le point d'application de la force en un point quelconque de sa direction, si ce point est invariablement lié au premier.*

En effet, soit F une force appliquée en un point A d'un corps solide (*fig.* 6), et B un point quelconque lié invariablement au premier, pris sur la direction de cette force.

Fig. 6.

Appliquons au point B deux forces F′ et F″ égales entre elles, égales à la force F et agissant dans sa direction; l'état du corps ne sera pas changé. Mais les forces F et F″ étant égales, directement opposées, et agissant aux extrémités d'une même droite, se détruisent; il reste donc la force F′ appliquée au point B, qui n'est autre que la force F transportée en ce point.

Si la direction d'une force passe par un point fixe, cette force est détruite. En effet, le point d'application de la force pouvant être transporté en un point quelconque de sa direction, ou au point fixe même, la résistance de celui-ci détruit l'action de cette force.

Si la direction d'une force passe par un axe fixe, cette force est détruite. En effet, le point d'application de la force pouvant être transporté en un point quelconque de sa direction, si on transporte ce point à l'intersection de l'axe fixe et de la direction de la force, celle-ci sera détruite par la résistance de l'axe.

21. Division des forces. — Les forces se divisent en trois classes :

1° Les forces dont les directions concourent en un même point : ces forces peuvent être *dirigées suivant la même droite*, ou *angulaires*, c'est-à-dire dont les directions font entre elles un certain angle. On les désigne, dans les deux cas, sous la dénomination générale de *forces concourantes*.

2° Les forces *parallèles* dont les directions sont parallèles.

3° Les forces *quelconques* qui ne sont ni concourantes ni parallèles.

22. Composition et décomposition des forces. — Quand on a un système de forces appliquées à un corps solide, il est souvent facile de les remplacer par une force unique produisant à elle seule le même effet que toutes les autres; ce problème prend le nom de *composition des forces*.

Réciproquement, étant donnée une force agissant sur un corps solide, on peut se proposer de la remplacer par deux ou plusieurs autres forces satisfaisant à des conditions données et produisant sur le corps le même effet que la force unique primitive; on donne à cette opération le nom de *décomposition des forces*.

23. Résultante et composantes. — Comme nous venons de le dire, il arrive souvent que plusieurs forces agissant sur un corps solide peuvent être remplacées par une seule force sans que l'effet produit sur le corps soit modifié. Toutes les fois qu'une force en remplace plusieurs autres, elle prend le nom de *résultante* des forces primitives auxquelles on donne le nom de *composantes*.

24. Lorsque plusieurs forces se font équilibre sur un corps solide, l'une quelconque d'entre elles est égale et directement opposée à la résultante de toutes les autres. — Considérons un corps de forme invariable et parfaitement libre (*fig.* 7), sur lequel sont appliquées aux points D, C, B, A.... les forces en équilibre F, F′, F″... Appliquons au point D une force R égale et directement opposée à la force F; l'équilibre sera détruit et le corps se mouvra comme s'il n'était soumis qu'à l'action de cette force R dont l'effet se trouve annulé. d'un autre côté, par la force F. Les deux forces R et F se détruisant mutuellement, nous pouvons admettre que le corps n'est soumis qu'à l'action combinée des forces F′, F″... Si donc la force R produit à elle seule, sur le corps solide, le même effet que les forces F′, F″... elle peut les remplacer et la force F est bien égale et directement opposée à la résultante de toutes les autres forces du système.

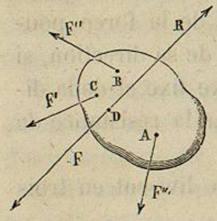

Fig. 7.

25. Lorsque plusieurs forces sont appliquées à un même point matériel, elles admettent toujours une résultante unique. — Soient F, F′, F″, F‴, des forces appliquées à un point matériel A (*fig.* 8); ce point prendra sous l'action de ces forces une direction déterminée. Soit Ax cette direction; il est évident qu'en appliquant au point A, dans la direction opposée Ay, une force d'intensité convenable, on pourra ramener ce point A au repos. Cette nouvelle force fera donc équilibre aux forces F, F′, F″, F‴ et, par suite, elle sera égale et directement opposée à leur résultante. Donc cette résultante existe.

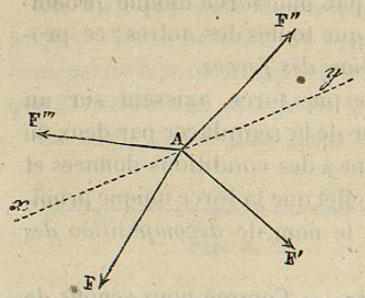

Fig. 8.

26. Quand un système de forces appliquées sur un corps solide admet une résultante, il ne peut en avoir qu'une. — En effet, supposons que le système quelconque de forces (*fig.* 9) puisse avoir deux résultantes, l'une R appliquée au point A et l'autre R′ appliquée au point B. Toutes les forces du système peuvent être remplacées par leur résultante R. Si nous appliquons au point B deux forces R′ et — R′ égales et directement opposées, nous ne changerons rien à l'état du corps; mais la force R′ étant, par hypothèse, une résultante du système, produit le même effet que l'autre résultante R. Par suite, les deux forces R et — R′ doivent se faire équilibre sur ce corps, ce qui exige que la force — R′ soit égale et directement opposée à la force R, c'est-à-dire que les résultantes R et R′ se confondent en une seule et même force. Il ne peut donc y avoir qu'une seule résultante.

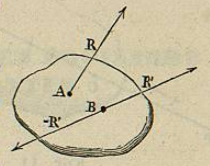

Fig. 9.

§ 3. — COMPOSITION DES FORCES DE MÊME DIRECTION.

27. Cas de deux forces de même sens. — Soient les deux forces F et F′ (*fig.* 10) appliquées au même point A, dirigées suivant la droite AX et dans le sens de A vers X. La résultante est égale à leur somme, dirigée suivant la même droite AX, et elle agit dans le même sens que les composantes. En effet, supposons que les forces F et F′ soient commensurables, et soit k leur commune mesure, de sorte que l'on ait :

Fig. 10.

$$F = ak \quad \text{et} \quad F' = bk$$

D'après la définition des forces multiples, on peut remplacer la force F par a forces égales à k, et la force F′ par b forces égales aussi à k, toutes appliquées en A et dirigées de A vers X. Le point A se trouve ainsi soumis à l'action de $a + b$ forces égales à k, ou, ce qui revient au même, à l'action d'une seule force égale à la somme $(a + b)\,k$, c'est-à-dire F + F′.

Cette proposition est également vraie lorsque les forces ne sont pas commensurables.

Si, au lieu de deux forces, il y en avait un plus grand nombre, F, F′, F″,..., le même raisonnement ferait voir que la résultante R de toutes ces forces serait :

$$R = F + F' + F'' + \ldots..$$

28. Cas de deux forces de sens contraire. — Soient les deux forces F et F′ (*fig.* 11) appliquées au point A et prenons $F > F'$. Nous pouvons supposer que la force F soit la résultante de deux forces, l'une égale à F′ et qui sera détruite par la force F′, et l'autre égale à $F - F'$ qui agira seule pour entraîner le point A. Donc, *la résultante de deux forces dirigées suivant une même droite, mais en sens contraire, est égale à leur différence, est dirigée suivant la même droite et agit dans le sens de la plus grande.*

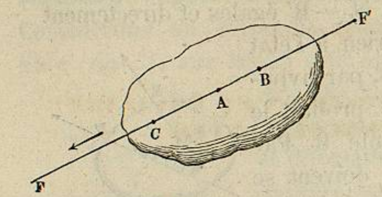

Fig. 11.

29. Cas de plusieurs forces dirigées suivant la même droite. — Soient F, F′, F″, F‴ et F^{IV}, différentes forces appliquées au point A (*fig.* 12) et dans la même direction. Considérons les forces qui agissent dans le sens de A vers x; nous pouvons les remplacer par leur résultante :

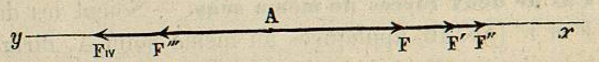

Fig. 12.

$$R_1 = F + F' + F''$$

De même, les forces agissant suivant Ay peuvent être composées en une seule :

$$R_2 = F''' + F^{IV}$$

Nous sommes ainsi ramenés au cas précédent de deux forces dirigées en sens contraire et suivant la même droite. La résultante finale R du système sera égale à la différence entre R_1 et R_2. Donc, *la résultante d'un nombre quelconque de forces appliquées à un même point et dirigées suivant la même droite est égale à l'excès de la somme des forces qui agissent dans un sens sur la somme de celles qui agissent en sens contraire, et elle est dirigée dans le sens de la plus forte somme.*

Si l'on convient d'appeler *positives* les forces agissant dans un sens, et *négatives* celles qui agissent en sens contraire, on peut dire que la résultante est égale *à la somme algébrique des composantes.*

CHAPITRE II

COMPOSITION, DÉCOMPOSITION ET ÉQUILIBRE DES FORCES CONCOURANTES

§ 1. — COMPOSITION ET ÉQUILIBRE.

30. Direction de la résultante de deux forces. — *Lorsque deux forces sont appliquées à un même point matériel, sous un angle quelconque, leur résultante est comprise à l'intérieur de l'angle formé par la direction des deux forces et elle est située dans leur plan.*

Soient les deux forces F et F′ (*fig.* 13) appliquées au point A; nous savons (**25**) que ces forces admettent une résultante; or, on voit facilement que cette résultante ne peut se trouver qu'à l'intérieur de l'angle CAB, car si la force F agissait seule, elle entraînerait le point A dans la partie f'CB du plan de la figure; mais la force F′ tend, en même temps, à l'entraîner dans la partie CBf du même plan. Le point A se trouvant simultanément sollicité vers les parties f'CB et CBf, ne pourra évidemment se diriger que dans la partie commune, c'est-à-dire à l'intérieur de l'angle CAB. En outre, la résultante se trouve forcément dans le plan des forces, puisque tout étant symétrique de part et d'autre de ce plan, il n'y a pas de raison pour qu'elle soit plutôt d'un côté que de l'autre.

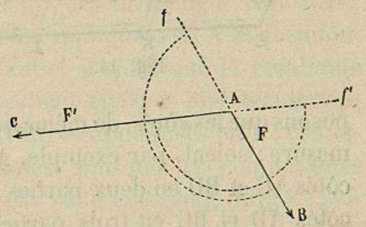

Fig. 13.

Cette même raison de symétrie fait voir que, lorsque les forces F et F′ sont égales, leur résultante est dirigée suivant la bissectrice de l'angle (F, F′) formé par les directions des composantes. Donc, nous connaissons déjà la direction de la résultante de deux forces angulaires, dans le cas particulier où les