28. Cas de deux forces de sens contraire. — Soient les deux forces F et F′ (*fig.* 11) appliquées au point A et prenons F > F′. Nous pouvons supposer que la force F soit la résultante de deux forces, l'une égale à F′ et qui sera détruite par la force F′, et l'autre égale à F — F′ qui agira seule pour entraîner le point A. Donc, *la résultante de deux forces dirigées suivant une même droite, mais en sens contraire, est égale à leur différence, est dirigée suivant la même droite et agit dans le sens de la plus grande.*

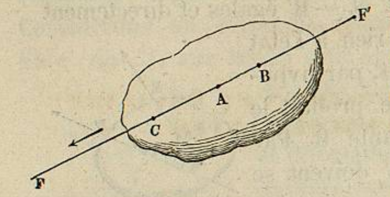

Fig. 11.

29. Cas de plusieurs forces dirigées suivant la même droite. — Soient F, F′, F″, F‴ et F^{IV}, différentes forces appliquées au point A (*fig.* 12) et dans la même direction. Considérons les forces qui agissent dans le sens de A vers x ; nous pouvons les remplacer par leur résultante :

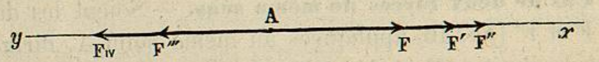

Fig. 12.

$$R_1 = F + F' + F''$$

De même, les forces agissant suivant Ay peuvent être composées en une seule :

$$R_2 = F''' + F^{IV}$$

Nous sommes ainsi ramenés au cas précédent de deux forces dirigées en sens contraire et suivant la même droite. La résultante finale R du système sera égale à la différence entre R_1 et R_2. Donc, *la résultante d'un nombre quelconque de forces appliquées à un même point et dirigées suivant la même droite est égale à l'excès de la somme des forces qui agissent dans un sens sur la somme de celles qui agissent en sens contraire, et elle est dirigée dans le sens de la plus forte somme.*

Si l'on convient d'appeler *positives* les forces agissant dans un sens, et *négatives* celles qui agissent en sens contraire, on peut dire que la résultante est égale *à la somme algébrique des composantes.*

CHAPITRE II

COMPOSITION, DÉCOMPOSITION ET ÉQUILIBRE DES FORCES CONCOURANTES

§ 1. — COMPOSITION ET ÉQUILIBRE.

30. Direction de la résultante de deux forces. — *Lorsque deux forces sont appliquées à un même point matériel, sous un angle quelconque, leur résultante est comprise à l'intérieur de l'angle formé par la direction des deux forces et elle est située dans leur plan.*

Soient les deux forces F et F′ (*fig.* 13) appliquées au point A ; nous savons (**25**) que ces forces admettent une résultante ; or, on voit facilement que cette résultante ne peut se trouver qu'à l'intérieur de l'angle CAB, car si la force F agissait seule, elle entraînerait le point A dans la partie f'CB du plan de la figure ; mais la force F′ tend, en même temps, à l'entraîner dans la partie CBf du même plan. Le point A se trouvant simultanément sollicité vers les parties f'CB et CBf, ne pourra évidemment se diriger que dans la partie commune, c'est-à-dire à l'intérieur de l'angle CAB. En outre, la résultante se trouve forcément dans le plan des forces, puisque tout étant symétrique de part et d'autre de ce plan, il n'y a pas de raison pour qu'elle soit plutôt d'un côté que de l'autre.

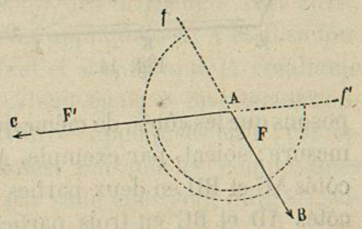

Fig. 13.

Cette même raison de symétrie fait voir que, lorsque les forces F et F′ sont égales, leur résultante est dirigée suivant la bissectrice de l'angle (F, F′) formé par les directions des composantes. Donc, nous connaissons déjà la direction de la résultante de deux forces angulaires, dans le cas particulier où les composantes sont égales. La proposition suivante nous permettra de trouver cette direction lorsque les forces seront entre elles dans un rapport quelconque.

31. Théorème fondamental. — PARALLÉLOGRAMME DES FORCES. *La résultante de deux forces angulaires est donnée en direction et en grandeur par la diagonale du parallélogramme construit sur les droites qui représentent l'intensité des forces comme côtés.*

Pour démontrer la première partie de ce théorème, c'est-à-dire que *la résultante est dirigée suivant la diagonale*, nous prouverons d'abord que, si l'on applique aux deux sommets opposés A et B (*fig.* 14) d'un parallélogramme rigide et invariable, quatre forces dirigées suivant les côtés AC et AD, BC et BD, proportionnelles à ces côtés et par suite égales deux à deux, le parallélogramme est en équilibre. Pour cela, supposons que les côtés, de même que les forces, aient une commune mesure ; soient, par exemple, $AC = 2k$ et $AD = 3k$. Divisons les côtés AC et BD en deux parties égales, aux points E et F, et les côtés AD et BC en trois parties égales aux précédentes, aux points G, H, K et L ; joignons tous ces points par des droites que nous supposerons aussi rigides et invariablement liées aux côtés ; nous aurons ainsi divisé la figure en 6 losanges égaux. Actuellement nous pouvons, sans rien changer au système, décomposer la force dirigée suivant AC en deux forces égales et appliquées l'une en A et l'autre en E ; décomposons aussi la force dirigée suivant BD et appliquons les parties, l'une en B et l'autre en F. Divisons également les forces dirigées suivant AD et BC, chacune en 3 parties égales à k, que nous appliquerons aux points A, G, H et B, L, K. Les quatre forces du système se trouvent ainsi divisées chacune en autant de parties égales qu'elles contiennent de fois la commune mesure k. Nous pouvons encore, sans rien modifier à l'état du système, appliquer, en chacun des points M et N, quatre forces égales à k,

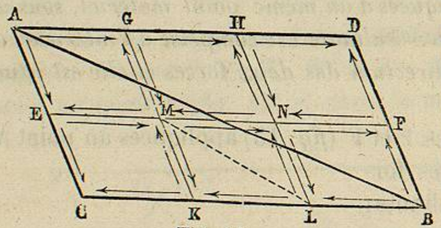

Fig. 14.

directement opposées deux à deux et dirigées, les unes suivant les droites GK, HL, et les autres suivant la droite EF. De même, le système des quatre forces primitives restera tel qu'il était si nous appliquons, aux extrémités des trois droites GK, HL et EF, dont nous venons de parler, deux forces égales à k et dirigées en sens contraire, suivant ces lignes. Or, par toutes ces divisions et ces additions successives, nous sommes arrivés à un système de 24 forces égales appliquées deux à deux aux sommets opposés des 6 losanges en lesquels se trouve décomposé le parallélogramme ABCD. Examinons en particulier l'un quelconque de ces losanges, celui MNLK, par exemple ; les deux forces égales appliquées en M ont une résultante dirigée suivant la bissectrice de l'angle KMN et dans le sens de ML ; les deux autres forces appliquées en L ont une résultante égale à la précédente et dirigée suivant LM ; ces deux résultantes égales et directement opposées se détruisent et le losange est en équilibre. Si donc chacun des losanges est séparément en équilibre, l'ensemble des 6 losanges l'est aussi, et par suite les 4 forces primitives appliquées en A et B se font équilibre ; mais pour cela, il faut et il suffit que la résultante des deux forces appliquées en A soit égale et directement opposée à la résultante des deux forces appliquées en B ; ces résultantes sont évidemment égales, puisque les composantes sont respectivement égales, et par suite elles sont dirigées suivant la diagonale AB.

Donc, *la direction de la résultante de deux forces angulaires est donnée par la diagonale du parallélogramme construit sur les droites qui représentent l'intensité des forces comme côtés.*

Cette proposition est encore vraie lorsque les forces sont incommensurables ; pour le démontrer, on peut se servir de la théorie des limites ou de la réduction à l'absurde.

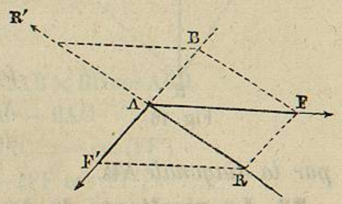

Fig. 15.

32. — Soient maintenant les deux forces F et F′ (*fig.* 15) appliquées au point A ; nous savons déjà que leur résultante est dirigée suivant la diagonale AR du parallélogramme AFRF′, mais nous ne connaissons pas son intensité. Pour la déterminer, supposons qu'elle soit connue et appliquons cette force au point A, en sens contraire de AR. Le système des trois forces F′, F, R′ sera en équilibre, et nous savons que, dans ce cas (**24**), l'une quelconque d'entre elles est égale et directement opposée à la résultante des deux autres ; par conséquent, en prolongeant F′A de A vers B, nous aurons la direction de la résultante des forces F et R′. Or, cette direction doit être celle de la diagonale du parallélogramme construit sur les deux composantes comme côtés; il s'agit donc de construire ce parallélogramme, connaissant le côté AF, la direction AB de la diagonale et celle AR′ de l'autre côté. Pour cela, par le point F menons la parallèle FB à AR′ jusqu'à la rencontre en B de droite F′A prolongée, et par le point B, la parallèle BR′ à AF ; la droite AR′ représente l'intensité de la force R′ égale et directement opposée à la résultante R des forces F et F′, car cette longueur est la seule qui, composée avec AF, donne un parallélogramme dont la diagonale est dirigée suivant AB. De plus, cette diagonale est égale à AF′, puisque ces droites sont toutes deux égales à FR, comme parallèles comprises entre parallèles ; donc AB, diagonale du parallélogramme construit sur les forces F et R′, représente l'intensité de leur résultante.

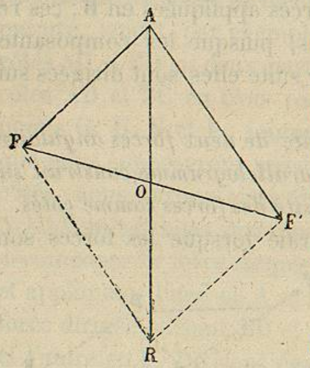

Fig. 16.

Par analogie, nous pouvons affirmer que la diagonale AR représente l'intensité de la résultante des forces F et F′, ce qui se voit encore en considérant les parallélogrammes ARFB et AFBR′, dans lesquels on a :

AR=BF et BF=AR′ par suite AR=AR′

En résumé, *la résultante des forces* F *et* F′ *appliquées au point* A *sous un angle quelconque est donnée en grandeur et en direction par la diagonale* AR.

33. La résultante de deux forces angulaires divise en deux parties égales la droite qui joint les extrémités des composantes, et son intensité est représentée par deux fois la droite qui joint le point d'intersection au point d'application. — Il suffit de se rappeler que, dans tout parallélogramme, les diagonales se coupent réciproquement en leur milieu. Nous avons par conséquent (*fig.* 16)

$$FO = F'O \text{ et } R = AR = 2AO$$

34. Relations entre la résultante et les composantes. — Soient F et F′ (*fig.* 17) deux forces appliquées au point A, et R leur résultante. Les relations trigonométriques entre les côtés et les angles des triangles nous donnent :

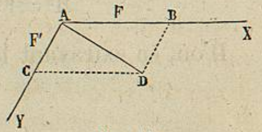

Fig. 17.

1° *Chaque force est proportionnelle au sinus de l'angle formé par la direction des deux autres.* — On sait, en effet, que dans un triangle quelconque, chaque côté est proportionnel au sinus de l'angle opposé. Le triangle ABD donne :

$$\frac{AD}{\sin ABD} = \frac{AB}{\sin BDA} = \frac{BD}{\sin BAD}$$

$$\text{or, } AD = R;\ AB = F;\ \text{et } BD = AC = F'$$
$$\text{et } \sin ABD = \sin BAC = \sin(FF')$$
$$\sin BDA = \sin DAC = \sin(F'R)$$
$$\sin BAD = \sin(FR)$$

En remplaçant, on a :

$$\frac{R}{\sin(FF')} = \frac{F}{\sin(F'R)} = \frac{F'}{\sin(FR)}$$

Ce qu'il fallait démontrer.

2° *Le carré de la résultante est égal à la somme des carrés des composantes, augmentée de deux fois le produit de ces forces par le cosinus de l'angle compris.*

Le même triangle ABD donne :

$$\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BD}^2 - 2AB \times BD \cos ABD$$

Mais, $ABD = 180° - BAC$

Et par suite $\cos ABD = -\cos BAC = -\cos(FF')$

Donc il vient : $R^2 = F^2 + F'^2 + 2FF' \cos(FF')$

Conséquences. — De cette dernière relation on déduit les conséquences suivantes :

1° Si les forces sont rectangulaires, l'angle $(FF') = 90°$, et comme $\cos 90° = 0$, il vient :

$$R^2 = F^2 + F'^2$$

c'est-à-dire que *le carré de la résultante est égal à la somme des carrés des composantes.*

2° Si les forces sont dirigées suivant la même droite et dans le même sens, l'angle $(FF') = 0$, et cos 0 étant égal à 1, on a :

$$R^2 = F^2 + F'^2 + 2FF' = (F + F')^2.$$

D'où, en extrayant la racine carrée :

$$R = F + F'$$

c'est-à-dire que *la résultante est égale à la somme des composantes.*

3° Enfin, si les forces agissent suivant la même droite, mais en sens contraire, on a :

$$\text{angle } (FF') = 180° \text{ et } \cos(FF') = -1$$

D'où il résulte : $R^2 = F^2 + F'^2 - 2FF' = (F - F')^2$

En extrayant la racine carrée, il vient :

$$R = F - F'$$

c'est-à-dire que *la résultante est égale à la différence des composantes.*

Ces deux derniers résultats confirment ce qui a été démontré (**27**) (**28**) dans la composition des forces agissant suivant la même droite.

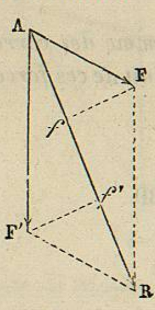

Fig. 18.

Si, de plus, F est égale à F' on a $R = 0$; les deux forces se détruisent et leur point d'application est en équilibre.

35. La résultante de deux forces angulaires est représentée par la somme des projections de ces forces faites sur sa direction propre.

Considérons les deux forces angulaires F et F' (*fig.* 18) appliquées au point matériel A et leur résultante R. Des points F et F' abaissons des perpendiculaires Ff et $F'f'$; les longueurs Af, Af' seront les projections des composantes sur la direction de la résultante.

On a sur la figure :

$$AR = Af' + f'R$$

A cause de l'égalité des triangles AFf et $F'f'R$, on a :

$$Af = Rf'$$

Et en remplaçant dans l'équation précédente, il vient :

$$AR = Af' + Af$$

ce qu'il fallait démontrer.

Dans le triangle AFR, les côtés AF, FR et AR représentent les intensités des deux composantes et de leur résultante, et on a les deux inégalités

$$AR < AF + FR \quad \text{et} \quad AR > FR - AF$$

Donc, *la résultante de deux forces angulaires est toujours moindre que leur somme et plus grande que leur différence.*

On peut aussi faire voir que la résultante diffère d'autant plus de la somme des composantes que l'angle (FF') qu'elles forment est plus ouvert. En effet, les angles F'AF et AFR étant supplémentaires, à mesure que le premier augmentera, le second diminuera et par suite le côté AR du triangle AFR, opposé à l'angle AFR, deviendra plus petit.

36. Composition d'un nombre quelconque de forces angulaires. — POLYGONE DES FORCES. *La résultante d'un nombre quelconque de forces appliquées à un même point matériel est représentée en grandeur et en direction par le côté qui ferme le polygone dont les autres côtés sont respectivement égaux et parallèles aux droites qui représentent l'intensité des forces données.*

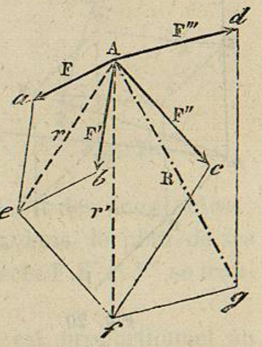

Fig. 19.

Nous pouvons étendre la règle du parallélogramme des forces à la composition d'un nombre quelconque de forces angulaires. Soient F, F', F'', un système de forces appliquées au point matériel A (*fig.* 19). Composons les deux forces F et F' en construisant le parallélogramme *Aaeb*; nous obtenons une première résultante partielle r qui remplace, dans le système, ses deux composantes. En composant de même cette première résultante avec la force F″, on obtient une deuxième résultante partielle r' qui, composée enfin avec la force F‴, donne la résultante finale R du système.

En remarquant que les droites ae, ef, fg sont respectivement égales et parallèles aux forces F′,F″ et F‴, on en déduit la construction suivante : pour trouver la résultante R d'un système de forces F,F′,F″,F‴ appliquées à un point matériel A, menez par l'extrémité a de la première force, la droite ae égale et parallèle à la seconde force F′; par le point e la droite ef égale et parallèle à la troisième force F″; enfin par le point f, la droite fg égale et parallèle à la quatrième force F‴, joignez le point g au point d'application A et la droite Ag qui ferme le contour polygonal A$aefg$, est la résultante cherchée.

Il faut remarquer que les forces F,F′,F″... peuvent être situées dans des plans différents ; dans ce cas, la construction est la même et le contour Aae... est un polygone gauche, c'est-à-dire que les différents côtés ne sont pas contenus dans le même plan.

37. Équilibre des forces angulaires. — Lorsque, dans la construction qui précède, le dernier point obtenu, tel que g, se confond avec le point d'application des forces, la résultante est nulle et par suite le système est en équilibre. Donc, *pour qu'un système de forces soit en équilibre, il faut et il suffit que la ligne brisée, formée en plaçant à la suite les unes des autres des droites égales et parallèles aux différentes forces, se ferme d'elle-même.*

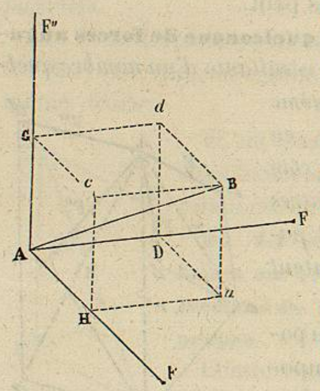

Fig. 20.

38. Cas particulier. — PARALLÉLIPIPÈDE DES FORCES. — Appliquons la règle que nous venons d'établir à la composition de trois forces F,F′,F″, appliquées à un même point matériel A (*fig.* 20) et non situées dans le même plan. Par l'extrémité H de l'une des forces, menons la droite Ha égale et parallèle à l'autre force F′, et par le point a, la droite aB égale et parallèle à la troisième force F″ ; la droite AB, qui ferme le

contour polygonal gauche AHaB, représente la résultante du système. D'ailleurs, cette résultante ne change pas, quelle que soit la force par laquelle on commence la composition et quel que soit l'ordre dans lequel on mène les parallèles ; ainsi, en commençant par la même force F, au lieu des droites Ha et aB, on peut mener les droites Hc et cB ; si on commence par la force F′, on obtiendra les droites Da et aB, ou Dd et dB ; enfin, commençant par la force F″, on mènera les droites Gc et cB, ou bien les droites Gd et dB. Ainsi, de quelque manière qu'on opère, on arrive toujours au point B. Or, la figure formée par toutes ces constructions est un parallélipipède dont AB est l'une des diagonales.

Donc, *la résultante de trois forces angulaires non situées dans un même plan est représentée, en grandeur et en direction, par la diagonale du parallélipipède dont les composantes sont les trois arêtes consécutives issues du même sommet.*

Si les forces F,F′,F″ sont rectangulaires, la valeur numérique de la résultante est donnée par la formule :

$$R=\sqrt{F^2+F'^2+F''^2}$$

39. Équilibre de trois forces angulaires. — Considérons les trois forces F,F′,F″ (*fig.* 21) appliquées au point matériel A, et cherchons les conditions qu'elles doivent remplir pour que ce point A soit en équilibre. Supposons que cet équilibre existe et, comme dans cette hypothèse nous savons que l'une quelconque de ces trois forces est égale et directement opposée à la résultante des deux autres, en prolongeant la direction de l'une d'elles, F par exemple, on aura la direction de la résultante R des deux autres ; mais la résultante se trouve forcément dans le plan de ses composantes, et, par suite, les trois forces F,F′ et F″ se trouvent dans le même plan.

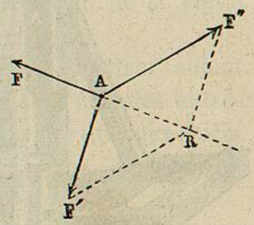

Fig. 21.

Dans le triangle AF′R, chaque côté est proportionnel au sinus de l'angle opposé, et l'on a :

$$\frac{AR}{\sin AF'R}=\frac{AF'}{\sin ARF'}=\frac{F'R}{\sin F'AR}$$

Mais on a aussi :

$$AR = F;\ AF' = F' \text{ et } F'R = F''$$
$$AF'R = 180^\circ - F'AF''$$
$$ARF' = 180^\circ - FAF''$$
$$F'AR = 180^\circ - FAF'$$

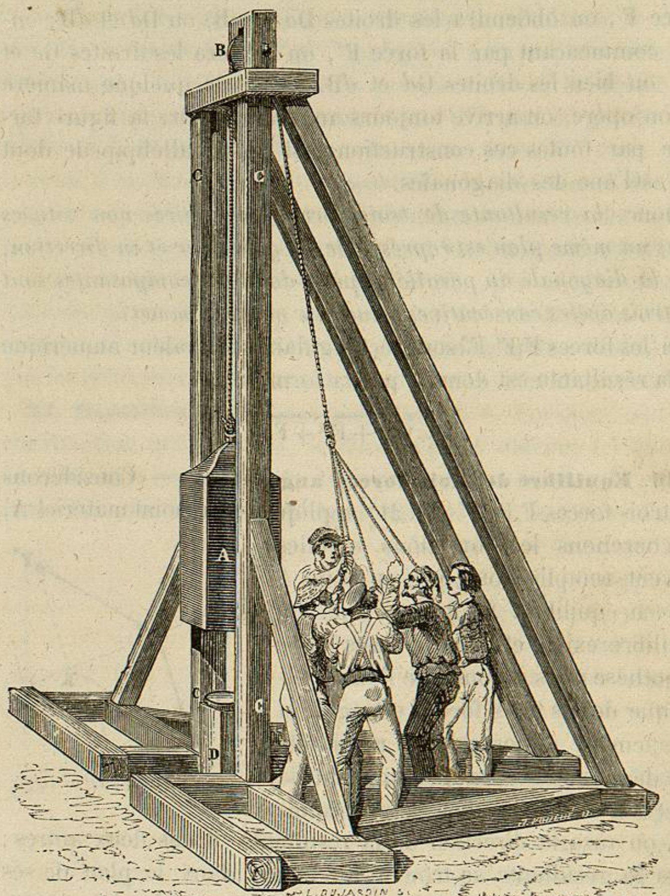

Fig. 22.

Les sinus des angles supplémentaires étant égaux, il vient en remplaçant :

$$\frac{F}{\sin(F'F'')} = \frac{F'}{\sin(FF'')} = \frac{F''}{\sin(FF')}$$

Donc, pour que trois forces appliquées à un même point matériel soient en équilibre, il faut :

1° *Qu'elles soient dans un même plan ;*

2° *Que chacune d'elles soit proportionnelle au sinus de l'angle formé par les directions des deux autres.*

La première condition était facile à prévoir, sachant que trois forces non situées dans un même plan ont pour résultante la diagonale d'un parallélipipède, car cette diagonale ne saurait être nulle.

40. Application de la composition des forces angulaires. — *Sonnette à tiraudes.* — L'appareil représenté par la figure 22, employé pour enfoncer des pieux dans le sol, est une application de la composition des forces angulaires. Il s'agit de soulever la masse A, qu'on nomme *mouton*, pour la laisser retomber ensuite sur la tête du pieu ; pour cela, on attache à la tête du mouton une corde qui vient passer sur une poulie B fixée à la partie supérieure des jumelles ; cette corde se termine par plusieurs brins appelés *tiraudes*, sur chacun desquels agit un homme. A un moment donné, tous les hommes se baissent et élèvent le mouton à une hauteur de $1^m,20$ environ, pour le laisser retomber ensuite. Les forces exercées par les hommes et appliquées suivant les différentes tiraudes se composent en une résultante unique dont la direction est celle de la corde principale.

D'après ce qui a été dit (**35**), on voit qu'il convient, autant qu'on le peut, de rapprocher les ouvriers les uns des autres afin que les angles formés par les directions des tiraudes soient le plus petits possible.

§ 2. — DÉCOMPOSITION ET ÉQUILIBRE DES FORCES ANGULAIRES.

41. Décomposition d'une force en deux autres appliquées au même point. — Lorsqu'on se propose le problème inverse de la composition de deux forces, c'est-à-dire de remplacer une force donnée par ses deux composantes, il peut se présenter quatre cas :

1° *Les directions des deux composantes sont données.* — Soient R (*fig.* 23) la force donnée, AF et AF' les directions des composantes. D'abord, pour que le problème soit possible, il faut que