Mais on a aussi :

$$AR = F; \; AF' = F' \text{ et } F'R = F''$$
$$AF'R = 180^\circ - F'AF''$$
$$ARF' = 180^\circ - FAF''$$
$$F'AR = 180^\circ - FAF'$$

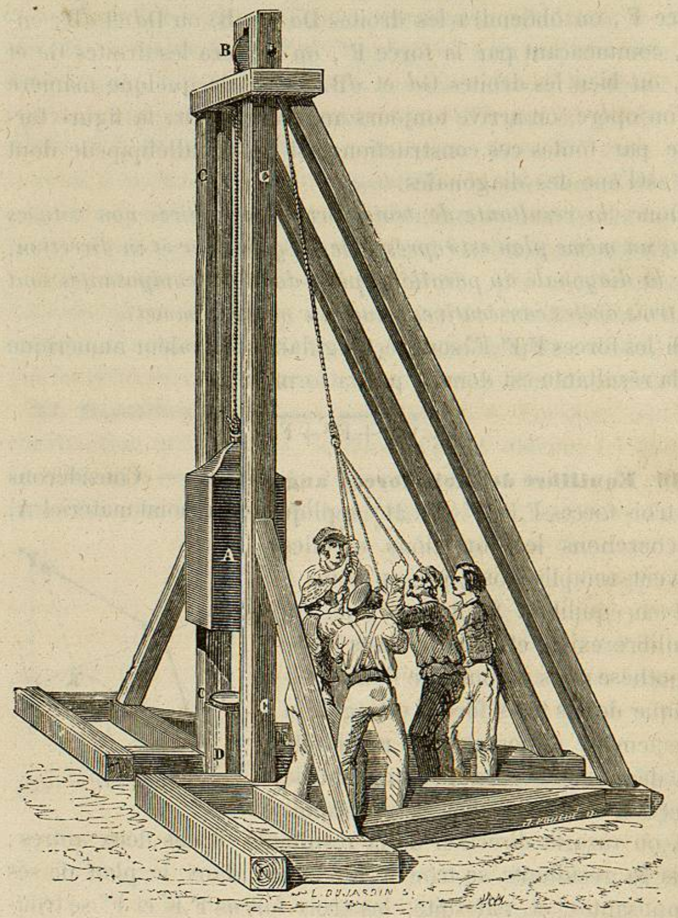

Fig. 22.

Les sinus des angles supplémentaires étant égaux, il vient en remplaçant :

$$\frac{F}{\sin(F'F'')} = \frac{F'}{\sin(FF'')} = \frac{F''}{\sin(FF')}$$

Donc, pour que trois forces appliquées à un même point matériel soient en équilibre, il faut :

1° *Qu'elles soient dans un même plan ;*

2° *Que chacune d'elles soit proportionnelle au sinus de l'angle formé par les directions des deux autres.*

La première condition était facile à prévoir, sachant que trois forces non situées dans un même plan ont pour résultante la diagonale d'un parallélipipède, car cette diagonale ne saurait être nulle.

40. Application de la composition des forces angulaires. — *Sonnette à tiraudes.* — L'appareil représenté par la figure 22, employé pour enfoncer des pieux dans le sol, est une application de la composition des forces angulaires. Il s'agit de soulever la masse A, qu'on nomme *mouton*, pour la laisser retomber ensuite sur la tête du pieu ; pour cela, on attache à la tête du mouton une corde qui vient passer sur une poulie B fixée à la partie supérieure des jumelles ; cette corde se termine par plusieurs brins appelés *tiraudes*, sur chacun desquels agit un homme. A un moment donné, tous les hommes se baissent et élèvent le mouton à une hauteur de $1^m,20$ environ, pour le laisser retomber ensuite. Les forces exercées par les hommes et appliquées suivant les différentes tiraudes se composent en une résultante unique dont la direction est celle de la corde principale.

D'après ce qui a été dit (**35**), on voit qu'il convient, autant qu'on le peut, de rapprocher les ouvriers les uns des autres afin que les angles formés par les directions des tiraudes soient le plus petits possible.

§ 2. — DÉCOMPOSITION ET ÉQUILIBRE DES FORCES ANGULAIRES.

41. Décomposition d'une force en deux autres appliquées au même point. — Lorsqu'on se propose le problème inverse de la composition de deux forces, c'est-à-dire de remplacer une force donnée par ses deux composantes, il peut se présenter quatre cas :

1° *Les directions des deux composantes sont données.* — Soient R (*fig.* 23) la force donnée, AF et AF′ les directions des composantes. D'abord, pour que le problème soit possible, il faut que ces deux directions soient dans un même plan avec la force R.

Par l'extrémité de la force donnée, menons la droite RF′ parallèle à la direction AF; les longueurs AF′ et RF′ représentent l'intensité des composantes, car, si par le point R on mène la parallèle RF à AF′, on a :

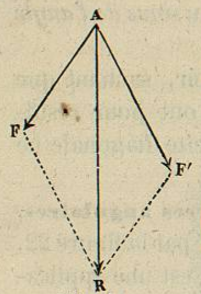

Fig. 23.

$$AF = RF'$$

La relation trouvée précédemment (**34**) permet de déterminer analytiquement ces composantes. En effet, on a :

$$\frac{F}{\sin(F'R)} = \frac{F'}{\sin(FR)} = \frac{R}{\sin(FF')}$$

D'où l'on tire :

$$F = R\frac{\sin(F'R)}{\sin(FF')} \quad \text{et} \quad F' = R\frac{\sin(FR)}{\sin(FF')}$$

Si les deux directions AF et AF′ sont rectangulaires, les triangles AFR et AF′R sont rectangles et donnent :

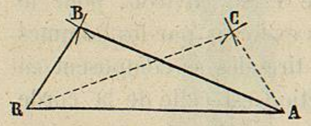

Fig. 24.

$$F = R\cos(FR) \quad \text{et} \quad F' = R\cos(F'R)$$

Dans ce cas, *chaque composante est égale à la projection de la résultante sur sa direction.*

2° *L'intensité des composantes est donnée.* — Ce problème revient à construire un triangle, connaissant les trois côtés. On a vu en géométrie qu'il y a deux solutions ARB et ARC (*fig.* 24), sauf le cas où l'intensité des composantes serait égale. D'ailleurs, pour que le problème soit possible, il faut que la force R à décomposer soit plus petite que la somme de ses composantes et plus grande que leur différence.

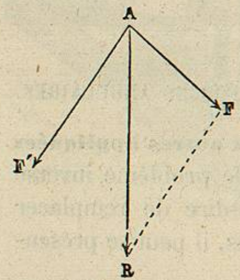

Fig. 25.

3° *L'une des composantes est donnée en grandeur et en direction.* — Soient R (*fig.* 25) la force que l'on veut décomposer,

et F la composante donnée. Ce problème est toujours possible et n'admet qu'une solution ; en effet, il suffit de construire un triangle, connaissant deux côtés AR, AF et l'angle compris. L'autre composante F′ sera donnée en grandeur et en direction par une droite issue du point A égale et parallèle à RF.

4° *L'une des composantes est donnée en direction et l'autre en intensité.* — Comme dans les cas précédents, ce problème revient à la construction d'un triangle, connaissant les côtés AR, RF (*fig.* 26) et l'angle RAF opposé à l'un d'eux. On sait qu'il peut y avoir ou deux solutions, ou une seule, ou aucune, suivant que le côté RF sera ou plus grand, ou égal, ou plus petit que la perpendiculaire Rr abaissée du point R sur la direction Ax. S'il y a deux solutions, les composantes de R seront AF et AF′ ou AF_1 et AF'_1; et, s'il n'y a qu'une solution, les composantes seront rectangulaires et représentées par les droites Ar et Ar'.

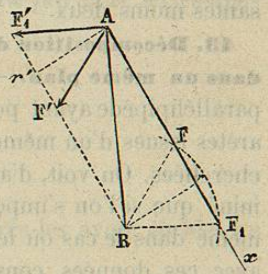

Fig. 26.

42. Décomposition d'une force en plus de deux autres situées dans un même plan. — Ce problème est indéterminé, même lorsque la direction des composantes est donnée. En effet, soit R (*fig.* 27) la force, appliquée au point A, que l'on veut décomposer en trois autres dirigées suivant Aa, Ab, et Ac. On peut procéder de deux manières, tout aussi arbitraires l'une que l'autre : 1° se donner à volonté l'intensité de l'une quelconque des composantes, f par exemple, et décomposer la force R comme on l'a vu (**41**-3°) en deux autres f et Ax; 2° mener d'une manière quelconque une droite Ax dans le plan

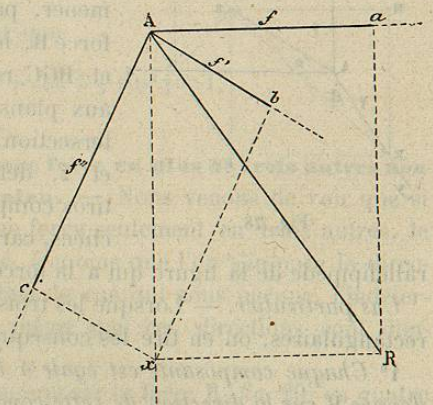

Fig. 27.

des forces, et décomposer R en deux forces dirigées suivant Aa et Ax (**41-1°**). Dans l'un comme dans l'autre cas, la composante Ax se décomposera à son tour en deux autres f' et f''. On voit donc que l'intensité des différentes composantes est tout à fait indéterminée et dépend, soit de la première f qu'on s'impose, soit de la direction arbitraire Ax. En général, on peut se donner, d'une infinité de manières, toutes les composantes moins deux.

43. Décomposition d'une force en trois autres non situées dans un même plan. — Nous savons qu'en construisant un parallélipipède ayant pour diagonale la force donnée, les trois arêtes issues d'un même sommet représentent les composantes cherchées. On voit, d'après cela, que le problème n'est déterminé que si l'on s'impose la direction des composantes; car, même dans le cas où leur intensité serait connue, on pourrait avec ces données construire une infinité de parallélipipèdes ayant même diagonale.

Soit R (*fig.* 28) la force donnée représentée par la longueur AB, et proposons-nous de la décomposer en trois autres dirigées suivant Ax, Ay et Az. Pour opérer cette décomposition, il suffit de mener, par l'extrémité B de la force R, les trois plans BHD, BHE et BGC respectivement parallèles aux plans yAx, xAz, zAy; leur intersection, avec les directions x, y et z, déterminera l'intensité des tiros composantes F, F′, F″ cherchées, car on obtient ainsi le parallélipipède de la figure qui a la force R pour diagonale.

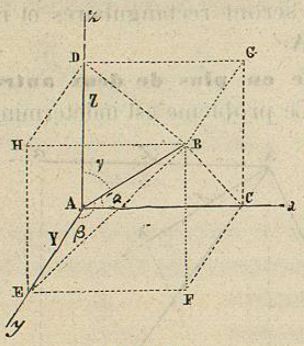

Fig. 28.

Cas particulier. — Lorsque les trois directions x, y et z sont rectangulaires, on en tire les conséquences suivantes :

1° *Chaque composante est égale à la projection de la force donnée* R *sur la direction de cette composante.*

En effet, les triangles DAB, EAB et BAC sont rectangles en D, E et C; on a donc, en désignant par α, β, γ les angles de la force R avec les trois directions données :

$$F = R\cos\alpha;\quad F' = R\cos\beta \ \text{ et } F'' = R\cos\gamma$$

De ces égalités on tire :

$$\cos\alpha = \frac{F}{R},\quad \cos\beta = \frac{F'}{R},\quad \cos\gamma = \frac{F''}{R}$$

c'est-à-dire que, lorsqu'on connaît l'intensité des composantes, on peut en déduire l'angle que la résultante fait avec chacune d'elles.

2° *Quelle que soit la direction de la résultante, la somme des carrés des cosinus des trois angles qu'elle fait avec les composantes est égale à l'unité.*

Reprenons les égalités :

$$F = R\cos\alpha$$
$$F' = R\cos\beta$$
$$F'' = R\cos\gamma$$

et ajoutons-les membre à membre, après les avoir élevées au carré; il vient :

$$F^2 + F'^2 + F''^2 = R^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)$$

Mais on sait que, dans un parallélipipède rectangle, le carré de la diagonale est égal à la somme des carrés de ses trois dimensions, c'est-à-dire que l'on a :

$$F^2 + F'^2 + F''^2 = R^2$$

Par conséquent, il faut que

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

ce qu'il fallait démontrer.

44. Décomposition d'une force en plus de trois autres non situées dans un même plan. — Nous venons de voir que si l'on veut décomposer une force seulement en trois autres, le problème est indéterminé, à moins que l'on s'impose la direction des composantes. Dans le cas qui nous occupe, l'indétermination subsiste lors même que ces directions sont données.

Proposons-nous de décomposer la force R (*fig.* 29) en quatre autres dirigées suivant Aa, Ab, Ac et Ad. Il est facile de voir qu'on peut opérer cette décomposition de plusieurs manières; si l'on se donne, à volonté, l'intensité de l'une quelconque des composantes, f par exemple, en construisant le parallélogramme $AaRx$, on obtient la composante Ax, située dans le plan aAR, dont l'intensité dépend de celle de f prise arbitrairement ; cette composante peut se décomposer ensuite en trois autres suivant les directions données en construisant le parallélipipède $Acxbd$.

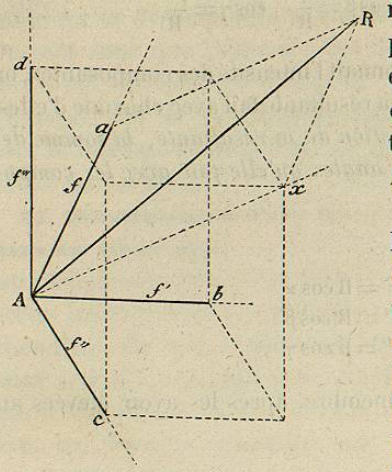

Fig. 29.

Au lieu de prendre, à volonté, l'intensité d'une des composantes, on pourrait mener d'une manière quelconque la droite Ax dans le plan formé par la force R et l'une des directions imposées ; dans ce cas, toutes les composantes dépendraient de la direction Ax, et participeraient à l'indétermination de cette direction.

45. Équilibre d'un nombre quelconque de forces appliquées à un même point matériel. — Soient les forces F, F′, F″... (*fig.* 30) appliquées au point matériel A. Menons par ce point les trois axes rectangulaires xx', yy', zz', et appelons a, b, c les angles respectifs que fait l'une des forces F avec chacun de ces axes ; a', b', c', les angles analogues pour une autre force F′, et ainsi de suite. Chacune des forces peut être décomposée en trois autres dirigées suivant Ax ou Ax', Ay ou Ay' Az ou Az', qui seront respectivement égales aux produits

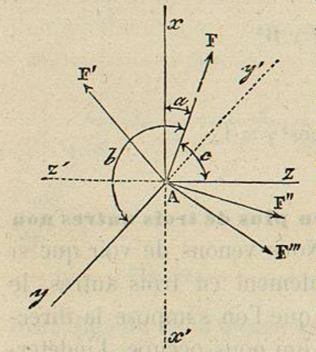

Fig. 30.

$$F \cos a, \ F \cos b, \ F \cos c$$

pour les composantes de la force F, et

$$F' \cos a' \ F' \cos b' \ F' \cos c'$$

pour les composantes de la force F′, et ainsi de suite.

Toutes les composantes dirigées suivant un même axe peuvent être composées en une seule force égale à leur somme algébrique, et nous admettrons la désignation :

$$\Sigma F \cos a$$

pour la résultante dirigée suivant l'axe xx' ;

$$\Sigma F \cos b$$

pour la résultante dirigée suivant l'axe yy' ;

$$\Sigma F \cos c$$

pour la résultante dirigée suivant l'axe zz'.

Le système des forces données se trouve ainsi réduit à trois forces dirigées suivant les axes rectangulaires que nous avons menés arbitrairement par le point A.

Maintenant, comme cela a été dit (**38**), ces trois dernières forces peuvent se composer en une seule, et la formule :

$$R = \sqrt{(\Sigma F \cos a)^2 + (\Sigma F \cos b)^2 + (\Sigma F \cos c)^2}$$

donnera la résultante. Or, pour qu'il y ait équilibre, il faut et il suffit que cette résultante soit nulle et, par suite, que le parallélipipède construit sur les composantes ait une diagonale nulle, ce qui exige que les côtés soient égaux à 0, et l'on aura :

$$\Sigma F \cos a = 0$$
$$\Sigma F \cos b = 0$$
$$\Sigma F \cos c = 0$$

Ainsi, *pour qu'un système quelconque de forces appliquées à un même point matériel soit en équilibre, il faut et il suffit que la somme des projections de ces forces sur trois axes rectangulaires quelconques menés par ce point, soit égale à* 0 *pour chacun d'eux.*

On voit, par ce qui précède, qu'il est souvent utile de considérer la projection d'un système de forces sur un axe ; à cet effet, nous démontrerons la proposition suivante, dont on se sert souvent en mécanique.

46. La projection sur un axe de la résultante d'un système de forces appliquées à un point matériel est égale à la somme algébrique des projections des composantes sur ce

même axe. — Considérons d'abord le cas où toutes les forces sont situées dans un même plan. Les forces données F, F', F'', F''', F^{IV} (fig. 31) étant représentées en grandeur et en direction par les droites Aa, Ab, Ac, Ad, Ae, leur résultante R sera représentée en grandeur et en direction par la droite Ar, qui ferme le contour polygonal A$afghr$, dont les côtés af, fg, gh, hr sont respectivement égaux et parallèles aux droites Ab, Ac, Ad, Ae représentant les forces données.

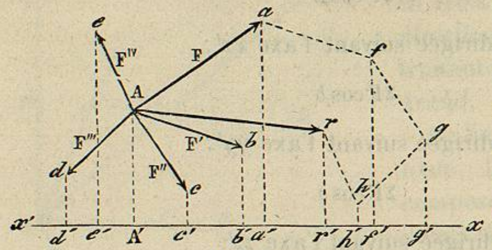

Fig. 31.

Soit xx' l'axe de projection situé dans le plan des forces; projetons sur cet axe les forces données et leur résultante, ainsi que les droites af, fg, gh, hr. On a sur la figure :

$$A'r' = A'a' + a'f' + f'g' - g'h' - h'r'$$

mais on a aussi :

$$a'f' = A'b';\ f'g' = A'c';\ g'h' = A'd' \text{ et } h'r' = A'e'$$

En remplaçant, il vient :

$$A'r' = A'a' + A'b' + A'c' - A'd' - A'e'$$

En convenant de considérer comme positives les forces agissant de A vers x, et comme négatives celles qui agissent en sens contraire, on aura enfin :

$$A'r' = A'a' + A'b' + A'c' + A'd' + A'e'$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

Si les forces ne sont pas toutes comprises dans le même plan, le théorème subsiste encore, et, dans ce cas, la projection d'une force sur l'axe est la distance comptée sur cet axe entre deux plans perpendiculaires à l'axe, menés par les deux extrémités de la droite qui représente la force.

Remarque. — Nous avons supposé, dans l'équilibre d'un point matériel, qu'on projette les forces sur trois axes rectangulaires. La proposition que nous venons de démontrer nous prouve que cette particularité n'est pas nécessaire, car, s'il y a équilibre, la résultante est nulle et sa projection sur un axe quelconque est également nulle.

Il peut arriver que la somme des projections des forces sur un axe soit nulle, sans que le point matériel soit en équilibre, car, si la résultante est perpendiculaire à l'axe de projection, sa projection est nulle sur cet axe. Mais la résultante ne pouvant pas être à la fois perpendiculaire aux trois arêtes d'un angle trièdre, il s'ensuit que, si sa projection sur trois axes quelconques est nulle pour chacun d'eux, la résultante est forcément nulle et l'équilibre existe.

Dans le cas d'axes quelconques, les composantes de la force F, suivant les axes, ne sont plus égales à F cos a, F cos b, F cos c, et les équations générales de l'équilibre d'un point matériel s'expriment par :

$$\Sigma Fx = 0$$
$$\Sigma Fy = 0$$
$$\Sigma Fz = 0$$

§ 3. — MOMENTS DES FORCES ANGULAIRES.

47. Moment par rapport à un point. — On désigne sous le nom de *moment d'une force par rapport à un point, le produit de la force par la perpendiculaire abaissée de ce point sur la direction de cette force.*

Ainsi, le moment de la force AB (fig. 32) par rapport au point O est :

$$AB \times OC \text{ ou } Ff$$

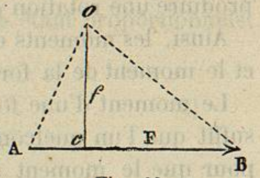

Fig. 32.

en désignant la force par F et la perpendiculaire OC par f. Le point O prend le nom de *centre des moments*, et la perpendiculaire f celui de *bras de levier* de la force. Avec ces conventions on peut dire que le moment d'une force par rapport à un point est égal à l'*intensité de la force multipliée par son bras de levier*.

On peut encore exprimer ce moment d'une autre manière.