même axe. — Considérons d'abord le cas où toutes les forces sont situées dans un même plan. Les forces données F, F′, F″, F‴, F^{IV} (fig. 31) étant représentées en grandeur et en direction par les droites A*a*, A*b*, A*c*, A*d*, A*e*, leur résultante R sera représentée en grandeur et en direction par la droite A*r*, qui ferme le contour polygonal A*afghr*, dont les côtés *af*, *fg*, *gh*, *hr* sont respectivement égaux et parallèles aux droites A*b*, A*c*, A*d*, A*e* représentant les forces données.

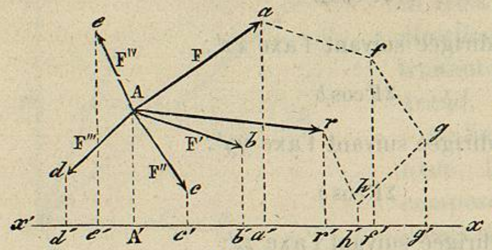

Fig. 31.

Soit *xx′* l'axe de projection situé dans le plan des forces; projetons sur cet axe les forces données et leur résultante, ainsi que les droites *af*, *fg*, *gh*, *hr*. On a sur la figure :

$$A'r' = A'a' + a'f' + f'g' - g'h' - h'r'$$

mais on a aussi :

$$a'f' = A'b';\ f'g' = A'c';\ g'h' = A'd' \text{ et } h'r' = A'e'$$

En remplaçant, il vient :

$$A'r' = A'a' + A'b' + A'c' - A'd' - A'e'$$

En convenant de considérer comme positives les forces agissant de A vers *x*, et comme négatives celles qui agissent en sens contraire, on aura enfin :

$$A'r' = A'a' + A'b' + A'c' + A'd' + A'e'$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

Si les forces ne sont pas toutes comprises dans le même plan, le théorème subsiste encore, et, dans ce cas, la projection d'une force sur l'axe est la distance comptée sur cet axe entre deux plans perpendiculaires à l'axe, menés par les deux extrémités de la droite qui représente la force.

Remarque. — Nous avons supposé, dans l'équilibre d'un point matériel, qu'on projette les forces sur trois axes rectangulaires. La proposition que nous venons de démontrer nous prouve que cette particularité n'est pas nécessaire, car, s'il y a équilibre, la résultante est nulle et sa projection sur un axe quelconque est également nulle.

Il peut arriver que la somme des projections des forces sur un axe soit nulle, sans que le point matériel soit en équilibre, car, si la résultante est perpendiculaire à l'axe de projection, sa projection est nulle sur cet axe. Mais la résultante ne pouvant pas être à la fois perpendiculaire aux trois arêtes d'un angle trièdre, il s'ensuit que, si sa projection sur trois axes quelconques est nulle pour chacun d'eux, la résultante est forcément nulle et l'équilibre existe.

Dans le cas d'axes quelconques, les composantes de la force F, suivant les axes, ne sont plus égales à F cos *a*, F cos *b*, F cos *c*, et les équations générales de l'équilibre d'un point matériel s'expriment par :

$$\Sigma Fx = 0$$
$$\Sigma Fy = 0$$
$$\Sigma Fz = 0$$

§ 3. — MOMENTS DES FORCES ANGULAIRES.

47. Moment par rapport à un point. — On désigne sous le nom de *moment d'une force par rapport à un point, le produit de la force par la perpendiculaire abaissée de ce point sur la direction de cette force.*

Ainsi, le moment de la force AB (fig. 32) par rapport au point O est :

$$AB \times OC \text{ ou } Ff$$

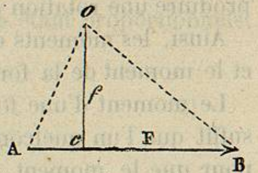

Fig. 32.

en désignant la force par F et la perpendiculaire OC par *f*. Le point O prend le nom de *centre des moments*, et la perpendiculaire *f* celui de *bras de levier* de la force. Avec ces conventions on peut dire que le moment d'une force par rapport à un point est égal à l'*intensité de la force multipliée par son bras de levier*.

On peut encore exprimer ce moment d'une autre manière.

En effet, joignons le point O aux extrémités A et B de la force; le produit Ff représente le double de l'aire du triangle AOB; donc, *le moment d'une force par rapport à un point est encore égal au double de l'aire d'un triangle ayant pour base la droite qui représente l'intensité de la force, et pour sommet le centre des moments.*

Lorsqu'on prend les moments de plusieurs forces contenues dans un même plan, par rapport à un même point situé dans ce plan, on ne peut plus considérer ces moments en valeur absolue. En effet, supposons que le point O soit fixe, que les perpendiculaires f, f', f'' (*fig.* 33), abaissées de ce point sur les forces F, F′, F″, soient invariablement liées avec lui et que chaque force soit appliquée directement au pied de la perpendiculaire qui lui correspond. Si un observateur, placé debout et les pieds sur le point O, regarde le système, les forces F et F′ tendront à faire tourner leur bras de levier de gauche à droite par rapport à cet observateur, tandis que la force F″ tendra, au contraire, à faire tourner son bras de levier de droite à gauche. Cette opposition de sens dans les rotations fictives que nous avons supposées, a conduit à attribuer des signes aux moments, lorsqu'on les fait entrer dans les calculs; on convient d'appeler *positifs* les moments des forces qui tendent à faire tourner leur bras de levier dans un certain sens (de gauche à droite par exemple), et *négatifs* les moments des forces qui tendent à produire une rotation contraire.

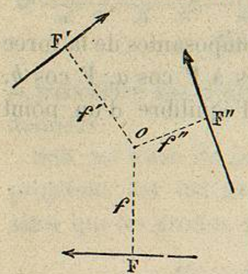

Fig. 33.

Ainsi, les moments des forces F et F′ seront $+Ff$ et $+F'f'$ et le moment de la force F″ sera $-F''f''$.

Le moment d'une force étant un produit de deux facteurs, il suffit que l'un quelconque de ces deux facteurs soit égal à 0 pour que le moment soit nul. Ainsi, le moment d'une force peut être nul dans deux cas différents : 1° *lorsque l'intensité de la force est nulle*, et 2° *lorsque le centre des moments est pris sur la direction de la force.*

48. Théorème de Varignon. — *Le moment de la résultante de deux forces concourantes par rapport à un point quelconque pris dans leur plan, est égal à la somme algébrique des moments des composantes.*

Soient O (*fig.* 34) le point par rapport auquel on veut prendre les moments, F et F′ les deux forces appliquées au point A, et R leur résultante; il faut démontrer que l'on a :

$$Rr = Ff + F'f'$$

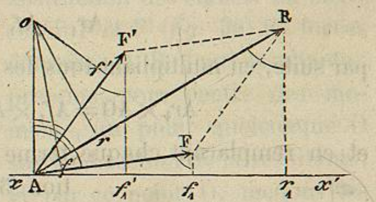

Fig. 34.

Pour cela, joignons le point O au point A, et menons dans le plan des forces, l'axe xx' perpendiculaire à OA ; projetons sur cet axe les forces F, F′ et leur résultante R. Nous savons que l'on a :

$$Ar_1 = Af_1 + Af'_1 \qquad (1)$$

c'est-à-dire que la projection de la résultante est égale à la somme des projections des composantes. Du reste, cela se voit aisément sur la figure, car on a :

$$Ar_1 = Af_1 + f_1r_1$$

mais $f_1r_1 = Af'_1$ comme étant les projections sur le même axe de deux droites égales et parallèles, et en remplaçant, on trouve l'équation (1).

Cela posé, remarquons que les triangles AOr et ARr_1, AOf et AFf_1, AOf' et AF′f'_1 sont semblables deux à deux, car ils sont rectangles, les premiers en r et r_1; les deuxièmes en f et f_1; les troisièmes en f' et f'_1, et de plus les angles en A sont respectivement égaux aux angles en R, en F et en F′ comme alternes-internes. Les côtés homologues étant proportionnels, on a, pour les triangles AOr et ARr_1,

$$\frac{AO}{R} = \frac{r}{Ar_1} \qquad (2)$$

pour les triangles AOf et AFf_1,

$$\frac{AO}{F} = \frac{f}{Af_1} \qquad (3)$$

et, pour les triangles AOf' et AF′f'_1,

$$\frac{AO}{F'} = \frac{f'}{Af'_1} \qquad (4)$$

Des égalités (2) (3) et (4) on tire :

$$AO \times Ar_1 = Rr;\ AO \times Af_1 = Ff \text{ et } AO \times Af_1 = F'f' \quad (5)$$

Nous avons trouvé par l'équation (1)

$$Ar_1 = Af_1 + Af'_1$$

par suite, en multipliant tous les termes par AO, on a :

$$Ar_1 \times AO = Af_1 \times AO + Af'_1 \times AO$$

et en remplaçant chaque terme par son égal tiré de l'équation (5), on a :

$$Rr = Ff + F'f'$$

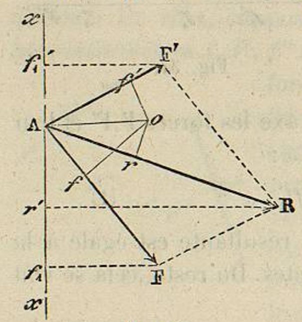

Fig. 35.

Donc, *le moment de la résultante est égal à la somme des moments des composantes.*

Lorsque le centre des moments est pris à l'intérieur de l'angle (FF') (*fig.* 35), on a pour l'équation (1)

$$Ar_1 = Af_1 - Af'_1$$

et par suite

$$Rr = Ff - F'f'$$

Donc, *le moment de la résultante est égal à la différence des moments des composantes.*

En remarquant que les forces F et R tendent à faire tourner leur bras de levier dans un sens, tandis que la force F' tend à faire tourner son bras de levier en sens contraire, on pourra encore écrire :

$$Rr = Ff + F'f'$$

en attribuant des signes aux moments. Donc : *le moment de la résultante est égal, dans tous les cas, à la somme algébrique des moments des composantes.*

Remarque. — On voit, sur la figure, que la résultante tend à faire tourner son bras de levier dans le même sens que la force qui a le plus grand moment.

Si le centre des moments est pris sur la direction de la résultante, on aura :

$$r = 0 \text{ et par suite } Ff = -F'f'$$

c'est-à-dire que *les moments des composantes sont égaux et de signes contraires.*

Cette proposition peut se démontrer directement en faisant abstraction des signes. En effet, soient F et F' (*fig.* 36) les forces données et R leur résultante ; prenons, pour centre des moments, un point quelconque O sur la direction de la résultante, et par ce point O, menons les droites Oa et Ob, Oc et Od respectivement parallèles et perpendiculaires aux forces F et F'. Les deux triangles AOa et AOc étant égaux, donnent :

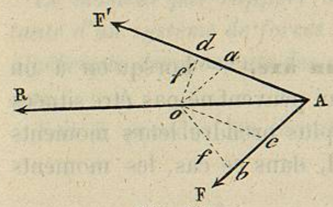

Fig. 36.

$$Aa \times Od = Ac \times Ob$$

mais Ac et Aa sont proportionnelles aux forces F et F' ; en désignant Ob et Od par f et f', et en remplaçant, il vient :

$$Ff = F'f'$$

En écrivant cette égalité sous la forme :

$$\frac{F}{F'} = \frac{f'}{f}$$

on voit que les distances des composantes à un point quelconque de la résultante sont inversement proportionnelles aux intensités de ces composantes.

49. Le théorème de Varignon peut s'étendre à un nombre quelconque de forces appliquées à un même point matériel et situées dans un même plan. Soient F, F , F'', F'''... toutes ces forces et R leur résultante ; appelons R' la résultante des forces F et F' ; R'' la résultante des forces F' et F'' ; R''' la résultante des forces R'' et F''', et ainsi de suite.

On aura, d'après ce qui a été démontré, les égalités suivantes :

$$R'r' = Ff + F'f'$$
$$R''r'' = R'r' + F''f''$$
$$R'''r''' = R''r'' + F'''f'''$$
$$\dots = \dots\dots$$
$$Rr = R^{n-1}r_{n-1} + F^n f_n.$$

Ajoutant toutes ces égalités membre à membre et supprimant les facteurs communs, il vient :

$$Rr = Ff + F'f' + F''f'' + F'''f''' + \ldots\ldots + F^n f_n$$

ce qu'il fallait démontrer.

50. Moment par rapport à un axe. — Lorsqu'on a un système de forces concourantes qui peuvent ne pas être situées dans un même plan, on ne peut plus prendre leurs moments par rapport à un point. On prend, dans ce cas, les moments par rapport à un axe.

On appelle *moment d'une force par rapport à un axe quelconque, le produit de la projection de cette force sur un plan perpendiculaire à l'axe, par la plus courte distance de la projection à l'axe.*

Ainsi, le moment de la force F (*fig.* 37) par rapport à l'axe xx', n'est autre chose que le moment $F'f$ de sa projection F' par rapport au point O où l'axe perce le plan MN. Le sens de ce moment indique le signe du moment de la force par rapport à l'axe.

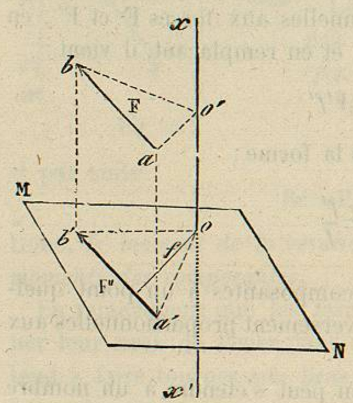

Fig. 37.

D'après la définition, on voit que le moment d'une force par rapport à un axe peut être nul de deux manières différentes : 1° *quand la force est nulle, et* 2° *quand la force est dans un même plan avec l'axe.* Dans le second cas, si la force est parallèle à l'axe, sa projection est nulle sur un plan perpendiculaire à l'axe, et si elle rencontre l'axe, c'est la perpendiculaire f qui devient nulle.

Remarque. — Prenons un point quelconque O' sur l'axe; le triangle $a'Ob'$ est la projection sur le plan MN du triangle $aO'b$. On peut donc dire que *le moment d'une force par rapport à un axe est égal à la projection, sur un plan perpendiculaire à l'axe, du moment de cette force par rapport à un point quelconque de cet axe.*

51. Théorème de Varignon. — Ce qui précède nous permet d'étendre directement le théorème de Varignon, pour ces nouveaux moments, à un nombre quelconque de forces concourantes.

Le moment par rapport à un axe quelconque de la résultante d'un système de forces concourantes est égal à la somme algébrique des moments des composantes par rapport au même axe.

Soit à prendre les moments par rapport à l'axe XY d'un

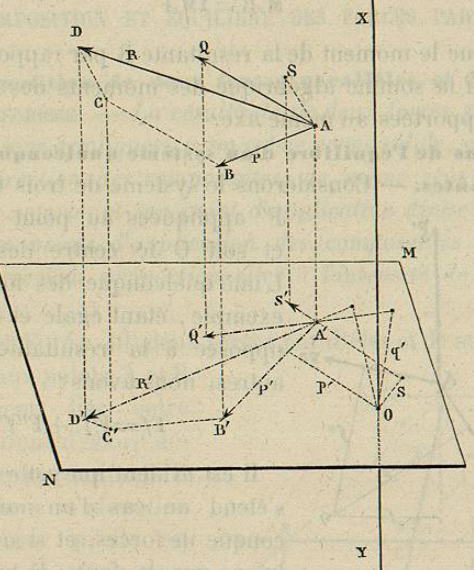

Fig. 38.

système quelconque de forces P, Q, S... (*fig.* 38), appliquées à un même point matériel A et de leur résultante R.

Prenons un plan MN perpendiculaire à l'axe XY, et soit O leur intersection ; si nous projetons toutes les forces sur ce plan, la projection R', de la résultante R, sera la résultante des projections P', Q', S',..., et comme elles se trouvent toutes dans un même plan, le théorème des moments par rapport au point O donne :

$$R'r' = P'p' + Q'q' + S's' \ldots\ldots$$

Mais, d'après la remarque ci-dessus, ces différents produits représentent les moments des forces R, P, Q, S... par rapport à l'axe XY, ce qui démontre la proposition énoncée.

Le moment d'une force par rapport à un axe se représente par la lettre M affectée d'un indice rappelant l'axe auquel on a rapporté les moments. Ainsi

$$M_x F$$

indique le moment de la force F par rapport à l'axe x. De même,

$$M_x R = \Sigma M_x F$$

signifie que le moment de la résultante R par rapport à l'axe x, est égal à la somme algébrique des moments des forces telles que F rapportées au même axe.

52. Cas de l'équilibre d'un système quelconque de forces concourantes. — Considérons le système de trois forces F, F′, F″ appliquées au point A (*fig.* 39), et soit O le centre des moments. L'une quelconque des forces, F par exemple, étant égale et directement opposée à la résultante des deux autres, nous avons :

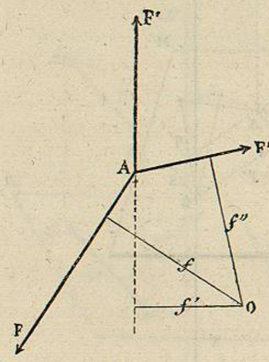

Fig. 39.

$$Ff = F'f' + F''f''$$

Il est évident que cette proposition s'étend au cas d'un nombre quelconque de forces, et si nous remarquons que la force F tend à faire tourner son bras de levier en sens contraire des deux autres, nous pouvons dire d'une manière générale que : *dans un système de forces concourantes en équilibre, la somme des moments des forces qui tendent à faire tourner leur bras de levier dans un sens, est égale à la somme des moments des forces qui tendent à le faire tourner en sens contraire ;* ou encore : *la somme algébrique des moments est égale à zéro.* Cela résulte, d'ailleurs, de ce que dans un système en équilibre, la résultante est nulle et son moment est égal à 0 ; on doit donc avoir :

$$\Sigma MF = 0$$

CHAPITRE III

COMPOSITION, DÉCOMPOSITION ET ÉQUILIBRE DES FORCES PARALLÈLES

§ 1. — COMPOSITION ET ÉQUILIBRE DES FORCES PARALLÈLES.

53. Composition de deux forces parallèles et de même sens. — THÉORÈME. — *La résultante de deux forces parallèles et de même sens appliquées à un même corps solide, est parallèle à la direction des composantes, de même sens qu'elles, égale à leur somme, et son point d'application divise la droite qui joint les points d'application des composantes en deux parties inversement proportionnelles à l'intensité de ces composantes.*

Soient F et F′ (*fig.* 40) deux forces parallèles et de même sens appliquées aux points A et B invariablement liés entre eux. Nous allons d'abord démontrer que la résultante R est parallèle à la direction de ces forces, qu'elle est dirigée dans le même sens, et de plus qu'elle est égale à leur somme F + F′.

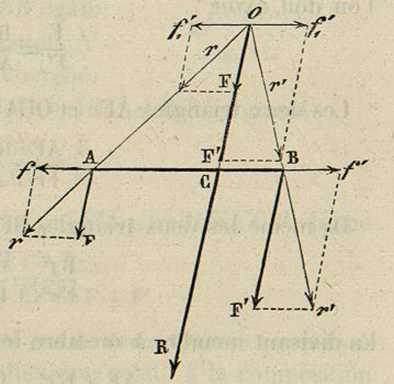

Fig. 40.

Appliquons aux points A et B deux forces f, f' de grandeur arbitraire, mais égales entre elles et directement opposées ; ces deux forces se détruisant mutuellement, ne changent pas l'état du système ; mais il est évident que si les 4 forces F, F′, f, f', situées dans un même plan, admettent une résultante, celle-ci sera également la résultante des deux forces données F et F′.

Or, les deux forces F et f appliquées au même point A, et