représentent les moments des forces R, P, Q, S... par rapport à l'axe XY, ce qui démontre la proposition énoncée.

Le moment d'une force par rapport à un axe se représente par la lettre M affectée d'un indice rappelant l'axe auquel on a rapporté les moments. Ainsi

$$M_xF$$

indique le moment de la force F par rapport à l'axe $x$. De même,

$$M_xR = \Sigma M_xF$$

signifie que le moment de la résultante R par rapport à l'axe $x$, est égal à la somme algébrique des moments des forces telles que F rapportées au même axe.

**52. Cas de l'équilibre d'un système quelconque de forces concourantes.** — Considérons le système de trois forces F, F′, F″ appliquées au point A (*fig.* 39), et soit O le centre des moments. L'une quelconque des forces, F par exemple, étant égale et directement opposée à la résultante des deux autres, nous avons :

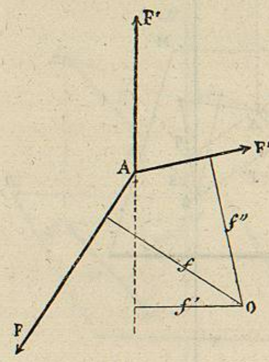

Fig. 39.

$$Ff = F'f' + F''f''$$

Il est évident que cette proposition s'étend au cas d'un nombre quelconque de forces, et si nous remarquons que la force F tend à faire tourner son bras de levier en sens contraire des deux autres, nous pouvons dire d'une manière générale que : *dans un système de forces concourantes en équilibre, la somme des moments des forces qui tendent à faire tourner leur bras de levier dans un sens, est égale à la somme des moments des forces qui tendent à le faire tourner en sens contraire ;* ou encore : *la somme algébrique des moments est égale à zéro.* Cela résulte, d'ailleurs, de ce que dans un système en équilibre, la résultante est nulle et son moment est égal à 0 ; on doit donc avoir :

$$\Sigma MF = 0$$

# CHAPITRE III

## COMPOSITION, DÉCOMPOSITION ET ÉQUILIBRE DES FORCES PARALLÈLES

### § 1. — COMPOSITION ET ÉQUILIBRE DES FORCES PARALLÈLES.

**53. Composition de deux forces parallèles et de même sens.** — THÉORÈME. — *La résultante de deux forces parallèles et de même sens appliquées à un même corps solide, est parallèle à la direction des composantes, de même sens qu'elles, égale à leur somme, et son point d'application divise la droite qui joint les points d'application des composantes en deux parties inversement proportionnelles à l'intensité de ces composantes.*

Soient F et F′ (*fig.* 40) deux forces parallèles et de même sens appliquées aux points A et B invariablement liés entre eux. Nous allons d'abord démontrer que la résultante R est parallèle à la direction de ces forces, qu'elle est dirigée dans le même sens, et de plus qu'elle est égale à leur somme F + F′.

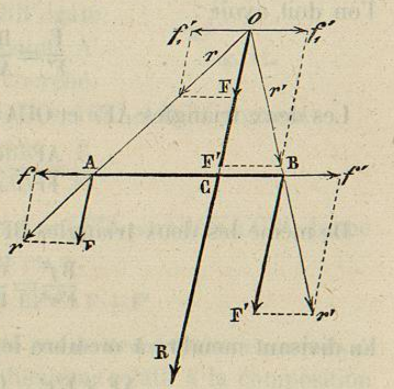

Fig. 40.

Appliquons aux points A et B deux forces $f, f'$ de grandeur arbitraire, mais égales entre elles et directement opposées ; ces deux forces se détruisant mutuellement, ne changent pas l'état du système ; mais il est évident que si les 4 forces F, F′, $f$, $f'$, situées dans un même plan, admettent une résultante, celle-ci sera également la résultante des deux forces données F et F′.

Or, les deux forces F et $f$ appliquées au même point A, et les deux autres F′ et $f'$ appliquées au même point B, admettent des résultantes $r$ et $r'$ qui, se trouvant dans un même plan et n'étant pas parallèles, viennent concourir en un certain point O, où nous pouvons les supposer appliquées. Maintenant, considérons séparément chacune de ces résultantes partielles et opérons leur décomposition suivant leurs composantes premières ; nous obtenons ainsi les deux forces $f_1$ et $f'_1$ dirigées en sens inverse, suivant la même droite et respectivement égales aux forces $f$ et $f'$ ; elles sont donc égales entre elles, et par suite elles se détruisent. Le système se trouve donc réduit à deux forces respectivement égales aux forces données F et F′ dirigées dans le même sens, et suivant la même droite OR parallèle à ces forces, et celles-ci se composent en une seule force R égale à leur somme $F+F'$. Donc, les deux forces données ont une résultante R parallèle à leur direction, et dont l'intensité est égale à leur somme.

Il reste à démontrer que le point C de la droite AB, qui peut être considéré comme le point d'application de la force R, divise cette droite en deux parties AC et BC inversement proportionnelles aux intensités des composantes, c'est-à-dire que l'on doit avoir :

$$\frac{F}{F'}=\frac{BC}{AC}$$

Les deux triangles AF$r$ et OCA étant semblables, donnent :

$$\frac{AF}{Fr}=\frac{OC}{AC} \tag{1}$$

De même les deux triangles BF′$r'$ et OCB donnent :

$$\frac{Bf'}{F'r'}=\frac{OC}{BC} \tag{2}$$

En divisant membre à membre les égalités (1) et (2), il vient :

$$\frac{AF\times F'r'}{Fr\times BF'}=\frac{OC\times BC}{AC\times OC}$$

Remarquant que $Fr=F'r'$ et supprimant les facteurs communs, on a :

$$\frac{AF}{BF'}=\frac{BC}{AC} \quad \text{ou} \quad \frac{F}{F'}=\frac{BC}{AC} \tag{3}$$

ce qui démontre la deuxième partie du théorème.



Si dans l'égalité (3) on ajoute les numérateurs aux dénominateurs, on aura :

$$\frac{F}{F+F'}=\frac{BC}{BC+AC}$$

Mais $F+F'=R$ et $BC+AC=AB$ ; par suite

$$\frac{F}{R}=\frac{BC}{AB} \tag{4}$$

Des égalités (2) et (4) on déduit :

$$\frac{F}{BC}=\frac{F'}{AC}=\frac{R}{AB} \tag{5}$$

ce qui montre que chacune des forces F, F′ et R est proportionnelle à la distance des points d'application des deux autres.

**54.** On peut déterminer le point d'application C de la résultante par une construction géométrique fort simple. Menons F′A′ (*fig.* 41) parallèle à AB jusqu'à sa rencontre au point A′ avec la direction de la force F ; prolongeons F′B d'une quantité BB′ égale à la force F et joignons les points A′ et B′ : le point C est le point cherché.

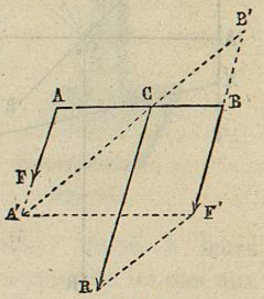


Fig. 41.

En effet, les triangles semblables ACA′ et BCB′ donnent :

$$\frac{BC}{AC}=\frac{BB'}{AA'}=\frac{F}{F'}$$

La longueur CR, obtenue en menant F′R parallèle à CB′, donne l'intensité de la résultante, car on a :

$$CR=B'B+BF'=F+F'$$

**55. Démonstration tirée du cas de deux forces concourantes.** — La démonstration du théorème relatif à la composition des forces parallèles peut se tirer directement du cas de deux forces concourantes. Considérons deux forces F et F′ (*fig.* 42) dont les directions concourent au point O, et d'un point quelconque C de la résultante R abaissons les perpendiculaires CA et CB′ sur les composantes ; en vertu du théorème des moments, nous aurons :

$$F\times CA=F'\times CB'$$

Supposons maintenant que la force F′ étant invariablement liée à son bras de levier, nous fassions tourner le système autour du point C; le point de concours deviendra successivement O′, O″.... et s'éloignera indéfiniment. La direction de la résultante passera constamment par C, car la relation ci-dessus des moments sera toujours satisfaite; mais son intensité, qui est donnée (**34**) par la relation :

$$R^2 = F^2 + F'^2 + 2FF' \cos(FF')$$

variera et s'approchera de plus en plus de la somme $F + F'$ à mesure que l'angle (FF′) diminuera. Donc à la limite, lorsque CB′ sera venu en CB sur le prolongement de AC, les forces seront parallèles; l'angle

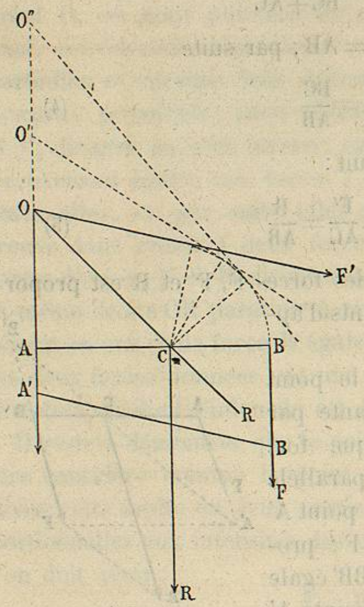


Fig. 42.

(FF′) étant nul, cos (FF′) est égal à l'unité, et par suite :

$$R^2 = F^2 + F'^2 + 2FF$$

d'où :

$$R = F + F'$$

et de plus, comme nous l'avons dit (**52**), le point C divise la droite AB en deux parties inversement proportionnelles à l'intensité des forces. Toute autre droite telle que A′B′, que l'on considérerait comme point d'application des forces, serait divisée par la résultante dans le même rapport, car on sait que les parallèles divisent en parties proportionnelles les droites qu'elles rencontrent, et on aurait :

$$\frac{AC}{CB} = \frac{A'C'}{C'B'} = \frac{F'}{F}$$

**56. Démonstration expérimentale.** — Ce théorème se démontre aussi expérimentalement à l'aide d'un appareil très simple, dû à Delaunay, et appelé *levier arithmétique*.



Cet appareil se compose d'une barre prismatique CD en bois (*fig.* 43), disposée verticalement, maintenue à sa partie inférieure dans un bâti également en bois, et munie à sa partie supérieure d'une chape. Une autre barre AB, portant en son milieu C un couteau triangulaire en acier, dont les deux extrémités reposent sur les branches de la chape, peut osciller librement autour de l'arête inférieure de ce couteau. La face antérieure de la pièce AB porte, de chaque côté de l'axe de suspension, 10 divisions égales, et sur la face inférieure on a placé des anneaux correspondants aux divers points de division. Enfin, des poids égaux, de forme cylindrique, munis à leurs deux bases de pitons permettant de les accrocher les uns aux autres et de les suspendre à la barre AB, servent aux expériences que nous allons décrire et qui démontrent le théorème. Nous supposerons les poids égaux chacun à 50 grammes.

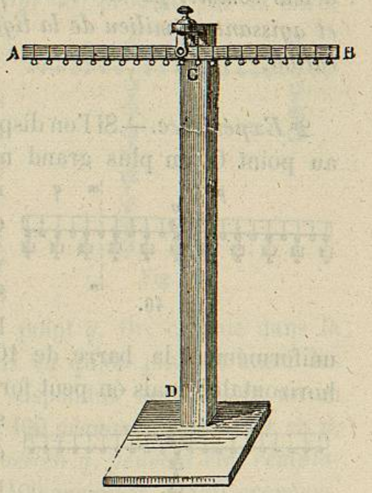


Fig. 43.

1^re^ *Expérience.* — La barre AB occupant une position horizontale lorsqu'elle n'est soumise à aucun poids, suspendons en deux points également distincts du point O (*fig.* 44), deux

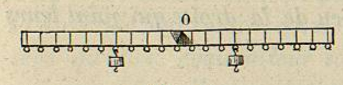


Fig. 44.

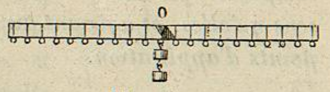


Fig. 45.

poids cylindriques; l'horizontalité de la barre subsiste encore; en suspendant ces mêmes poids au point O, situé sur l'axe de suspension (*fig.* 45), on voit que l'équilibre existe toujours, et on peut constater que la pression exercée par le couteau sur la chape est la même dans les deux cas. Or, les poids pouvant être assimilés à des forces verticales agissant à leur point d'application, on en conclut que : *Deux forces parallèles égales et de même sens peuvent être remplacées par une seule force égale à leur somme, parallèle aux premières, de même sens qu'elles et agissant au milieu de la ligne qui joint leurs points d'application.*

2ᵉ *Expérience.* — Si l'on dispose symétriquement, par rapport au point O, un plus grand nombre de poids, on en déduira une conclusion analogue. En effet, suspendons au point O (*fig.* 46) un des poids de 50 grammes, et de chaque côté, à partir de ce point, chargeons uniformément la barre de 10 poids ; celle-ci se maintiendra horizontale ; mais on peut former 5 groupes de poids, composés chacun de 2 poids, pouvant être transportés, d'après la première expérience, au milieu O, sans changer d'équilibre. On obtient ainsi (*fig.* 47) 11 poids égaux, accrochés les uns aux autres, suspendus au point O, qui ne détruisent pas l'horizontalité de la barre AB et qui déterminent, sur la chape, la même pression que s'ils étaient répartis uniformément le long de AB. Comme précédemment on peut en conclure que : *Les onze forces égales, parallèles et de même sens, peuvent être remplacées par une force unique égale à leur somme, de même sens qu'elles, et agissant au milieu de la droite qui joint leurs points d'application.*

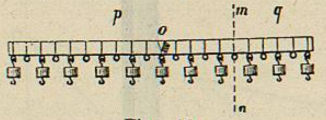

Fig. 46.

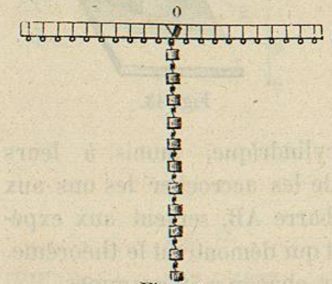

Fig. 47.

3ᵉ *Expérience.* — Divisions, par la droite *mn* (*fig.* 46), les 11 poids uniformément suspendus à la barre AB, en deux groupes composés, l'un de 8 poids et l'autre de 3 ; le groupe de gauche, composé de 8 poids, peut être remplacé par 8 poids accrochés les uns aux autres et suspendus au point $p$, milieu de la ligne qui joint leurs points d'application. Il en est de même du groupe de droite, composé de 3 poids, c'est-à-



dire que ces 3 poids peuvent être suspendus les uns aux autres au point $q$, milieu de la ligne qui joint leurs points d'application. Cette nouvelle disposition (*fig.* 48) produit, sur la barre AB, les mêmes effets que la précédente.

Il résulte de là que les 11 poids répartis uniformément sur la longueur de la barre, peuvent être remplacés par une force égale à $8 \times 50$ ou 400 grammes, appliqués au point $p$, et par une autre force égale à $3 \times 50$ ou 150 grammes, appliquée au point $q$. Or, comme dans la deuxième expérience nous avons vu qu'on pouvait aussi les remplacer par 11 poids égaux suspendus au point O, on en conclut que : *La force* $8 \times 50 = 400$ *grammes, appliquée en* $p$, *et la force* $3 \times 50 = 150$, *appliquée en* $q$, *peuvent être remplacées par une seule force égale à* 400 *grammes* + 150 *grammes, appliquée en* O.

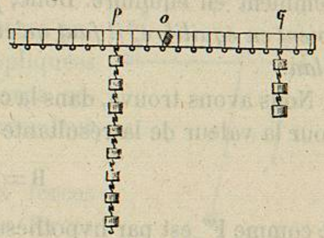

Fig. 48.

En remarquant que le point $p$ est la troisième division à partir de l'axe de rotation, et que le point $q$ est la huitième division à partir de ce point, on voit que : *Le point* O *divise la distance des points d'application des deux forces en deux parties inversement proportionnelles à leur intensité.*

Donc, en résumant cette troisième expérience, on trouve bien, comme dans le théorème de la composition des forces parallèles que : *La résultante de deux forces parallèles et de même sens, est parallèle à la direction des composantes, de même sens qu'elles, égale à leur somme, et son point d'application divise la droite qui joint les points d'application des composantes en deux parties inversement proportionnelles à l'intensité de ces composantes.*

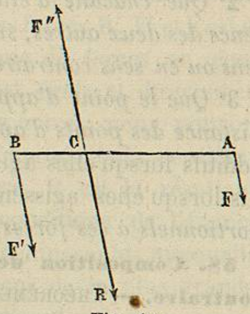

Fig. 49.

**57. Équilibre de trois forces parallèles.** — Pour déterminer les conditions d'équilibre de trois forces parallèles, considérons le système des deux forces parallèles, F et F′ (*fig.* 49) et de leur