résultante R. Si au point d'application C de la résultante R nous appliquons une force F″ égale et directement opposée à cette résultante, le système des trois forces F,F′,F″ sera évidemment en équilibre. Donc, *pour que trois forces parallèles soient en équilibre, il faut qu'elles soient situées dans un même plan.*

Nous avons trouvé, dans la composition des forces parallèles, pour la valeur de la résultante :

$$R = F + F'$$

et comme F″ est par hypothèse égale à R, il s'ensuit que

$$F'' = F + F'$$

d'où l'on tire :

$$F = F'' - F' \text{ et } F' = F - F''$$

Par la relation (5) trouvée précédemment (**53**) on a :

$$\frac{F}{BC} = \frac{F'}{AC} = \frac{R}{AB} = \frac{F''}{AB}$$

d'où l'on déduit :

$$\frac{BC}{AC} = \frac{F}{F'};\quad \frac{BC}{AB} = \frac{F}{F''},\quad \frac{AC}{AB} = \frac{F'}{F''}.$$

Donc, en résumé, pour que trois forces parallèles soient en équilibre, il faut et il suffit :

1° *Qu'elles soient dans un même plan;*

2° *Que chacune d'elles soit égale à la somme ou à la différence des deux autres, suivant qu'elles agissent dans le même sens ou en sens contraire;*

3° *Que le point d'application de chacune d'elles partage la distance des points d'application des deux autres en segments* additifs lorsqu'elles agissent dans le même sens, et soustractifs lorsqu'elles agissent en sens contraire) *inversement proportionnels à ces forces.*

58. Composition de deux forces parallèles et de sens contraire. — THÉORÈME. — *La résultante de deux forces parallèles et de sens contraire appliquées en deux points invariablement liés entre eux, est égale à la différence des composantes, parallèle à leur direction, agit dans le sens de la plus grande, et le point d'application de cette résultante rencontre*

le prolongement de la droite qui joint les points d'application des composantes en un point tel que ses distances à ces points sont inversement proportionnelles à l'intensité de ces forces.

Soient F et F′ (*fig.* 50) deux forces parallèles et de sens contraire appliquées aux points A et B d'un même corps solide, et proposons-nous de trouver leur résultante.

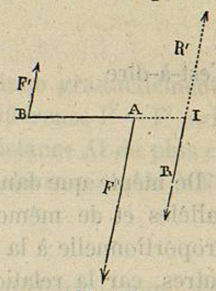

Fig. 50.

La composition de ces deux forces peut se déduire de celle de deux forces parallèles et de même sens. En effet, prenons sur le prolongement de la droite AB et du côté de la plus grande force, un point I telque l'on ait :

$$\frac{AI}{AB} = \frac{F'}{F - F'} \qquad (1)$$

et appliquons en ce point deux forces R et R′ égales chacune à la différence F—F′, directement opposées et parallèles aux forces données : ces deux forces, se détruisant, ne changent rien au système.

D'après la relation (1), on voit que les forces R′ et F′ sont inversement proportionnelles aux distances AI et AB de leur point d'application à celui de la force F, et puisque l'on a par hypothèse $R' = F - F'$ ou $F = R + F'$, on en conclut que la force F est égale et directement opposée à la résultante des forces R′ et F′. Donc, le système des trois forces R′, F′ et F est en équilibre, et, comme dans tout système de forces en équilibre l'une quelconque d'entre elles est égale et directement opposée à la résultante de toutes les autres, nous pouvons dire que R′ est égale et directement opposée à la résultante des forces F et F′, et par suite la force R est la résultante cherchée. Cette force répond aux conditions de l'énoncé, car elle est égale à la différence des composantes auxquelles elle est parallèle, et elle agit dans le sens de la plus grande ; de plus, les distances de son point d'application aux points d'application des composantes, sont inversement proportionnelles à ces forces.

En effet, de la relation (1) qui nous a servi à déterminer le point I, on tire, en ajoutant les numérateurs aux dénominateurs :

$$\frac{AI}{AB+AI}=\frac{F'}{F-F'+F'}$$

c'est-à-dire

$$\frac{AI}{IB}=\frac{F'}{F}$$

De même que dans le cas de la composition des forces parallèles et de même sens, chacune des forces F, F' et R est proportionnelle à la distance des points d'application des deux autres, car la relation ci-dessus peut s'écrire :

$$\frac{F}{IB}=\frac{F'}{AI}=\frac{F-F'}{BI-AI}=\frac{R}{AB}$$

59. On peut encore trouver géométriquement la position du point I. Pour cela, menons FB' parallèle à AB (*fig.* 51) jusqu'à sa rencontre en B' avec la direction de la force F' ; prenons sur cette direction une longueur A'B' égale à F' et joignons le point A' au point A. Si par le point B' on mène la parallèle B'I à AA' jusqu'à sa rencontre avec AB prolongée, le point I sera le point cherché. En effet, dans le triangle BIB' on a :

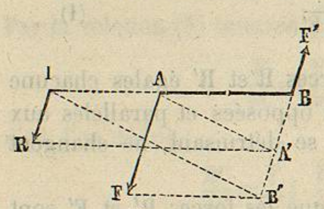

Fig. 51.

$$\frac{AI}{BI}=\frac{A'B'}{BB'}=\frac{F'}{F}$$

Pour avoir la résultante en grandeur et en direction, il suffit de mener IR et A'R respectivement parallèles à AF et AB, car on a :

$$IR=BA'=BB'-A'B'=F-F'$$

60. Composition de deux forces parallèles égales et de sens contraire. — COUPLE. — La composition de deux forces parallèles et de sens contraire présente un cas particulier très remarquable : c'est celui où les deux forces sont égales.

Reprenons la relation précédente (1)

$$\frac{AI}{AB}=\frac{F'}{F-F'}$$

et tirons la valeur de AI ; il vient :

$$AI=AB\times\frac{F'}{F-F'}$$

Supposons maintenant que la force F diminue graduellement, tandis que la force F' reste constante. La différence $F-F'=R$ deviendra de plus en plus petite, et la distance AI de plus en plus grande. A la limite, lorsque F sera devenue égale à F', on aura :

$$R=0 \text{ et } AI=\infty$$

La résultante devient nulle et son point d'application s'éloigne à l'infini, ce que l'on exprime en disant que *deux forces égales, parallèles et de sens contraire, n'ont pas de résultante.*

Ce résultat était facile à prévoir, car tout étant symétrique de part et d'autre, il n'y a pas de raison pour que la résultante, si elle existe, agisse dans le sens de F plutôt que dans celui de F', ou soit située du côté de A plutôt que du côté de B.

Ce système n'est évidemment pas en équilibre, car si on fixe le point A, ce qui détruit la force F, il faudrait, pour que l'équilibre existât, que la direction de la force F' passât par le point fixe.

Poinsot, qui le premier s'est occupé des propriétés remarquables de ce système de forces, lui a donné le nom de *couple.*

On appelle *bras de levier* d'un couple la perpendiculaire *ab* (*fig.* 52) commune aux deux forces.

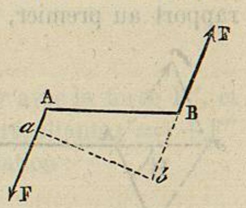

Fig. 52.

Le point d'application d'une force pouvant toujours être transporté en un point quelconque de sa direction, on peut considérer les forces F et F' comme appliquées aux extrémités de leur bras de levier.

61. Équilibre d'un couple. — On voit, d'après ce qui précède, qu'un couple ne peut être équilibré par une force unique ; mais il peut être équilibré d'une infinité de manières par un second couple parallèle au premier et situé dans son plan.

Ainsi, le couple FF (*fig.* 53) peut être équilibré par le couple *ff ;* pour cela, il suffit que la résultante R des forces F et *f* agissant de bas en haut, et la résultante R', égale à la première, des forces F et f agissant de haut en bas, passent par le même point C.

La seule inconnue qu'il s'agit de déterminer, c'est la longueur ab. Or, en composant deux à deux les forces de même sens, on a :

$$\frac{Cb}{AC}=\frac{F}{f} \qquad \frac{Ca}{BC}=\frac{F}{f}$$

donc : $$\frac{Cb}{AC}=\frac{Ca}{BC} \quad \text{ou encore :} \quad \frac{Cb}{Ca}=\frac{AC}{BC}$$

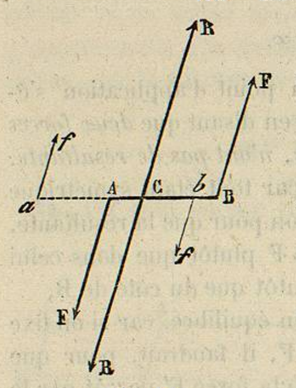

Fig. 53.

Ajoutant les dénominateurs aux numérateurs, il vient :

$$\frac{Cb+Ca}{Ca}=\frac{AC+BC}{BC}$$

ou, ce qui est la même chose :

$$\frac{ab}{F}=\frac{AB}{f}$$

d'où l'on tire :

$$ab=AB\times\frac{F}{f}$$

c'est-à-dire que la longueur ab, du second couple, est constante, quelle que soit sa position par rapport au premier, et elle varie en raison inverse de l'intensité des forces égales f qui sont appliquées à ses extrémités.

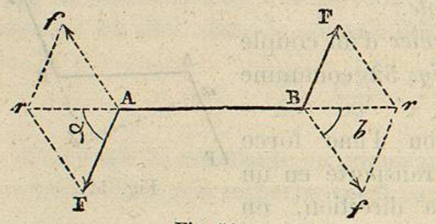

Fig. 54.

62. On peut encore équilibrer un couple FF en appliquant, aux extrémités A et B (*fig.* 54), un second couple quelconque ff, à la seule condition que les résultantes égales R des groupes de forces appliquées en A et B soient dirigées suivant le prolongement de AB, auquel cas correspond l'équilibre.

Il s'agit donc de déterminer l'angle b que les forces f du couple choisi font avec la direction Br. Le triangle Bfr nous donne la relation :

$$\frac{fr}{\sin fBr}=\frac{Bf}{\sin Brf}$$

Mais $fr=F$; $Bf=f$ et $\sin Brf=\sin FBr=\sin\alpha$.

En remplaçant, il vient :

$$\frac{F}{\sin b}=\frac{f}{\sin\alpha}$$

d'où l'on tire :

$$\sin b=\sin\alpha\,\frac{F}{f}$$

63. Composition d'un nombre quelconque de forces parallèles. — En appliquant les théorèmes qui précèdent, il est facile de trouver la résultante d'un système quelconque de forces parallèles. Supposons que toutes les forces soient de même sens, et soient F, F′, F″... (*fig.* 55) des forces parallèles appliquées aux points a, b, c... d'un corps solide A. Pour trouver leur résultante, on composera d'abord les forces F et F′ ; on obtiendra ainsi une première résultante partielle $r=F+F'$ dont le point d'application sera donné par la relation :

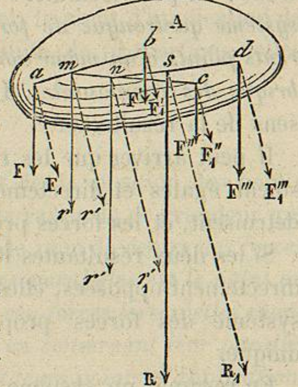
Fig. 55.

$$\frac{mb}{ma}=\frac{F}{F'}$$

On composera ensuite cette résultante r avec la force F″, et le point d'application n de cette nouvelle résultante $r'=r+F''$ ou $r'=F+F'+F''$ s'obtiendra par la relation :

$$\frac{nc}{nm}=\frac{r}{F''}=\frac{F+F''}{F''}$$

Enfin, en composant r' avec F‴, on aura la résultante finale du système, qui sera exprimée par les relations :

$$R=r'+F'''=F+F'+F''+F'''$$

et $$\frac{sd}{sn}=\frac{r'}{F'''}=\frac{F+F'+F''}{F'''}$$

Lorsque les diverses forces parallèles qui composent le système ne sont pas de même sens, on les divise en deux groupes : le premier, formé des forces qui agissent dans un sens, et le second, des forces qui agissent en sens contraire. On compose alors chaque groupe séparément, et on réduit le système à deux forces R_1 et R_2 parallèles et de sens contraire. Si ces deux résultantes partielles sont inégales, elles pourront se composer en une seule $R = R_1 - R_2$ agissant dans le sens de la plus grande.

En regardant comme positives les forces qui agissent dans un sens, et comme négatives celles qui agissent en sens contraire, on peut formuler l'énoncé suivant : *La résultante d'un système quelconque de forces parallèles appliquées aux différents points d'un même corps solide est égale à la somme algébrique des composantes.* Le signe de cette somme indique le sens de la résultante.

Il peut arriver que les résultantes R_1 et R_2 des deux groupes soient égales et directement opposées ; dans ce cas, elles se détruisent, et les forces proposées sont en équilibre.

Si les deux résultantes R_1 et R_2 sont égales, mais ne sont pas directement opposées, elles forment un couple, et par suite le système des forces proposées n'admet pas de résultante unique.

En résumé, un système quelconque de forces parallèles dirigées dans le même sens admet toujours une résultante unique. Un système de forces parallèles, dont les unes sont dirigées dans un sens et les autres en sens contraire, peut présenter trois cas : 1° avoir une résultante ; 2° être en équilibre, et 3° se réduire à un couple.

64. Centre des forces parallèles. — Si l'on place successivement un système quelconque de forces parallèles dans différentes positions, de telle sorte qu'elles restent toujours parallèles entre elles en conservant leur grandeur et leurs points d'application, le point d'application de la résultante sera le même pour toutes ces différentes positions.

En effet, reprenons le système indiqué par la figure précédente, et soient F_1, F'_1, F''_1, F'''_1 les nouvelles positions des forces F, F', F'', F''' ; la résultante r_1 des forces F_1, F'_1 sera encore égale à leur somme, et son point d'application sera le point m, puisqu'il est donné par la relation :

$$\frac{mb}{ma} = \frac{F}{F'} = \frac{F_1}{F'_1}$$

De même, n sera encore le point d'application de la résultante r'_1 des forces r et F'' dans leur nouvelle position, et ainsi de suite pour toutes les autres résultantes partielles du système. Donc, la nouvelle résultante définitive R_1 du système aura le même point d'application s que la première résultante R.

Il est facile de voir que le point d'application de la résultante est encore invariable de position lorsqu'on altère l'intensité des forces, pourvu qu'elles conservent toujours entre elles le même rapport ; en effet, le point d'application de la résultante est donné par une suite de proportions telles que :

$$\frac{mb}{ma} = \frac{F}{F'}$$

qui ne dépendent évidemment que de la position des points d'application des composantes et des rapports de grandeur qui existent entre elles. Ce point a reçu le nom de *centre des forces parallèles*. Donc, *le centre des forces parallèles est le point où passe constamment la résultante de ces forces lorsqu'elles changent d'intensité et de direction, tout en conservant leur parallélisme, leurs rapports de grandeur et leurs points d'application.*

§ 2. — DÉCOMPOSITION DES FORCES PARALLÈLES.

65. Décomposition d'une force en deux autres forces parallèles. — De même que nous avons décomposé une force en plusieurs autres forces appliquées au même point, nous pouvons nous proposer de décomposer une force en plusieurs autres forces parallèles appliquées à des points différents d'un même corps solide.

Proposons-nous, en premier lieu, de décomposer une force donnée en deux autres forces parallèles appliquées en deux points déterminés. La condition nécessaire est que les deux points se trouvent dans un même plan avec la force, car nous savons que la résultante de deux forces parallèles est située dans le plan de ses composantes.

Deux cas peuvent se présenter dans la résolution de ce problème :

1° *Les deux points donnés sont situés de part et d'autre de la*