second, des forces qui agissent en sens contraire. On compose alors chaque groupe séparément, et on réduit le système à deux forces R_1 et R_2 parallèles et de sens contraire. Si ces deux résultantes partielles sont inégales, elles pourront se composer en une seule $R = R_1 - R_2$ agissant dans le sens de la plus grande.

En regardant comme positives les forces qui agissent dans un sens, et comme négatives celles qui agissent en sens contraire, on peut formuler l'énoncé suivant : *La résultante d'un système quelconque de forces parallèles appliquées aux différents points d'un même corps solide est égale à la somme algébrique des composantes.* Le signe de cette somme indique le sens de la résultante.

Il peut arriver que les résultantes R_1 et R_2 des deux groupes soient égales et directement opposées ; dans ce cas, elles se détruisent, et les forces proposées sont en équilibre.

Si les deux résultantes R_1 et R_2 sont égales, mais ne sont pas directement opposées, elles forment un couple, et par suite le système des forces proposées n'admet pas de résultante unique.

En résumé, un système quelconque de forces parallèles dirigées dans le même sens admet toujours une résultante unique. Un système de forces parallèles, dont les unes sont dirigées dans un sens et les autres en sens contraire, peut présenter trois cas : 1° avoir une résultante ; 2° être en équilibre, et 3° se réduire à un couple.

64. Centre des forces parallèles. — Si l'on place successivement un système quelconque de forces parallèles dans différentes positions, de telle sorte qu'elles restent toujours parallèles entre elles en conservant leur grandeur et leurs points d'application, le point d'application de la résultante sera le même pour toutes ces différentes positions.

En effet, reprenons le système indiqué par la figure précédente, et soient F_1, F'_1, F''_1, F'''_1 les nouvelles positions des forces F, F', F'', F''' ; la résultante r_1 des forces F_1, F'_1 sera encore égale à leur somme, et son point d'application sera le point m, puisqu'il est donné par la relation :

$$\frac{mb}{ma} = \frac{F}{F'} = \frac{F_1}{F'_1}$$

De même, n sera encore le point d'application de la résultante r'_1 des forces r et F'' dans leur nouvelle position, et ainsi de suite pour toutes les autres résultantes partielles du système. Donc, la nouvelle résultante définitive R_1 du système aura le même point d'application s que la première résultante R.

Il est facile de voir que le point d'application de la résultante est encore invariable de position lorsqu'on altère l'intensité des forces, pourvu qu'elles conservent toujours entre elles le même rapport ; en effet, le point d'application de la résultante est donné par une suite de proportions telles que :

$$\frac{mb}{ma} = \frac{F}{F'}$$

qui ne dépendent évidemment que de la position des points d'application des composantes et des rapports de grandeur qui existent entre elles. Ce point a reçu le nom de *centre des forces parallèles*. Donc, *le centre des forces parallèles est le point où passe constamment la résultante de ces forces lorsqu'elles changent d'intensité et de direction, tout en conservant leur parallélisme, leurs rapports de grandeur et leurs points d'application.*

§ 2. — DÉCOMPOSITION DES FORCES PARALLÈLES.

65. Décomposition d'une force en deux autres forces parallèles. — De même que nous avons décomposé une force en plusieurs autres forces appliquées au même point, nous pouvons nous proposer de décomposer une force en plusieurs autres forces parallèles appliquées à des points différents d'un même corps solide.

Proposons-nous, en premier lieu, de décomposer une force donnée en deux autres forces parallèles appliquées en deux points déterminés. La condition nécessaire est que les deux points se trouvent dans un même plan avec la force, car nous savons que la résultante de deux forces parallèles est située dans le plan de ses composantes.

Deux cas peuvent se présenter dans la résolution de ce problème :

1° *Les deux points donnés sont situés de part et d'autre de la* *force qu'on se propose de décomposer.* — Soient R la force donnée (*fig.* 56), A et B les points d'application des composantes qu'il s'agit de déterminer. Joignons les points A et B et appliquons la force R au point C, où sa direction rencontre la droite AB. Le point d'application de la résultante devant être situé entre les points d'application des composantes, celles-ci seront de même sens et l'on aura :

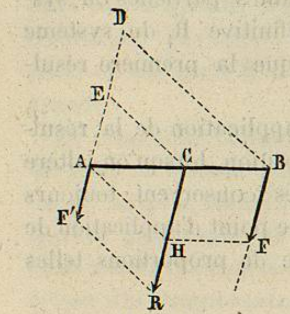
Fig. 56.

$$F+F'=R$$

et
$$\frac{F}{AC}=\frac{F'}{BC}=\frac{R}{AB}$$

d'où l'on tire :

$$F=R\times\frac{AC}{AB} \quad \text{et} \quad F'=R\times\frac{BC}{AB}$$

On peut construire graphiquement ces deux composantes; pour cela, menons par le point A la droite AD égale et parallèle à la force R, joignons les points D et B, et par le point C menons la droite CE parallèle à BD. Les longueurs AE et ED représentent les composantes F et F'; en effet, dans le triangle ADB, on a :

$$\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$$

Mais $AE+ED=AD=R$

et par suite : $AE=F$ et $ED=F'$

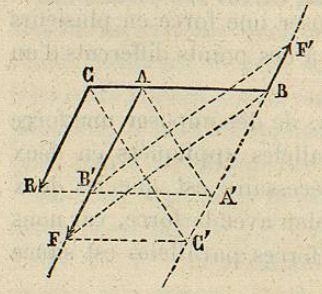
Fig. 57.

Pour avoir ces composantes appliquées aux points A et B, menons par le point A la droite AH parallèle à CE, et par les points H et R les droites FH et F'R respectivement parallèles à BC et à AH.

2° *Les deux points donnés sont situés d'un même côté de la force* R. — Dans ce cas, les composantes seront de sens contraire. Appliquons la force R au point C (*fig.* 57), où sa direction rencontre la droite AB prolongée; les deux composantes F et F' seront données par les équations suivantes :

$$F-F'=R$$

$$\frac{F}{BC}=\frac{F'}{AC}=\frac{R}{AB}$$

d'où l'on tire : $F=R\times\frac{BC}{AB}$ et $F'=R\times\frac{AC}{AB}$

Pour construire graphiquement ces deux composantes, menons, par l'extrémité R de la force donnée, la droite A'R égale et parallèle à CB ; joignons le point A', ainsi obtenu, au point A, et par le point C menons CC' parallèle à AA'; les longueurs BC' et A'C' représentent les composantes cherchées. En effet, dans le triangle CBC', on a :

$$\frac{BC'}{BC}=\frac{A'C'}{AC}$$

et $BC'-A'C'=A'B=R$

par conséquent, $BC'=F$ et $A'C'=F'$

Pour avoir ces composantes appliquées aux points A et B, menons C'F parallèle à AB, joignons le point F au point B, et par le point B' menons B'F' parallèle à BF.

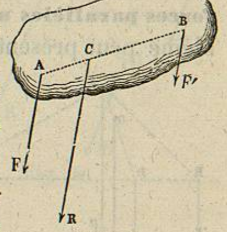
Fig. 58.

REMARQUE. — Au lieu de se donner les points d'application des composantes, comme nous l'avons supposé dans les deux cas qui précèdent, on peut se donner l'une d'elles et son point d'application.

Soient R (*fig.* 58) la force que nous voulons décomposer, F la composante donnée, A son point d'application, et supposons R>F. L'autre composante F' sera de même sens que la première et elle aura pour valeur :

$$F'=R-F$$

Son point d'application B, situé à droite de la force R, se déterminera par la relation :

$$\frac{BC}{F}=\frac{AC}{F'}=\frac{AC}{R-F}$$

d'où l'on tire : $BC=AC\times\frac{F}{F'}=AC\times\frac{F}{R-F}$

66. Décomposition d'une force en trois autres forces parallèles situées dans le même plan. — Supposons que l'on veuille décomposer la force R (*fig.* 59) en trois autres appliquées aux points A, B et D. Ce problème est indéterminé ; en effet, prenons arbitrairement un point c situé entre A et B, et décomposons la force donnée R en deux autres F et r appliquées en D et c ; décomposons pareillement la force r en deux autres F′ et F″ appliquées en B et A. Le système des trois forces F, F′ et F″ remplace bien la résultante R ; mais l'intensité respective des composantes dépend de la position du point c sur AB. Autant de points on considérerait, autant on aurait de systèmes qui tous remplaceraient la force R ; le problème est donc indéterminé.

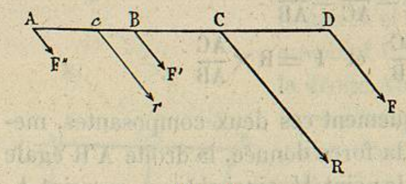

Fig. 59.

Remarque. — Le point c pourrait être choisi entre B et C ou entre C et D ; dans chacun de ces cas l'une des composantes serait dirigée en sens contraire des autres.

67. Décomposition d'une force donnée en trois autres forces parallèles non situées dans le même plan. — Ce problème peut présenter deux cas différents :

1° *La direction de la force donnée passe à l'intérieur du triangle formé par les points d'application.* — Les composantes sont de même sens. Soient A, B, C (*fig.* 60) les points où doivent être appliquées les composantes, R la force donnée, et O le point où la direction de cette force perce le plan ABC. Menons la droite AO prolongée jusqu'au point D, où elle rencontre la droite BC. Nous pouvons décomposer la force R en deux autres, l'une F appliquée au point A, et l'autre S appliquée au point D. Nous aurons :

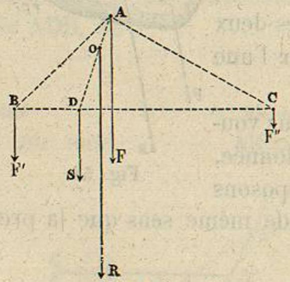

Fig. 60.

$$F+S=R$$

et
$$\frac{F}{DO}=\frac{S}{AO}=\frac{R}{AD}$$

d'où l'on tire : $F=R\times\frac{OD}{AD}$ et $S=R\times\frac{AO}{AD}$

La force S peut à son tour être décomposée en deux autres F′ et F″ appliquées aux points B et C ; ces composantes seront données par les relations :

$$F'+F''=S$$
$$\frac{F'}{CD}=\frac{F''}{BD}=\frac{S}{BC}$$

d'où : $F'=S\times\frac{CD}{BC}$ et $F''=S\times\frac{BD}{BC}$

La force R se trouve ainsi décomposée en trois autres F, F′, F″ appliquées aux points donnés A, B, C, et l'on a :

$$R=F+F'+F''$$

2° *La direction de la force* R *passe à l'extérieur du triangle* ABC. — Dans ce cas, l'une des composantes est de sens opposé aux deux autres. Soit O (*fig.* 61) le point où la direction de la force donnée rencontre le plan déterminé par les trois points d'application A, B, C des composantes inconnues. Joignons OB ; la force R peut se décomposer en deux autres forces parallèles et de sens contraire appliquées aux points B et D, de façon que l'on ait :

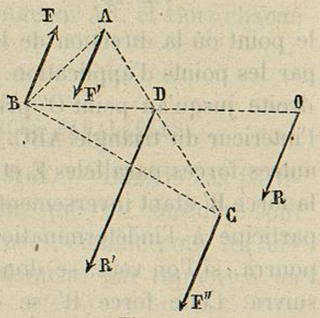

Fig. 61.

$$R=R'-F$$
$$\frac{R'}{OB}=\frac{F}{OD}=\frac{R}{BD}$$

d'où l'on tire : $R'=R\times\frac{OB}{BD}$ et $F=R\times\frac{OD}{BD}$

Les relations

$$R'=F'+F''$$

et
$$\frac{F'}{CD}=\frac{F''}{AD}=\frac{R'}{AC}$$

nous permettent de décomposer la force R′ en deux autres forces F′ et F″ qui lui sont parallèles, de même sens et appliquées aux points A et C. La force R se trouve par suite décomposée en trois composantes parallèles appliquées aux points A, B, C et l'on a :

$$R = F' + F'' - F$$

68. Décomposition d'une force en plus de trois autres composantes parallèles. — Lorsqu'on se propose de décomposer une force donnée en plus de trois autres composantes parallèles, le problème devient indéterminé. En effet, supposons qu'on veuille décomposer la force R (*fig.* 62) en quatre composantes parallèles appliquées aux points A, B, C et D. Soit O le point où la direction de la force R perce le plan déterminé par les points d'application. Joignons OD et prolongeons cette droite jusqu'au point O′ pris arbitrairement sur cette droite à l'intérieur du triangle ABC. Décomposons la force R en deux autres forces parallèles F et R′ appliquées aux points D et O′; la force R′ étant inversement proportionnelle à la distance OO′, participe à l'indétermination de son point d'application. On pourra, si l'on veut, se donner la force R′ et le point O′ s'ensuivra. Cette force R′ se décompose, à son tour, en trois forces parallèles et de même sens appliquées aux points A, B et C, qui sont, comme nous venons de le voir, parfaitement déterminées.

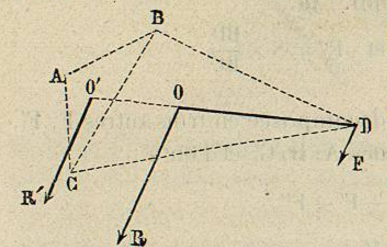

Fig. 62.

En général, lorsqu'on veut décomposer une force en plus de trois autres forces parallèles, on peut se donner, d'une infinité de manières, toutes les composantes moins trois.

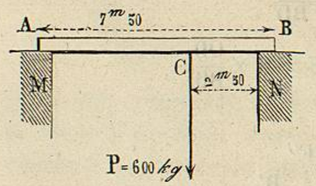

Fig. 63.

69. Application. — *Répartition sur les murs d'appui de la charge supportée par une poutre en un point de sa longueur.* Une poutre AB (*fig.* 63) de 7m,50 de longueur, repose par ses extrémités sur les murs M et N; cette poutre est chargée au point C, distant du point B de 2m,50, d'un poids P = 600 kilogr.

On demande, en faisant abstraction du poids de la pièce, quelle est la charge supportée par chacun des murs.

Le problème revient à trouver les deux composantes parallèles de la force P, appliquées aux points A et B. En appelant F et F′ ces composantes, on aura :

$$F = P \times \frac{CB}{AB} = 600 \times \frac{2,5}{7,5} = 200 \text{ kilogr.}$$

$$F' = P \times \frac{AC}{AB} - 600 \times \frac{5}{7,5} = 400 \text{ kilogr.}$$

Ainsi, le mur N supporte une charge de 400 kilogr. et le mur M une charge de 200 kilogrammes.

Si on voulait tenir compte du poids propre de la poutre, on pourrait, comme nous le verrons plus loin, considérer ce poids comme appliqué au milieu de la longueur AB, et alors chacun des murs en supporterait la moitié.

§ 3. — MOMENTS DES FORCES PARALLÈLES.

70. Moment par rapport à un point. — Dans le cas particulier où toutes les forces du système que l'on considère sont contenues dans un même plan, on peut, comme pour les forces concourantes, prendre leurs moments par rapport à un point quelconque de leur plan.

Soit OA = *f* (*fig.* 64) la distance de la force F au point O; son moment sera, en valeur absolue, égal à F*f*. Mais il est évident que ce moment change de signe suivant que la force est dirigée dans un sens ou dans l'autre, et suivant que le point O se trouve d'un côté ou de l'autre du point A. Si donc on convient d'affecter les forces du signe + ou du signe — suivant qu'elles agissent dans un sens ou dans l'autre, et de considérer comme positives ou comme négatives leurs distances au point O suivant que ces distances sont comptées à droite ou à gauche de ce point, les moments seront positifs lorsque les deux facteurs seront de même signe et négatifs lorsqu'ils seront de signe

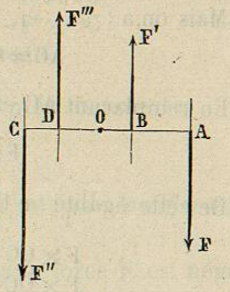

Fig. 64.