posée en trois composantes parallèles appliquées aux points A, B, C et l'on a :

$$R = F' + F'' - F$$

68. Décomposition d'une force en plus de trois autres composantes parallèles. — Lorsqu'on se propose de décomposer une force donnée en plus de trois autres composantes parallèles, le problème devient indéterminé. En effet, supposons qu'on veuille décomposer la force R (*fig.* 62) en quatre composantes parallèles appliquées aux points A, B, C et D. Soit O le point où la direction de la force R perce le plan déterminé par les points d'application. Joignons OD et prolongeons cette droite jusqu'au point O′ pris arbitrairement sur cette droite à l'intérieur du triangle ABC. Décomposons la force R en deux autres forces parallèles F et R′ appliquées aux points D et O′; la force R′ étant inversement proportionnelle à la distance OO′, participe à l'indétermination de son point d'application. On pourra, si l'on veut, se donner la force R′ et le point O′ s'ensuivra. Cette force R′ se décompose, à son tour, en trois forces parallèles et de même sens appliquées aux points A, B et C, qui sont, comme nous venons de le voir, parfaitement déterminées.

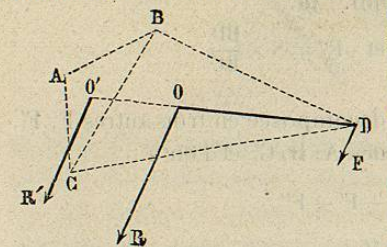

Fig. 62.

En général, lorsqu'on veut décomposer une force en plus de trois autres forces parallèles, on peut se donner, d'une infinité de manières, toutes les composantes moins trois.

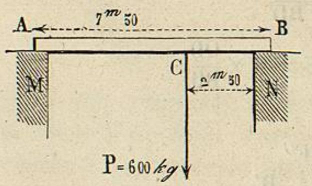

Fig. 63.

69. Application. — *Répartition sur les murs d'appui de la charge supportée par une poutre en un point de sa longueur.* Une poutre AB (*fig.* 63) de $7^m,50$ de longueur, repose par ses extrémités sur les murs M et N; cette poutre est chargée au point C, distant du point B de $2^m,50$, d'un poids $P = 600$ kilogr.

On demande, en faisant abstraction du poids de la pièce, quelle est la charge supportée par chacun des murs.

Le problème revient à trouver les deux composantes parallèles de la force P, appliquées aux points A et B. En appelant F et F′ ces composantes, on aura :

$$F = P \times \frac{CB}{AB} = 600 \times \frac{2,5}{7,5} = 200 \text{ kilogr.}$$

$$F' = P \times \frac{AC}{AB} - 600 \times \frac{5}{7,5} = 400 \text{ kilogr.}$$

Ainsi, le mur N supporte une charge de 400 kilogr. et le mur M une charge de 200 kilogrammes.

Si on voulait tenir compte du poids propre de la poutre, on pourrait, comme nous le verrons plus loin, considérer ce poids comme appliqué au milieu de la longueur AB, et alors chacun des murs en supporterait la moitié.

§ 3. — MOMENTS DES FORCES PARALLÈLES.

70. Moment par rapport à un point. — Dans le cas particulier où toutes les forces du système que l'on considère sont contenues dans un même plan, on peut, comme pour les forces concourantes, prendre leurs moments par rapport à un point quelconque de leur plan.

Soit $OA = f$ (*fig.* 64) la distance de la force F au point O; son moment sera, en valeur absolue, égal à Ff. Mais il est évident que ce moment change de signe suivant que la force est dirigée dans un sens ou dans l'autre, et suivant que le point O se trouve d'un côté ou de l'autre du point A. Si donc on convient d'affecter les forces du signe + ou du signe — suivant qu'elles agissent dans un sens ou dans l'autre, et de considérer comme positives ou comme négatives leurs distances au point O suivant que ces distances sont comptées à droite ou à gauche de ce point, les moments seront positifs lorsque les deux facteurs seront de même signe et négatifs lorsqu'ils seront de signe

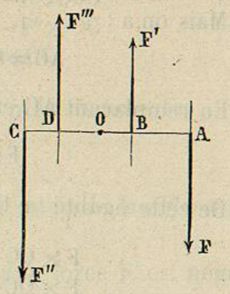

Fig. 64.

contraire. Ainsi, en considérant comme positif le moment Ff de la force F, le moment $F'''f'''$ de la force F''' sera aussi positif, tandis que les moments $F'f'$ et $F''f''$ des forces F' et F'' seront négatifs.

Ces conventions admises, on peut démontrer le théorème de Varignon qui s'énonce ainsi : *Le moment de la résultante de deux forces parallèles par rapport à un point quelconque de leur plan, est égal à la somme algébrique des moments des composantes.*

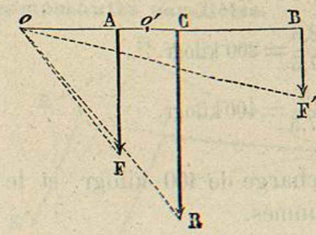

Fig. 65.

1° *Les deux forces sont de même sens.* Soient F et F' (*fig.* 65) les deux forces et R leur résultante. Du point O, centre des moments, abaissons la perpendiculaire OB sur la direction des forces. Les forces F, F' et R peuvent être considérées comme étant appliquées aux points A, B et C et l'on a, d'après ce qui a été vu précédemment :

$$R = F + F'$$

et

$$\frac{F}{BC} = \frac{F'}{AC}$$

De cette deuxième relation on tire :

$$F \times AC = F' \times BC$$

Mais on a :

$$AC = OC - OA \quad \text{et} \quad BC = OB - OC$$

En remplaçant AC et BC par leurs valeurs, il vient :

$$F(OC - OA) = F'(OB - OC)$$

De cette égalité on tire successivement :

$$F \times OC - F \times OA = F' \times OB - F' \times OC$$
$$F \times OC + F' \times OC = F' \times OB + F \times OA$$
$$R \times OC = F \times OA + F' \times OB$$

En appelant f, f' et r les distances OA, OB et OC, on aura :

$$Rr = Ff + F'f' \qquad (1)$$

Si le centre des moments était au point O', on trouverait encore la même équation (1), mais le moment Ff serait négatif.

Les aires des triangles OAF, OBF' et OCR étant respectivement égales à la moitié des produits $F \times OA$, $F' \times OB$ et $R \times OC$, on voit que l'aire du dernier triangle est égale à la somme des aires des deux autres, c'est-à-dire que *le triangle construit sur la résultante est égal à la somme des triangles construits sur les deux composantes.*

Nous avions trouvé cette même propriété pour les forces concourantes.

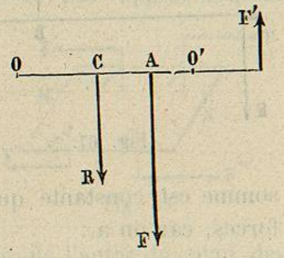

Fig. 66.

2° *Les forces sont de sens contraire.* Dans ce cas, on a, d'après la composition des forces anti-parallèles (*fig.* 66) :

$$R = F - F' \quad \text{et} \quad F \times AC = F' \times BC$$

Mais on a sur la figure : $AC = OA - OC$ et $BC = OB - OC$

En remplaçant AC et BC par leur valeur, il vient :

$$F(OA - OC) = F'(OB - OC)$$

D'où l'on tire successivement :

$$F \times OA - F \times OC = F' \times OB - F' \times OC$$
$$F \times OA - F' \times OB = F \times OC - F' \times OC$$
$$F \times OA - F' \times OB = R \times OC$$

Et en adoptant les mêmes notations que précédemment :

$$Ff - F'f' = Rr$$

c'est-à-dire *que le moment de la résultante est égal à la différence des moments des composantes.*

Mais, en remarquant que le moment de la force F' est négatif, on peut dire que *le moment de la résultante est égal à la somme algébrique des moments des composantes.*

Si le centre des moments était situé en O', tous les moments seraient négatifs et on retrouverait l'équation (1) du cas précédent.

71. Moment d'un couple. — Lorsque les forces F et F′ (*fig.* 67) parallèles et de sens contraire sont égales, la résultante est nulle et le théorème ne subsiste plus. Cependant, on est convenu d'appeler *moment d'un couple* la somme algébrique :

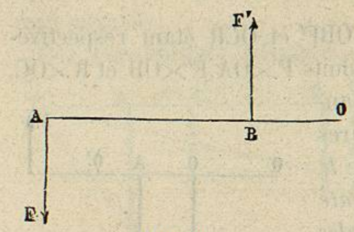

Fig. 67.

$$F \times OA - F' \times OB$$

des moments des deux forces qui forment ce couple. Or, cette somme est constante quel que soit le point O du plan des forces, car on a :

$$OA = OB + AB$$

En remplaçant et remarquant que $F' = F$, il vient :

$$F(OB + AB) - F \times OB = F(OB + AB - OB) = F \times AB$$

Donc, *le moment d'un couple est constant et égal au produit de l'une des forces par le bras de levier du couple.*

72. Il est facile d'étendre le théorème de Varignon à un système quelconque de forces parallèles situées dans un même plan. En effet, soient F, F′, F″... F^n les forces proposées et R leur résultante ; appelons R′ la résultante des forces F et F′ ; R″ la résultante des forces R′ et F″, et ainsi de suite. On aura, eu égard aux signes des moments :

$$R'r' = Ff + F'f'$$
$$R''r'' = R'r' + F''f''$$
$$R'''r''' = R''r'' + F'''f'''$$
$$\ldots = \ldots\ldots\ldots$$
$$Rr = R^{n-1}r_{n-1} + F^n f_n$$

Ajoutant toutes ces équations et supprimant les facteurs communs, on a :

$$Rr = Ff + F'f' + F''f'' + F'''f''' + \ldots\ldots + F^n f_n$$

73. Moment par rapport à un plan. — Lorsqu'on a un système de forces parallèles non situées dans le même plan, on ne peut plus prendre leurs moments par rapport à un point.

On prend alors les moments par rapport à un plan quelconque que l'on appelle plan des moments.

On désigne sous le nom de *moment d'une force par rapport à un plan, le produit de l'intensité de cette force par la perpendiculaire abaissée de son point d'application sur le plan.*

Ainsi, le moment de la force F (*fig.* 68) par rapport au plan MN est égal au produit F *f*.

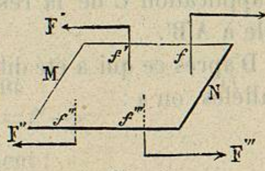

Fig. 68.

Si l'on ne considère que le moment d'une seule force par rapport à un plan, ce moment sera exprimé en valeur absolue ; mais lorsqu'on a à prendre les moments de plusieurs forces parallèles de même sens, ou de sens contraire, situées d'un côté ou de l'autre du plan des moments, on est forcé d'attribuer des signes aux moments. On considère comme positives les forces qui agissent dans un sens et comme négatives celles qui agissent en sens contraire. De même, on donne le signe + aux perpendiculaires dirigées dans un sens par rapport au plan des moments et le signe — à celles qui sont dirigées en sens contraire. Ainsi, en admettant comme positives la force F et la perpendiculaire *f* abaissée de son point d'application sur le plan MN, on regardera comme négatives la force opposée F″ et la perpendiculaire *f″* dirigée en sens inverse de la précédente.

Un moment sera dès lors *positif* ou *négatif* suivant que ses deux facteurs seront de même signe ou de signe contraire. Ainsi, le moment F*f* de la force F est positif ; celui F″ *f″* de la force F″ est aussi positif et les moments F′ *f′* et F‴ *f‴* des forces F′ et F‴ sont négatifs.

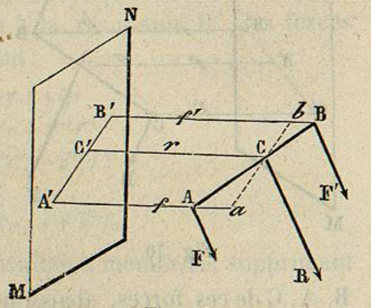

Fig. 69.

74. Cela posé, nous pouvons démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Le moment de la résultante d'un système quelconque de forces parallèles, par rapport à un plan quelconque* MN, *est égal à la somme algébrique des moments des composantes.*

1° *Cas de deux forces parallèles de même sens.* — Considérons les deux forces F et F′ (*fig.* 69) et leur résultante R. Soient A, B et C les points d'application de ces trois forces, et abaissons de ces points les perpendiculaires f, f' et r sur le plan des moments MN ; les pieds A′, B′, C′ de ces perpendiculaires se trouveront sur une même ligne droite A′ B′. Par le point d'application C de la résultante, menons la droite ab parallèle à A′B′.

D'après ce qui a été dit pour la composition des forces parallèles, on a :

$$\frac{F}{F'}=\frac{BC}{AC} \qquad (1)$$

Mais les triangles semblables BbC et AaC donnent :

$$\frac{Bb}{Aa}=\frac{BC}{AC}$$

En remplaçant dans l'équation (1), il vient :

$$\frac{F}{F'}=\frac{Bb}{Aa}$$

D'où l'on tire : $F\times Aa=F'\times Bb$

Or, on a sur la figure : $Aa=r-f$ et $Bb=f'-r$

Et par suite : $F(r-f)=F'(f'-r)$

D'où l'on tire successivement :

$$Fr-Ff=F'f'-F'r$$
$$Fr+F'r=Ff+F'f'$$
$$Rr=Ff+F'f'$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

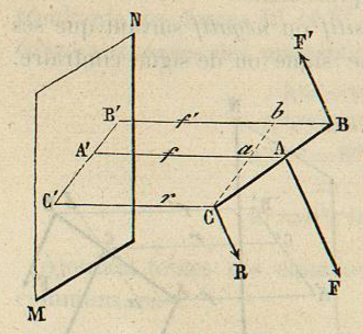

Fig. 70.

2° *Cas de deux forces parallèles de sens contraire.* — Considérons maintenant deux forces F et F′ (*fig.* 70) parallèles, de sens contraire, et leur résultante R. Des points d'application B, A, C de ces forces, abaissons sur le plan des moments MN les perpendiculaires f, f', r, et par le point C menons la parallèle Cb à la droite C′B′ passant par les pieds de ces perpendiculaires.

Dans le triangle BCb on a les rapports égaux :

$$\frac{Aa}{Bb}=\frac{AC}{BC}$$

Mais, d'après la composition des forces parallèles, on a :

$$\frac{AC}{BC}=\frac{F'}{F}$$

Et par suite : $$\frac{Aa}{Bb}=\frac{F'}{F}$$

ou : $$F\times Aa=F'\times Bb \qquad (1)$$

Or, on a sur la figure : $Aa=f-r$ et $Bb=f'-r$

En remplaçant dans l'égalité (1), il vient :

$$F(f-r)=F'(f'-r)$$

D'où l'on tire successivement :

$$Ff-Fr=F'f'-F'r$$
$$Ff-F'f'=Fr-F'r=Rr$$

équation qui nous montre que le moment de la résultante est égal à la différence des moments des composantes.

Mais, d'après les conventions adoptées (**73**), le moment F′ f' de la force F′ est négatif, et l'on peut dire que, dans tous les cas, *le moment de la résultante est égal à la somme algébrique des moments des composantes.*

3° *Cas d'un nombre quelconque de forces parallèles.* — Soient F, F′, F″, F‴... F^n des forces parallèles et anti-parallèles et R leur résultante. Appliquons la formule précédente à la résultante R′ des forces F et F′, puis à la résultante R″ des forces R′ et F″, et ainsi de suite. Il vient :

$$R'r'=Ff+F'f'$$
$$R''r''=R'r'+F''f''$$
$$R'''r'''=R''r''+F'''f'''$$
$$\ldots=\ldots\ldots\ldots$$
$$Rr=R^{n-1}r_{n-1}+F^nf_n$$

Ajoutant toutes ces égalités membre à membre et supprimant les facteurs communs, on aura :

$$Rr=Ff+F'f'+F''f''+F'''f'''+\ldots\ldots+F^nf_n$$

75. Application du théorème des moments à la recherche

du centre des forces parallèles. — Soient F, F′, F″... (*fig.* 71) un système de forces parallèles appliquées aux points A,A′, A″..., et proposons-nous de déterminer le point d'application C de leur résultante, à l'aide du théorème des moments.

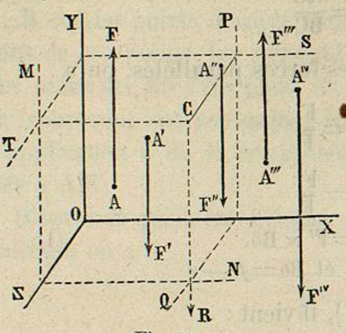

Fig. 71.

Pour cela, prenons deux plans XOY et YOZ parallèles à la direction des forces, et un troisième plan XOZ perpendiculaire à cette direction. Prenons les moments des forces par rapport à ces trois plans; en appelant x, x', x''... X les distances des forces et de leur résultante au plan YOZ, le théorème des moments donne l'équation :

$$RX = Fx + F'x' + F''x'' + \dots \qquad (1)$$

En désignant par y, y', y''... Y les quantités analogues par rapport au plan ZOX, on aura :

$$RY = Fy + F'y' + F''y'' + \dots \qquad (2)$$

En appelant z, z', z''... Z les mêmes quantités par rapport au plan YOX, il vient :

$$RZ = Fz + F'z' + F''z'' + \dots \qquad (3)$$

En considérant comme positives les forces qui agissent dans un sens et comme négatives celles qui agissent en sens contraire, on a :

$$R = F + F' + F'' + \dots \qquad (4)$$

En combinant cette équation (4) avec les équations (1) (2) (3), on a :

$$X = \frac{Fx + F'x' + F''x'' + \dots}{F + F' + F'' + \dots}$$

$$Y = \frac{Fy + F'y' + F''y'' + \dots}{F + F' + F'' + \dots}$$

$$Z = \frac{Fz + F'z' + F''z'' + \dots}{F + F' + F'' + \dots}$$

Donc, en connaissant les valeurs numériques des forces F F′ F″...,et leurs distances respectives aux trois plans, on pourra calculer les quantités X, Y, Z, et le point d'application C de la résultante sera par suite déterminé.

Ainsi, la quantité X indique que le point d'application C de la résultante R se trouve sur le plan PQ mené parallèlement au plan YOZ et à une distance X de ce plan.

La quantité Y indique que ce même point se trouve aussi sur le plan ST mené parallèlement au plan ZOX et à une distance Y de ce plan.

Enfin la quantité Z indique que ce même point C se trouve encore sur le plan MN mené parallèlement au plan YOX et à une distance Z de ce plan.

Par conséquent, le centre cherché se trouve au point C, intersection des trois plans PQ, ST, MN, et la direction de la résultante est déterminée par l'intersection des deux plans MN et PQ parallèles à la direction des forces ; quant à son intensité, elle est donnée par la formule (4).

76. Cas particulier. — Si toutes les forces F, F′, F″... sont égales et de même sens et que l'on prenne les moments par rapport à un seul plan, l'équation :

$$RX = Fx + F'x' + F''x'' + \dots$$

devient :

$$RX = F(x + x' + x'' + \dots) \qquad (1)$$

Si n représente le nombre des forces, on aura :

$$R = nF$$

En remplaçant et en divisant dans (1) les deux membres par F, il vient :

$$X = \frac{x + x' + x'' + \dots}{n}$$

Ce qui montre que *la distance du centre des forces parallèles à un plan quelconque est la moyenne arithmétique de toutes les distances* x, x', x''..., et ce point prend le nom de *centre des moyennes distances.*