CHAPITRE IV

CENTRE DE GRAVITÉ

§ 1. — CONSIDÉRATIONS ET MÉTHODE GÉNÉRALE.

77. Pesanteur. — La *pesanteur* est une force sous l'action de laquelle tous les corps tombent à la surface de la terre si aucune cause ne les maintient à distance, ou si cette cause vient à disparaître, c'est-à-dire si les corps sont abandonnés à eux-mêmes. Cette force agit indistinctement, et de la même manière, sur tous les objets, quelle que soit leur nature. La pesanteur n'est qu'un cas particulier de la gravitation universelle, dont les lois, posées par Newton, régisssent le mouvement des corps célestes.

Les corps, comme nous l'avons vu (**2**), sont tous formés par la réunion d'un très grand nombre de molécules ; or, si en divisant les corps à l'infini, on parvenait à isoler toutes leurs molécules, on verrait que celles-ci se trouvent encore soumises à l'action de la pesanteur qui s'exerce sur toutes les molécules composant les corps.

On désigne la direction de la pesanteur sous le nom de *verticale ;* or, la simple observation nous apprend que cette direction est perpendicnlaire à la surface des eaux tranquilles, et cette surface pouvant être considérée comme celle d'une sphère, il en résulte que toutes les verticales concourent au même point qui est le centre de la terre. La pesanteur attire donc les corps vers le centre de la terre ; mais celle-ci ayant des dimensions incomparablement plus grandes que celles de tous les corps que nous observons à sa surface (car le rayon terrestre a environ 6,366 kilomètres), nous pouvons admettre, sans erreur sensible, que toutes les actions dues à la pesanteur, sur les différentes molécules d'un corps, ont des directions parallèles. Donc, les corps abandonnés à l'action de la pesanteur tombent sous l'influence d'une infinité de forces parallèles de

même sens, se composant en une seule résultante parallèle aux composantes et égale à leur somme. La valeur de cette composante est appelée le *poids du corps.*

78. Centre de gravité. — On désigne sous le nom de *centre de gravité* d'un corps, le point d'application de toutes les actions exercées par la pesanteur sur ce corps.

79. Analogie entre le centre de gravité et le centre des forces parallèles. — L'étude de la composition des forces parallèles nous a fait voir que la résultante d'un système de forces parallèles appliquées à un corps solide passe constamment par le même point lorsqu'on fait tourner toutes les forces du système autour de leurs points d'application, en conservant leur parallélisme et leur intensité : ce point a été appelé le centre des forces parallèles. Ce principe s'applique également au cas où les forces parallèles qui agissent sur un corps solide invariable, sont dues à l'action de la pesanteur ; en effet, si nous donnons au corps différentes positions par rapport à un plan quelconque, le poids de ses différentes molécules, ainsi que la direction de la pesanteur, ne changeront pas, et nous serons dans les mêmes conditions que si, le corps restant fixe, nous avions fait varier la direction des actions de la pesanteur, en conservant leur parallélisme et leur intensité. Il résulte de là que dans un corps solide et invariable, la position du centre de gravité, ou le point d'application de la résultante de toutes les forces dues à la pesanteur sur les diverses molécules du corps, est constamment un point fixe, quelle que soit la position que l'on fasse occuper à ce corps par rapport à la verticale.

On peut donc dire que *le centre de gravité d'un corps est le centre des forces parallèles dues aux actions de la pesanteur sur ce corps.*

80. Conséquences de la position invariable du centre de gravité. — 1° Un corps soumis à l'action de la pesanteur peut être considéré comme étant sollicité par une force unique égale à son poids, appliquée à son centre de gravité et agissant verticalement.

2° Si on applique au centre de gravité d'un corps une force égale et directement opposée à l'action de la pesanteur sur ce corps, il y aura équilibre.

Réciproquement, lorsqu'une force unique fait équilibre au poids d'un corps, on peut affirmer que la direction de cette force passe par le centre de gravité du corps. Ainsi, en suspendant un corps à l'extrémité d'un fil, celui-ci aura la direction verticale lorsqu'il y aura équilibre entre le poids du corps et la réaction exercée par le point de suspension du fil, et, à cet instant, le centre de gravité sera situé sur le prolongement du fil.

3° Si l'on fixe le centre de gravité d'un corps, celui-ci reste en équilibre dans toutes les positions qu'on lui fait prendre autour du point fixe, car, dans ce cas, la résultante des actions de la pesanteur est détruite par la résistance du point fixe.

Dans tout ce qui précède, nous avons supposé que le centre de gravité était un des points du corps ; il arrive quelquefois, comme nous le verrons plus tard, que ce point est situé en dehors du corps ; dans ce cas, on admet qu'il se trouve invariablement lié au corps et alors le centre de gravité jouit de toutes les propriétés que nous venons d'exposer.

La notion du centre de gravité ne suppose pas nécessairement la solidité des corps ; un système non solide peut être aussi considéré comme ayant un centre de gravité, en supposant qu'on ait solidifié ce système sans changer sa forme ; seulement, si l'on vient à altérer la forme de ce système, la position du centre de gravité variera.

81. Détermination expérimentale du centre de gravité des corps. — Les conséquences que nous venons d'exposer nous permettent de déterminer expérimentalement le centre de gravité des corps solides de forme quelconque.

1^er^ Procédé. — On suspend le corps, par un point A de sa surface, à l'aide d'un fil suffisamment résistant, et lorsque ce corps est au repos, le centre de gravité se trouve sur la direction du fil ; si l'on imagine alors cette direction prolongée à l'intérieur du corps suivant la droite AA′ (*fig.* 72), cette droite contiendra le centre de gravité du corps. On suspend de nouveau le même corps par un autre point B (*fig.* 73), et en supposant le même fil prolongé à l'intérieur du corps, on obtiendra une autre droite BB′ contenant aussi le centre de gravité. Donc ce point se trouve à leur intersection G.

Cette méthode, quoique simple, ne peut être mise en pratique que sur des corps dont le poids est peu considérable.

2^e^ Procédé. — Lorsque le corps sur lequel on veut expérimenter est lourd et volumineux, on peut employer le procédé suivant : on appuie le corps sur un plan horizontal par une de ses arêtes vives, ou par une de ses faces sur un support en biseau ; la position d'équilibre étant obtenue par un moyen quelconque, le plan vertical, passant par l'appui, contiendra le centre de gravité. En répétant cette opération pour deux autres positions du même corps, on aura les traces de trois

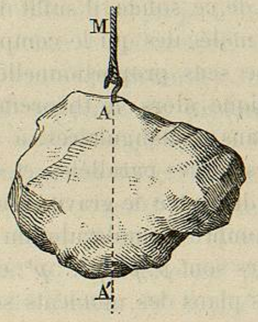

Fig. 72.

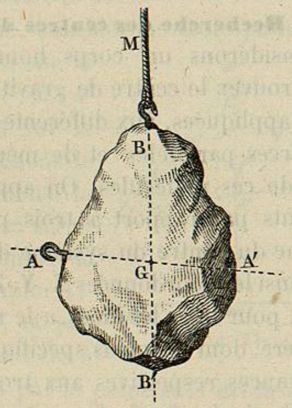

Fig. 73.

plans passant par le centre de gravité, et celui-ci se trouvera à leur intersection.

82. Corps homogènes. — On dit qu'un corps est *homogène* lorsque les différentes parties qui le composent ont des poids proportionnels à leurs volumes.

Nous ne nous occuperons, dans la recherche des centres de gravité, que des corps homogènes, c'est-à-dire formés d'une matière uniformément répartie dans l'espace réel que ces corps occupent. Dans la détermination du centre de gravité des corps hétérogènes, il faut tenir compte de la loi suivant laquelle le poids spécifique varie d'une molécule à une autre. Ce problème devient alors très complexe et ne saurait trouver place dans ce traité élémentaire.

83. Extension de la recherche du centre de gravité aux

surfaces et aux lignes. — Quoique les surfaces et les lignes ne soient ni matérielles ni pesantes, on leur attribue aussi, par extension, des centres de gravité, et l'on désigne sous le nom de centre de gravité d'une surface ou d'une ligne, le centre des forces parallèles que l'on imagine appliquées aux différents points de cette surface ou de cette ligne, de manière que des aires ou des portions équivalentes correspondent à des résultantes égales.

Cette extension de la notion du centre de gravité aux lignes et aux surfaces facilite, comme nous le verrons plus loin, la détermination du centre de gravité des volumes.

84. Recherche des centres de gravité. Méthode générale. — Considérons un corps homogène de forme quelconque. Pour trouver le centre de gravité de ce solide, il suffit de supposer appliquées, aux différentes molécules qui le composent, des forces parallèles et de même sens proportionnelles aux poids de ces molécules. On applique alors le théorème des moments par rapport à trois plans rectangulaires, à la recherche du centre du système des forces parallèles, et on obtient ainsi les coordonnées X, Y, Z du centre de gravité cherché.

Soit, pour fixer les idées, n le nombre de molécules du corps considéré, dont les poids spécifiques sont $p, p', p'' \ldots p^n$, et dont les distances respectives aux trois plans des moments sont x, y, z; x', y', z'; x'', y'', z'';... x^n, y^n, z^n. La somme des moments de toutes ces différentes molécules, par rapport à chacun des plans, sera égale au moment du poids total P du corps par rapport au même plan, et les coordonnées du centre de gravité seront données par les équations :

$$X = \frac{px + p'x' + p''x'' + \ldots + p^n x^n}{P} = \frac{\Sigma px}{P}$$

$$Y = \frac{py + p'y' + p''y'' + \ldots + p^n y^n}{P} = \frac{\Sigma py}{P}$$

$$Z = \frac{pz + p'z' + p''z'' + \ldots + p^n z^n}{P} = \frac{\Sigma pz}{P}$$

Le nombre des molécules qui composent un corps étant infini, quelque petit qu'il soit, les sommes précédentes se composent d'une infinité de termes, et il devient impossible, en pratique, de les calculer rigoureusement. On se contente de les

calculer approximativement en les ramenant à des quadratures de courbes; nous emploierons, pour cela, la méthode imaginée par Thomas Simpson, et dont voici l'énoncé :

85. *L'aire comprise entre une portion de courbe, une ligne d'abscisses et deux ordonnées quelconques, est égale au produit de la base* (qu'il faut diviser préalablement en un certain nombre pair de parties égales) *par un facteur composé :* 1° *de la somme des ordonnées extrêmes;* 2° *de deux fois la somme des ordonnées de rang impair;* 3° *de 4 fois la somme des ordonnées de rang pair, ce produit divisé par trois fois le nombre de parties égales en lesquelles on a divisé la base.*

Pour démontrer ce théorème, considérons trois points très voisins l, m, n (*fig.* 74) situés sur la courbe et dont les projections l', m', n' sur la ligne des abscisses, ou sur la base, sont équidistantes. Joignons le point l au point n; prolongeons la droite mm' d'une quantité $mx' = mx$ et divisons xx' en un certain nombre de parties égales, en 4 par exemple. Tirons: 1° les droites lx' et nx', et par le point y, la droite pp' parallèle à ln; 2° les droites py' et $p'y'$ et par le point m la droite qq' parallèle à pp'. Nous formons ainsi une ligne brisée $lpqmqp'n'$ passant par les points l, m, n, et dans laquelle, à cause de l'égalité

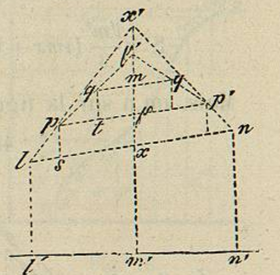

Fig. 74.

$$xl = xn$$

on aura : $$yp = yp' \quad \text{et} \quad mq = mq'$$

Lorsque les divisions de la droite xx' seront très nombreuses, les côtés lp, pq, qm deviendront très petits et la ligne brisée se transformera en une courbe que l'on pourra regarder comme se confondant avec la courbe donnée. Dans cette hypothèse, on peut substituer aux trapèzes $lxyp$, $pymq$... les parallélogrammes $sxyp$, $tymq$... et comme ces parallélogrammes sont respectivement doubles des triangles $px'y'$, $qy'm$... qui ont même base et même hauteur, il s'ensuit :

$$lpqmx = 2pqmx' = \frac{2}{3} \text{ triangle } lxx' = \frac{2}{3} mx \times l'm'$$

Et par conséquent on a :

$$lpqmq'p'n = \frac{4}{3} mx \times l'm'$$

L'aire du trapèze $ll'nn'$ a pour mesure :

$$m'x \times l'n'$$

ou bien encore : $\quad m'x \times 2l'm'$

Par conséquent, l'aire S comprise entre les trois points considérés et l'abscisse correspondante est :

$$S = \frac{4}{3} mx \times l'm' + m'x \times 2l'm'$$

Cette équation peut s'écrire :

$$S = \frac{l'm'}{3}(4mx + 6m'x) = \frac{l'm'}{3}(4mx + 4m'x + 2m'x)$$

Mais, on a sur la figure :

$$4mx + 4m'x = 4mm'$$
$$2m'x = ll' + nn'$$

En remplaçant, il vient :

$$S = (ll' + nn' + 4mm')\frac{l'm'}{3}$$

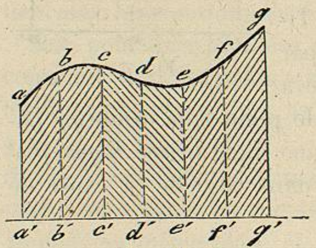

Fig. 75.

Cela posé, considérons la surface totale $aa'\ gg'$ (fig. 75) qu'il s'agit d'évaluer; divisons l'abscisse $a'\ g'$ en un certain nombre pair de parties égales, 6 par exemple, et élevons des ordonnées en chacun des points de division; nous aurons, d'après ce qui vient d'être démontré :

$$\text{surf. } aa'cc' = (aa' + cc' + 4bb')\frac{a'b'}{3}$$

$$\text{surf. } cc'ee' = (cc' + ee' + 4dd')\frac{c'd'}{3}$$

$$\text{surf. } ee'gg' = (ee' + gg' + 4ff')\frac{e'f'}{3}$$

Ajoutant et remarquant que :

$$\frac{a'b'}{3} = \frac{c'd'}{3} = \frac{e'f'}{3} = \frac{a'g'}{3 \times 6}$$

on a enfin :

$$\text{surf. } agg'a' = \left[aa' + gg' + 2(cc' + ee') + 4(bb' + dd' + ff')\right]\frac{a'g'}{3 \times 6}$$

ce qu'il fallait démontrer.

§ 2. — CENTRES DE GRAVITÉ DES LIGNES, SURFACES ET VOLUMES NON DÉFINIS GÉOMÉTRIQUEMENT.

86. Centre de gravité d'une ligne courbe. — Soit la courbe AB (*fig.* 76) supposée plane; son centre de gravité se trouve situé dans son plan. Prenons deux plans des moments MO, NO perpendiculaires au plan de la figure, et, pour plus de simplicité, perpendiculaires entre eux. Soient mn, nm', $n'm''$... des éléments de la courbe, assez petits pour être regardés comme rectilignes, et désignons ces éléments par l, l', l''... l^{vii}; soit x, x', x''... x^{vii} et y, y', y''... y^{vii} les distances de leurs milieux aux plans MO et NO, et soient enfin X et Y les distances inconnues du centre de gravité de la courbe aux plans des moments.

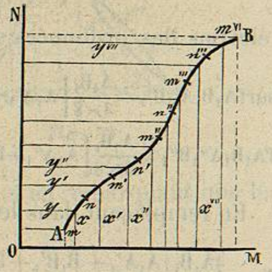

Fig. 76.

La somme des moments des différents éléments sera égale au moment de la courbe; en désignant celle-ci par C, on aura :

$$X = \frac{lx + l'x' + l''x'' = \ldots + l^{\text{vii}}x^{\text{vii}}}{C}$$

$$Y = \frac{ly + l'y' + l''y'' + \ldots + l^{\text{vii}}y^{\text{vii}}}{C}$$

Il nous reste maintenant à apprécier les numérateurs; pour cela, portons sur une droite indéfinie A_1B_1 (*fig.* 77) et à la suite les uns des autres, les différents éléments mn, nm'... de la courbe, de manière que l'on ait $A_1B_1 = C$ égale à la courbe rectifiée. Aux points correspondants au milieu de ces éléments, élevons des ordonnées respectivement égales à x, x', x''... x^{xii}; en joignant les extrémités de ces ordonnées par un trait continu, on obtient la courbe $A'_1B'_1$, et l'aire $A_1B_1A'_1B'_1$ représente le moment de la courbe C par rapport au plan NO.

Si, aux mêmes points que précédemment, on élève des ordonnées égales à $y, y', y'' \ldots y^{\text{VIII}}$, on obtiendra la courbe $A''_1B''_1$ et l'aire $A_1B_1A''_1B''_1$ exprime le moment de la courbe C par rapport au plan ON.

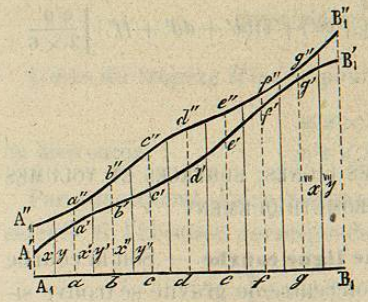

Fig. 77.

Calculons l'aire de ces surfaces à l'aide de la formule de Thomas Simpson. Pour cela, partageons la base A_1B_1 en un nombre pair de parties égales, en 8 par exemple, et élevons des ordonnées au point de division, on aura :

$$\text{surf}\,A_1B_1A'_1B'_1 = \frac{A_1B_1}{3\times 8}\Big[A_1A'_1 + B_1B'_1 + 2(bb' + dd' + ff') + 4(aa' + cc' + ee' + gg')\Big]$$

$$\text{surf}\,A_1B_1A''_1B''_1 = \frac{A_1B_1}{3\times 8}\Big[A_1A''_1 + B_1B''_1 + 2(bb'' + dd'' + ff'') + 4(aa'' + cc'' + ee'' + gg'')\Big]$$

En remplaçant dans les valeurs de X et de Y, il vient :

$$X = \frac{A_1B_1\,[A_1A'_1 + B_1B'_1 + 2(bb' + dd' + ff') + 4(aa' + cc' + ee' + gg']}{24C}$$

$$Y = \frac{A_1B_1\,[A_1A''_1 + B_1B''_1 + (2bb'' + dd'' + ff'') + 4(aa'' + cc'' + ee'' + gg'']}{24C}$$

Remarquant que $A_1B_1 = C$, on a finalement :

$$X = \frac{A_1A_1' + B_1B_1' + 2(bb' + dd' + ff') + 4(aa' + cc' + ee' + gg')}{24}$$

$$Y = \frac{A_1A_1'' + B_1B_1'' + 2(bb'' + dd'' + ff'') + 4(aa'' + cc'' + ee'' + gg'')}{24}$$

équations déterminant les distances X et Y du centre de gravité de la ligne courbe à chacun des plans des moments.

87. Centre de gravité d'une surface plane quelconque. — Soit à déterminer le centre de gravité de la surface S (*fig.* 78). Prenons, comme précédemment, deux plans des moments MO et NO perpendiculaires au plan de la surface et perpendiculaires entre eux. Menons une série de droites équidistantes $l, l_1, l_2, \ldots l_6$ parallèles au plan OM, divisant la surface S en un nombre pair de tranches de même hauteur, et soient $x, x_1, x_2 \ldots x_6$ les distances de ces droites au plan des moments.

Cela posé, construisons une courbe ABC (fig. 79) ayant pour abscisses la hauteur commune des tranches, et pour ordonnées les différents produits $lx, l_1x_1, l_2x_2 \ldots l_6x_6$; l'aire ABC représente le moment de la surface S par rapport au plan MO. Si donc X est l'ordonnée de son centre de gravité, on aura, en appli-

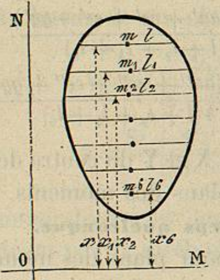

Fig. 78.

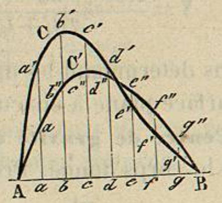

Fig. 79.

quant la formule de Thomas Simpson et en remarquant que les ordonnées extrêmes sont nulles :

$$SX = \frac{AB}{3\times 8}\Big[2(bb' + dd' + ff') + 4(aa' + cc' + ee' + gg')\Big]$$

$$X = \frac{\frac{AB}{3\times 8}\Big[2(bb' + dd' + ff') + 4(aa' + cc' + ee' + gg')\Big]}{S}$$

Pour trouver la distance Y du centre de gravité au plan NO, on peut décomposer la surface S en tranches parallèles à ce plan; mais il est plus simple de se servir des mêmes droites $l, l_1, l_2, \ldots l_6$ et de prendre les distances de leurs milieux $m, m_1, m_2, \ldots m_6$ au plan NO ; soient $y, y_1, y_2 \ldots y_6$ ces distances. En construisant, comme nous l'avons fait plus haut, une courbe ayant pour abscisses la hauteur des tranches et pour ordonnées les produits $ly, l_1y_1, l_2y_2 \ldots, l_6y_6$, l'aire AC'B représentera le moment de la surface S, par rapport au plan NO, et l'on aura :

$$Y = \frac{\frac{AB}{3\times 8}\Big[2(bb' + dd' + ff') + 4(aa' + cc' + ee' + gg'\Big]}{S}$$

La surface S peut aussi s'évaluer par la méthode de Thomas Simpson en se servant des droites $l, l_1, l_2, \ldots l_6$ comme ordonnées. Les ordonnées extrêmes sont encore nulles et l'on a :

$$S=\frac{AB}{3\times 8}\left[2(l_1+l_3+l_5)+4(l+l_2+l_4+l_6)\right]$$

Remplaçant cette valeur de S dans les expressions de X et de Y, celles-ci deviennent :

$$X=\frac{2(bb'+dd'+ff')+4(aa'+cc'+ee'+gg')}{2(l_1+l_3+l_5)+4(l+l_2+l_4+l_6)}$$

$$Y=\frac{2(bb''+dd''+ff''+4(aa''+cc''+ee''+gg'')}{2(l_1+l_3+l_5)+4(l+l_2+l_4+l_6)}$$

équations déterminant les distances X et Y du centre de gravité de la surface plane à chacun des plans des moments.

88. Centre de gravité d'un corps quelconque. — Soit V (*fig.* 80) le corps donné. Prenons pour plans des moments les

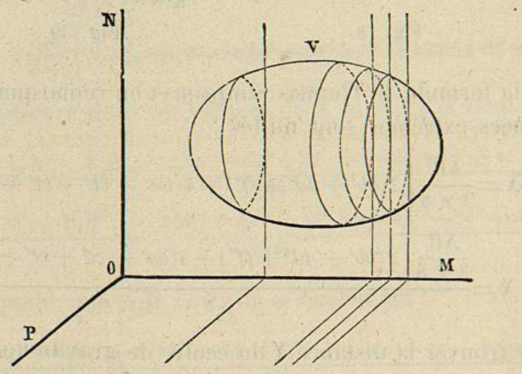

Fig. 80.

rois plans rectangulaires NOP, NOM et MOP ; divisons le corps en tranches de même épaisseur, par des plans équidistants parallèles au plan NOP. Supposons ces plans très rapprochés, et soit d leur distance commune ; à chacun de ces plans correspond une section dont la surface peut s'évaluer au moyen de la méthode de Thomas Simpson. Si S, S′, S″... S^n sont les surfaces de ces sections, on aura pour le volume du corps :

$$V=d(S+S'+S''+\ldots+S^n)$$

Soient x, x', x''... x^n les distances de ces sections au plan NOP, et X l'ordonnée du centre de gravité du corps, on aura :

$$VX=Sdx+S'dx'+S''dx''+\ldots+S^n dx^n$$

En combinant cette équation et la précédente, on tire :

$$X=\frac{Sx+S'x'+S''x''+\ldots+S^n x^n}{S+S'+S''+\ldots+S^n}$$

En répétant la même opération pour les plans NOM et MOP, on obtiendra les deux autres ordonnées Y et Z du centre de gravité à chacun de ces plans ; ainsi l'on aura :

$$Y=\frac{Sy+S'y'+S''y''+\ldots+S^n y^n}{S+S'+S''+\ldots+S^n}$$

$$Z=\frac{Sz+S'z'+S''z''+\ldots+S^n z^n}{S+S'+S''+\ldots+S^n}$$

Les numérateurs et les dénominateurs de ces équations s'obtiendront par la méthode de Thomas Simpson.

§ 3. — CENTRES DE GRAVITÉ DES LIGNES, SURFACES ET VOLUMES DÉFINIS GÉOMÉTRIQUEMENT.

89. Principes relatifs à la position du centre de gravité. — Nous venons de voir que, quelle que soit la ligne, la surface ou le volume que l'on considère, on peut toujours trouver son centre de gravité par la méthode générale que nous avons exposée. Mais, dans le cas particulier où les lignes, les surfaces et les volumes sur lesquels on veut expérimenter sont définis géométriquement, on peut se dispenser d'employer cette méthode générale et se servir de procédés plus simples, que nous allons faire connaître, en s'appuyant sur les principes suivants :

1° *Toute figure qui est décomposable en plusieurs parties ayant leur centre de gravité dans un même plan ou sur une même droite, a son centre de gravité dans ce plan ou sur cette droite.* —

Le poids de chacune des parties obtenues par la décomposition du corps pouvant être considéré comme appliqué à son centre de gravité, si les points d'application de toutes ces forces parallèles sont situés dans un même plan ou sur une même droite, il est évident que le point d'application de la résultante de toutes ces composantes, ou le centre de gravité du système total, sera dans ce plan ou sur cette droite.

2° *Toute figure qui a un plan de symétrie a son centre de gra-*