nées. Les ordonnées extrêmes sont encore nulles et l'on a :

$$S=\frac{AB}{3\times 8}\left[2(l_1+l_3+l_5)+4(l+l_2+l_4+l_6)\right]$$

Remplaçant cette valeur de S dans les expressions de X et de Y, celles-ci deviennent :

$$X=\frac{2(bb'+dd'+ff')+4(aa'+cc'+ee'+gg')}{2(l_1+l_3+l_5)+4(l+l_2+l_4+l_6)}$$

$$Y=\frac{2(bb''+dd''+ff''+4(aa''+cc''+ee''+gg'')}{2(l_1+l_3+l_5)+4(l+l_2+l_4+l_6)}$$

équations déterminant les distances X et Y du centre de gravité de la surface plane à chacun des plans des moments.

88. Centre de gravité d'un corps quelconque. — Soit V (*fig.* 80) le corps donné. Prenons pour plans des moments les

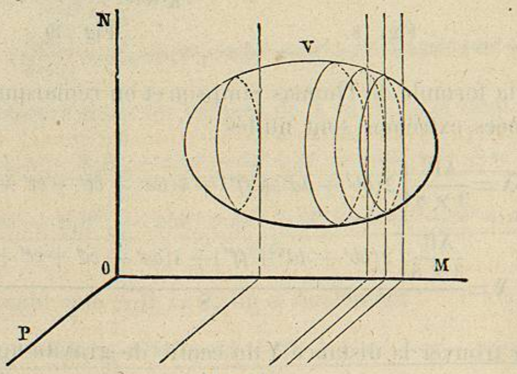

Fig. 80.

rois plans rectangulaires NOP, NOM et MOP ; divisons le corps en tranches de même épaisseur, par des plans équidistants parallèles au plan NOP. Supposons ces plans très rapprochés, et soit d leur distance commune ; à chacun de ces plans correspond une section dont la surface peut s'évaluer au moyen de la méthode de Thomas Simpson. Si S, S′, S″... S^n sont les surfaces de ces sections, on aura pour le volume du corps :

$$V=d(S+S'+S''+\ldots+S^n)$$

Soient x, x', x''... x^n les distances de ces sections au plan NOP, et X l'ordonnée du centre de gravité du corps, on aura :

$$VX=Sdx+S'dx'+S''dx''+\ldots+S^n dx^n$$

En combinant cette équation et la précédente, on tire :

$$X=\frac{Sx+S'x'+S''x''+\ldots+S^n x^n}{S+S'+S''+\ldots+S^n}$$

En répétant la même opération pour les plans NOM et MOP, on obtiendra les deux autres ordonnées Y et Z du centre de gravité à chacun de ces plans ; ainsi l'on aura :

$$Y=\frac{Sy+S'y'+S''y''+\ldots+S^n y^n}{S+S'+S''+\ldots+S^n}$$

$$Z=\frac{Sz+S'z'+S''z''+\ldots+S^n z^n}{S+S'+S''+\ldots+S^n}$$

Les numérateurs et les dénominateurs de ces équations s'obtiendront par la méthode de Thomas Simpson.

§ 3. — CENTRES DE GRAVITÉ DES LIGNES, SURFACES ET VOLUMES DÉFINIS GÉOMÉTRIQUEMENT.

89. Principes relatifs à la position du centre de gravité. — Nous venons de voir que, quelle que soit la ligne, la surface ou le volume que l'on considère, on peut toujours trouver son centre de gravité par la méthode générale que nous avons exposée. Mais, dans le cas particulier où les lignes, les surfaces et les volumes sur lesquels on veut expérimenter sont définis géométriquement, on peut se dispenser d'employer cette méthode générale et se servir de procédés plus simples, que nous allons faire connaître, en s'appuyant sur les principes suivants :

1° *Toute figure qui est décomposable en plusieurs parties ayant leur centre de gravité dans un même plan ou sur une même droite, a son centre de gravité dans ce plan ou sur cette droite.* —

Le poids de chacune des parties obtenues par la décomposition du corps pouvant être considéré comme appliqué à son centre de gravité, si les points d'application de toutes ces forces parallèles sont situés dans un même plan ou sur une même droite, il est évident que le point d'application de la résultante de toutes ces composantes, ou le centre de gravité du système total, sera dans ce plan ou sur cette droite.

2° *Toute figure qui a un plan de symétrie a son centre de gra-*

vité situé dans ce plan. — Considérons deux molécules du corps, situées sur un même plan perpendiculaire au plan de symétrie et à égale distance de ce plan; le centre de gravité se trouve situé dans le plan de symétrie, car les poids de ces molécules ont pour résultante une force égale à leur somme et appliquée au milieu de la droite qui joint leurs points d'application. Chaque couple de molécules, constituant le corps, donne ainsi une résultante dont le point d'application est situé sur le plan de symétrie; donc, le point d'application de la résultante totale, ou le centre de gravité du corps, sera également dans ce plan.

3° *Toute figure qui a un axe de symétrie a son centre de gravité situé sur cet axe.* — L'axe de symétrie étant l'intersection de deux plans de symétrie, et le centre de gravité devant se trouver sur chacun d'eux, il sera forcément à leur intersection.

4° *Toute figure qui a un centre de symétrie a son centre de gravité situé en ce point.* — Le centre de symétrie étant déterminé par l'intersection de deux ou plusieurs axes de symétrie, et chacun d'eux devant contenir le centre de gravité, celui-ci se trouve à leur intersection commune.

90. On déduit de là les conséquences suivantes :

1° *Le centre de gravité d'une droite est en son milieu.*

2° *Le centre de gravité d'un carré, d'un rectangle, d'un parallélogramme, est au point d'intersection des diagonales et au milieu de chacune d'elles.*

3° *Le centre de gravité d'une circonférence ou d'un cercle est situé au centre de figure.*

4° *Le centre de gravité du contour ou de la surface d'une ellipse est situé au point de rencontre des deux axes.*

5° *Le centre de gravité d'un parallélipipède est situé au point de rencontre des trois diagonales.*

6° *Le centre de gravité de la surface ou du volume d'une sphère, d'un ellipsoïde de révolution, est situé au centre de figure.*

7° *Le centre de gravité d'un cylindre droit ou oblique est situé au milieu de la droite qui joint les centres des deux bases, c'est-à-dire au milieu de son axe.*

8° *Le centre de gravité d'un anneau est situé au centre de cet anneau.*

A. CENTRE DE GRAVITÉ DES LIGNES.

91. Centre de gravité du périmètre d'un triangle : 1° géométriquement. — Soit le triangle ABC (*fig.* 81); le centre de gravité de chacun des côtés se trouve en leur milieu a, b et c. Nous avons donc à composer trois forces parallèles appliquées aux points a, b et c, représentées par les poids des côtés respectifs, et par conséquent proportionnelles à leur longueur. La résultante des forces appliquées en c et b se trouvera sur la droite cb et son point d'application g la partagera en deux parties telles que l'on aura :

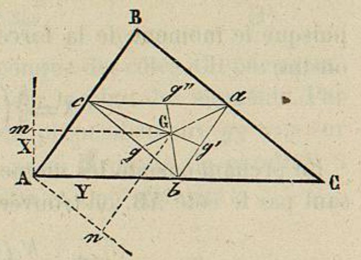

Fig. 81.

$$\frac{bg}{cg}=\frac{AB}{AC}$$

Mais ce point g est le pied de la bissectrice de l'angle cab; en effet, dans le triangle ABC, on a :

$$ab=\frac{AB}{2} \quad \text{et} \quad ac=\frac{AC}{2}$$

d'où : $$\frac{ab}{ac}=\frac{AB}{AC} \quad \text{et par suite :} \quad \frac{bg}{cg}=\frac{ab}{ac}$$

En composant actuellement la force appliquée en g et représentée par AB + AC avec la force appliquée en a, représentée par BC, on trouvera la résultante finale dont le point d'application donnera le centre de gravité cherché; ce point se trouve donc sur la bissectrice ag. On démontrerait de même qu'il se trouve sur une autre bissectrice cg', par exemple, et par suite il se trouve au point de concours des bissectrices des angles du triangle abc.

Donc, *le centre de gravité du périmètre d'un triangle est le centre du cercle inscrit au triangle que l'on forme en joignant les milieux des côtés du triangle donné.*

2° **Par le théorème des moments.** — Soient P, P′ et P″ les poids des trois côtés AB, BC, AC; prenons les moments par rapport à un plan perpendiculaire au plan de la figure et passant par le côté AC. En appelant R la résultante $P+P'+P''$ et X la distance de son point d'application au plan des moments, on aura :

$$RX=(P+P')\frac{h}{2}$$

puisque le moment de la force P'' est nul. De cette équation, on tire :

$$X=\frac{h}{2}\left(\frac{P+P'}{R}\right)$$

En prenant ensuite les moments par rapport à un plan passant par le côté AB, on trouverait de même :

$$Y=\frac{h'}{2}\left(\frac{P+P''}{R}\right)$$

Connaissant les distances X et Y, le point G est parfaitement déterminé. Il suffit de mener, par le sommet A, les droites Am et An respectivement perpendiculaires aux côtés AC et AB, de prendre, sur ces droites, des longueurs Am et An égales à X et Y, et par les points m et n de tracer les parallèles mG et nG aux mêmes côtés; l'intersection G de ces deux droites déterminera la position du centre de gravité.

92. Centre de gravité d'une ligne polygonale régulière. — Soient ACD...B (*fig.* 82) le contour polygonal donné et O son centre de figure. Le centre de gravité de cette ligne se trouvera sur le rayon OE, passant en son milieu, car ce rayon est un axe de symétrie : il suffit donc de déterminer sa distance X au centre O. Pour cela, appliquons le théorème des moments par rapport à un plan.

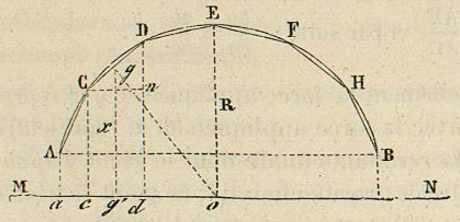

Fig. 82.

Prenons pour plan des moments le plan MN passant par le centre O et perpendiculaire au plan de la figure, ainsi qu'à la ligne OE; le centre de gravité de chacun des côtés l se trouve en leur milieu; soient x, x', x''... les distances de ces milieux

au plan MN. Si L représente la longueur totale de la ligne brisée, l'équation des moments donnera :

$$LX=l(x+x'+x''+\ldots)$$

Ce que l'on peut écrire en abrégé

$$LX=\Sigma lx \qquad (1)$$

Prenons maintenant l'un quelconque des côtés, CD par exemple, et soit $cd=l'$ sa projection sur le plan des moments. Par le milieu g de ce côté, menons la perpendiculaire $gg'=x$ sur MN et l'apothème Og; traçons aussi la droite Cn parallèle à MN. Les triangles semblables CDn et Ogg' donnent :

$$\frac{CD}{Og}=\frac{Cn}{gg'} \quad \text{ou} \quad \frac{l}{Og}=\frac{l'}{x}$$

d'où : $\quad l\times x=l'\times Og \quad$ et par suite : $\quad \Sigma lx=\Sigma l'\times Og$

Mais $\Sigma\, l'=ab$, et en remplaçant dans l'équation (1), on tire :

$$X=\frac{ab\times Og}{L}$$

Ainsi, *la distance du centre de gravité au centre O est une quatrième proportionnelle à la ligne, à sa corde et à son apothème.*

93. Centre de gravité d'un arc de cercle. — Pour passer du cas précédent à celui d'un arc de cercle, il suffit de supposer que le nombre des côtés du polygone augmente indéfiniment. A la limite, la ligne brisée se confondra avec l'arc de cercle circonscrit et l'apothème deviendra égal au rayon R. On aura alors pour la distance du centre de gravité au centre O :

$$X=\frac{\text{rayon R}\times\text{corde AB}}{\text{arc AB}}$$

Donc, *le centre de gravité d'un arc de cercle se trouve sur le rayon qui passe en son milieu, et sa distance au centre de l'arc est une quatrième proportionnelle à l'arc, à sa corde et au rayon.*

Dans le cas d'une demi-circonférence, on a :

$$\text{arc AB}=\pi R$$
$$\text{et} \qquad \text{corde AB}=2R$$

La formule précédente devient donc :

$$X=\frac{R\times 2R}{\pi R}=\frac{2R}{\pi}=0,6366\,R$$

B. CENTRE DE GRAVITÉ DES SURFACES.

94. Centre de gravité de l'aire d'un triangle. — Soit le triangle ABC (*fig.* 83). Supposons que sa surface soit décomposée en tranches infiniment minces parallèles à l'un des côtés BC; chacune de ces tranches, ou filets élémentaires, pourra être considérée comme une ligne homogène et aura son centre de gravité en son milieu. Le lieu des points milieux de toutes ces tranches étant la médiane AD, il s'ensuit que cette droite contient le centre de gravité G du triangle. On démontrerait de même que ce point doit se trouver sur la médiane BE, et par suite il est à leur point de concours.

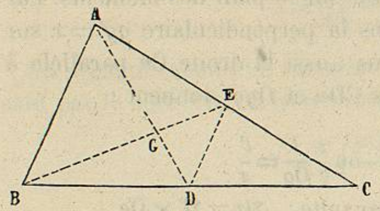

Fig. 83.

Les triangles semblables ABG et GED donnent :

$$\frac{DG}{AG}=\frac{ED}{AB}=\frac{1}{2}$$

Donc, *le centre de gravité de l'aire d'un triangle se trouve sur l'une quelconque des médianes et au 1/3 de cette ligne à partir de la base.*

Remarque. — Le centre de gravité de l'aire d'un triangle se confond avec le centre de trois forces parallèles égales appliquées aux trois sommets. En effet, soit F chacune de ces forces; le point d'application de la résultante égale à 2F des forces appliquées aux sommets A et C partagera la droite AC en deux parties égales; il se confondra avec le pied E de la médiane BE. En composant ensuite la résultante partielle 2F avec la force F appliquée au sommet B, on obtiendra la résultante finale dont le point d'application sera donné par la relation :

$$\frac{F}{2F}=\frac{GE}{GB}=\frac{1}{2}$$

Ainsi, le centre des forces parallèles considérées se trouve au 1/3 de la médiane BE; il se confond donc avec le centre de gravité du triangle ABC.

95. Centre de gravité d'un trapèze. — Soit le trapèze ABCD (*fig.* 84); son centre de gravité G se trouve sur la droite EF passant par le milieu des deux bases, car cette ligne partage en deux parties égales l'infinité de droites parallèles aux bases en lesquelles on peut décomposer la surface du trapèze. Menons la diagonale CB qui divise la figure ABCD en deux triangles BCD et BCA; le centre de gravité du premier triangle se trouve sur la médiane BE et au tiers g de cette droite à partir de la base CD; le centre de gravité du second triangle

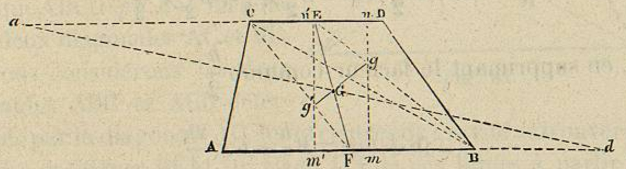

Fig. 84.

est situé sur la médiane CF et au tiers g' de cette ligne à partir de la base AB. Le centre de gravité du trapèze se trouvera sur la ligne gg' qui joint les centres de gravité des deux triangles; devant se trouver à la fois sur les lignes EF et gg', il sera forcément à l'intersection G de ces deux droites.

On peut encore déterminer le centre de gravité d'un trapèze, en considérant ce trapèze et les deux triangles BCD et BCA comme des poids ou forces proportionnelles à leur surface, appliquées à leur centre de gravité respectif, et prenant successivement les moments par rapport à deux plans passant par les bases AB et CD.

Posons $AB=B$; $CD=b$; désignons par h la hauteur du trapèze et par x et y les distances du point G aux plans des moments. Nous avons, par rapport au plan AB :

$$\text{surf. ABCD}\times x=\text{surf. BCD}\times mg+\text{surf. BCA}\times m'g' \quad (1)$$

Mais, à cause des triangles semblables, on a :

$$\frac{mg}{ng}=\frac{Bg}{Eg}=\frac{2}{1} \quad \text{et} \quad \frac{m'g'}{n'g'}=\frac{Fg'}{Cg'}=\frac{1}{2}$$

En ajoutant les numérateurs aux dénominateurs, il vient :

$$\frac{mg}{mg+ng}=\frac{Bg}{Eg+Bg}=\frac{2}{3}$$
$$\frac{m'g'}{m'g'+n'g'}=\frac{Fg'}{Cg'+Fg'}=\frac{1}{3}$$

D'où l'on déduit :

$$mg=\frac{2h}{3} \quad \text{et} \quad m'g'=\frac{h}{3}$$

En substituant dans l'équation (1) et remplaçant les surfaces par leur valeur, il vient :

$$(B+b)\frac{h}{2}\times x=B\frac{h}{2}\times\frac{h}{3}+b\frac{h}{2}\times\frac{2h}{3}$$

ou, en supprimant le facteur commun $\frac{h}{2}$:

$$(B+b)x=B\frac{h}{3}+b\times\frac{2h}{3}$$

D'où l'on tire :

$$x=\frac{h}{3}\,\frac{B+2b}{B+b} \qquad (2)$$

On trouverait de même, en prenant les moments par rapport au plan CD,

$$(B+b)y=B\frac{2h}{3}+b\frac{h}{3}$$

d'où :

$$y=\frac{h}{3}\,\frac{2B+b}{B+b} \qquad (3)$$

Divisant membre à membre les égalités (2) et (3), il vient :

$$\frac{x}{y}=\frac{B+2b}{2B+b}$$

Cette relation nous conduit à la construction suivante : prolongez chaque base, et en sens contraire, d'une longueur égale à l'autre, puis joignez les extrémités a et d de ces prolongements ; cette droite va couper la ligne EF au centre de gravité. En effet, les triangles FGd et EGa sont semblables et donnent :

$$\frac{FG}{EG}=\frac{Fd}{Ea}=\frac{\frac{1}{2}B+b}{B+\frac{1}{2}b}=\frac{B+2b}{2B+b}=\frac{x}{y}$$

Ainsi, *le centre de gravité d'un trapèze est situé sur la droite qui joint les milieux des deux bases, et il divise cette droite en deux segments qui sont entre eux comme la grande base, augmentée du double de la petite, est à la petite augmentée du double de la grande.*

On voit que le rapport de ces deux segments est indépendant de la hauteur du trapèze.

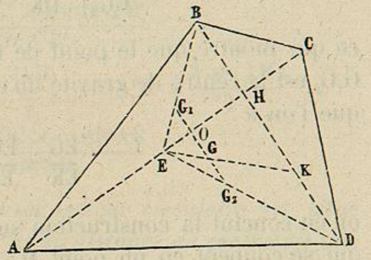

Fig. 85.

96. Centre de gravité d'un quadrilatère quelconque. — Pour trouver le centre de gravité d'un quadrilatère quelconque ABCD (*fig.* 85), menons les deux diagonales AC et BD. Si nous considérons les deux triangles ABC et ACD déterminés par la diagonale AC, leurs centres de gravité se trouveront sur les médianes BE et DE et au 1/3 de ces lignes à partir du point E ; prenons $EG_1=\frac{BE}{3}$ et $EG_2\ \frac{DE}{3}$. La droite G_1G_2 sera parallèle à la diagonale BD et contiendra le centre de gravité G du quadrilatère ; ce point la divisera en deux parties inversement proportionnelles aux surfaces des deux triangles ABC et ACD ; on aura donc :

$$\frac{GG_1}{GG_2}=\frac{ACD}{ABC}$$

Mais ces triangles ayant même base AC sont entre eux comme leur hauteur, ou comme les segments DH et BH de l'autre diagonale, ou bien encore comme les parties G_1O et G_2O de la droite G_1G_2 qui lui est parallèle ; donc :

$$\frac{ACD}{ABC}=\frac{OG_2}{OG_1}$$

En remplaçant on a : $\frac{GG_1}{GG_2}=\frac{OG_2}{OG_1}$ et par suite $GG_1=OG_2$

De là résulte la construction suivante : pour trouver le centre de gravité d'un quadrilatère quelconque, menez l'une des diagonales AC et joignez les sommets B et D au milieu E de cette diagonale; prenez $EG_1 = \frac{BE}{3}$ et $EG_2 = \frac{ED}{3}$ puis portez $GG_1 = OG_2$; le point G sera le centre de gravité cherché.

On peut encore trouver ce point plus simplement. Prenons $DK = BH$, et joignons KE; on a :

$$\frac{GG_1}{GG_2} = \frac{BK}{DK} = \frac{DH}{BH} = \frac{ACD}{ABC}$$

ce qui montre que le point de rencontre G des droites EK et G_1G_2 est le centre de gravité du quadrilatère, et en remarquant que l'on a :

$$\frac{EG}{EK} = \frac{EG_2}{ED} = \frac{1}{3}$$

on en conclut la construction suivante : menez les diagonales qui se coupent en un point H; prenez $DK = BH$ et joignez le point K au milieu E de l'autre diagonale; enfin portez EG = au 1/3 de EK. Le point G est le centre de gravité du quadrilatère.

97. Centre de gravité d'un polygone quelconque. — Pour trouver le centre de gravité d'un polygone quelconque, on le divise en triangles par des droites issues d'un même sommet, puis on détermine l'aire et le centre de gravité de chacun de ces triangles. On suppose alors appliquées, à ces différents centres de gravité, des forces parallèles proportionnelles aux aires des triangles respectifs et on applique la méthode indiquée pour la recherche du centre des forces parallèles.

98. Centre de gravité d'un secteur circulaire. — Soit le secteur circulaire ACBO (*fig.* 86); divisons l'arc AB en un très grand nombre de parties égales *ab*, *bc*... et menons des rayons à tous les points de division. Le secteur donné se trouve ainsi divisé en un grand nombre de secteurs élémentaires égaux, et comme les arcs, *ab*, *bc*... sont supposés très petits, on peut regarder ces secteurs comme des triangles rectilignes. Les centres de gravité tels que *g*, de tous ces triangles, seront situés sur les médianes telles que O*n* et aux 2/3 de ces droites à partir du centre O; ils seront donc tous à égale distance de ce centre, et par suite se trouveront

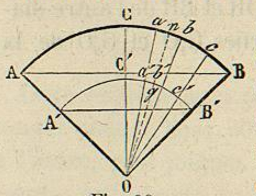

Fig. 86.

uniformément répartis sur l'arc A'B' décrit du point O avec $\frac{2OC}{3}$ pour rayon. Il résulte de là que le centre de gravité du secteur ACBO est le même que celui de l'arc A'B'; il est donc sur le rayon OC, et d'après ce que nous avons vu (**93**), sa distance X au centre O sera donnée par la formule :

$$X = \frac{\text{rayon } OC' \times \text{corde } A'B'}{\text{arc } A'B'}$$

Mais : $OC' = \frac{2OC}{3}$, $A'B' = \frac{2AB}{3}$; $\text{arc } A'B' = \frac{2 \text{ arc } AB}{3}$

donc : $X = \frac{2}{3}\frac{\text{rayon } OC \times \text{corde } AB}{\text{arc } AB}$

Ainsi, *le centre de gravité d'un secteur circulaire est situé sur la bissectrice de son angle, et sa distance au centre est une quatrième proportionnelle à l'arc, à sa corde et aux 2/3 du rayon.*

Si le secteur considéré est un demi-cercle, on a :

$$\text{corde } AB = 2R \quad \text{et} \quad \text{arc } AB = \pi R$$

par suite : $X = R\frac{4}{3\pi} = 0{,}425\,R$

99. Centre de gravité d'une demi-couronne circulaire. — Si nous remarquons que l'aire de la demi-couronne ACB *bca* (*fig.* 87) est la différence entre les aires des demi-cercles de rayon R et *r*, il devient très facile de déterminer son centre de gravité. Prenons les moments par rapport à un plan passant par le diamètre AB et perpendiculaire au plan de la couronne. Nous aurons :

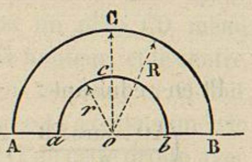

Fig. 87.

$$\frac{\pi}{2}\left(R^2 - r^2\right) X = \frac{\pi R^2}{2} \times 0{,}425\,R - \frac{\pi r^2}{2} \times 0{,}425\,r$$

En supprimant le facteur commun $\frac{\pi}{2}$ on tire :

$$X = 0{,}425\,\frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2}$$

Si $R = 2r$, on aura :

$$X = 0{,}425\,\frac{7r^3}{3r^2} = 0{,}99\,r$$