c'est-à-dire que X est dans ce cas très approximativement égal à r.

100. Centre de gravité d'un segment de cercle. — La surface du segment ABDC (*fig.* 88) est égale à la différence des aires du secteur ACBO et du triangle AOB. Supposons que des poids proportionnels à ces surfaces soient appliqués aux centres de gravité respectifs des trois figures; le théorème des moments par rapport à un plan XY perpendiculaire au plan de la figure, mené par le centre O et parallèlement à AB, donne :

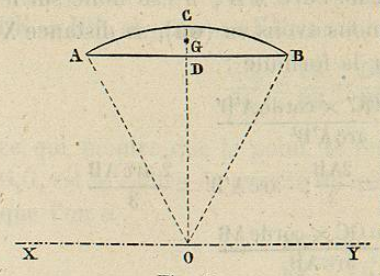

Fig. 88.

$$M \text{ segment} = M \text{ secteur} - M \text{ triangle}$$

En désignant par X la distance inconnue OG du centre de gravité du segment au centre O, on aura :

$$\left(\frac{AO \times \text{arc}\, AB}{2} - \frac{AB \times OD}{2}\right) X = \left(\frac{AO \times \text{arc}\, AB}{2} \times \frac{2}{3} \frac{AO \times AB}{\text{arc}\, AB}\right) - \left(\frac{AB \times OD}{2} \times \frac{2OD}{3}\right)$$

Et en réduisant :

$$\left(\frac{AO \times \text{arc}\, AB}{2} - \frac{AB \times OD}{2}\right) X = \frac{AO^2 \times AB}{3} - \frac{AB \times OD^2}{3}$$

$$\left(\frac{AO \times \text{arc}\, AB}{2} - \frac{AB \times OD}{2}\right) X = \frac{AB}{3}(AO^2 - OD^2) \qquad (1)$$

Remarquant que dans le triangle rectangle AOD, on a :

$$AO^2 - OD^2 = AD^2 = \frac{AB^2}{4}$$

En remplaçant dans l'équation (1) et tirant la valeur de X, il vient :

$$X = \frac{AB^3}{6(AO \times \text{arc}\, AB - AB \times OD)}$$

Connaissant cette longueur X, le centre de gravité du segment est parfaitement déterminé, car il doit se trouver, par

raison de symétrie, sur le rayon OC perpendiculaire à la corde AB.

Ainsi, *le centre de gravité d'un segment de cercle se trouve sur le rayon perpendiculaire à sa corde et à une distance du centre égale au rapport du cube de cette corde à six fois le double de l'aire du segment.*

101. Centre de gravité d'une surface conique. — Proposons-nous de déterminer le centre de gravité de la surface conique engendrée par le côté SB (*fig.* 89) du triangle rectangle SOB, dans sa rotation autour du côté SO. Cette surface est celle d'un cône droit à base circulaire; divisons cette base en très petites parties égales ab, bc, cd.... et joignons les points de division au sommet; nous décomposons ainsi la surface en petits triangles égaux Sab, Sbc.... dont les centres de gravité g, g', g''.... sont situés sur les droites qui joignent le sommet au milieu de la base et au tiers de ces droites à partir de cette base. Ils se trouvent donc tous contenus dans un plan CD mené parallèlement à la base par le tiers de la hauteur, et le centre de gravité du système se trouve aussi dans ce plan; or, il doit également se trouver sur la droite SO qui est l'axe de symétrie du cône; par suite, il est à l'intersection G de cette droite avec le plan CD.

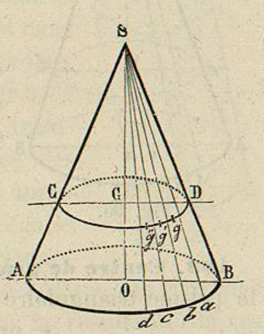

Fig. 89.

Ainsi, on peut dire que *le centre de gravité d'une surface conique est sur l'axe et au tiers de cet axe à partir de la base.*

Le centre de gravité d'une surface conique se confond avec celui de la section faite parallèlement à la base par le tiers de la hauteur à partir de cette base.

Le centre de gravité d'une surface conique se confond avec celui du triangle ASB *déterminé en coupant cette surface par un plan quelconque passant par l'axe.*

102. Centre de gravité de la surface latérale d'un tronc de cône. — En raisonnant sur les petits trapèzes NMmn... (*fig.* 90), en lesquels on peut décomposer la surface conique en menant les génératrices Mm, Nn... comme nous l'avons fait pour les petits triangles du cas précédent, on trouverait que le centre de gravité de cette surface est situé sur l'axe, à des distances x et y des bases AB et ab données par la relation :

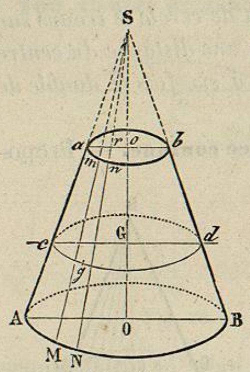

Fig. 90.

$$\frac{x}{y}=\frac{R+2r}{2R+r}$$

Ainsi, *le centre de gravité de la surface latérale d'un tronc de cône se confond avec celui du trapèze* ABab *déterminé en coupant cette surface par un plan quelconque passant par l'axe.*

C. CENTRE DE GRAVITÉ DES VOLUMES.

103. Centre de gravité d'un prisme triangulaire. — Soit le prisme triangulaire ABC A'B'G' (*fig.* 91) ; décomposons ce prisme en tranches infiniment minces, telles que $mnm'n'$ parallèles à l'une des faces latérales. Ces tranches peuvent être considérées comme des parallélogrammes matériels, et le centre de gravité de chacune d'elles est situé au milieu des lignes df qui joignent les milieux de deux côtés opposés. Tous ces centres de gravité, et par suite le centre de gravité du prisme, se trouvent dans le plan diamétral $CC'r'r$, qui partage en deux parties égales toutes les droites parallèles à A'B', et dans le plan ajc passant par le milieu

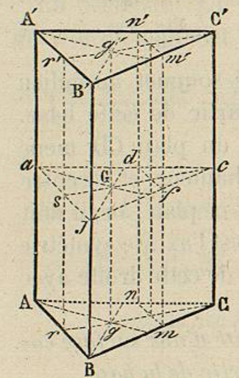

Fig. 91.

des arêtes latérales du prisme. Le centre de gravité du prisme est donc situé à l'intersection de ces deux plans, c'est-à-dire sur la médiane cs de la section ajc faite à égale distance des deux bases. Par la même raison, le centre de gravité du prisme se trouve sur les deux autres médianes de cette section et par conséquent il est à leur point de concours.

On voit donc que le point G est le milieu de la droite gg' qui joint les centres de gravité des deux bases.

Ainsi, *le centre de gravité d'un prisme triangulaire se confond*

avec le centre de gravité de la section faite à égale distance des deux bases, ou bien encore, *il est situé au milieu de la droite qui joint les centres de gravité des deux bases.*

104. Centre de gravité d'un prisme quelconque. — Considérons, par exemple, un prisme pentagonal ABCHK (*fig.* 92). Par l'arête latérale AF menons les plans diagonaux ACH et ADK ; ces plans divisent le prisme donné en trois prismes triangulaires dont les centres de gravité g, g', g'' seront dans la section $abcde$ faite à égale distance des deux bases, et se confondront avec les centres de gravité des triangles abc, acd, ade. Ces triangles sont proportionnels aux volumes des prismes correspondants ; si donc nous appliquons aux points g, g', g'' des forces égales aux poids des différents prismes triangulaires, c'est-à-dire proportionnelles à la surface des triangles abc, acd, ade, le point d'application de la résultante de ces forces sera le centre de gravité du prisme pentagonal et coïncidera avec le centre de gravité G du polygone $abcde$.

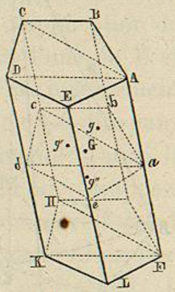

Fig. 92.

Donc, *le centre de gravité d'un prisme quelconque est situé au milieu de la droite qui joint les centres de gravité des deux bases.*

On peut déduire de là que *le centre de gravité d'un cylindre est au milieu de son axe.* En effet, la position du centre de gravité dans un prisme étant indépendante du nombre de ses faces, et le cylindre étant la limite vers laquelle tend un prisme régulier dont le nombre des faces augmente indéfiniment, il en résulte que, à la limite, le centre de gravité sera encore au milieu de la droite qui joint les centres de gravité des deux bases.

105. Centre de gravité d'une pyramide triangulaire. — Soit ABCD (*fig.* 93), la pyramide triangulaire donnée. Menons la médiane BE de la base BCD, et prenons sur cette droite une longueur $EG_1=\frac{BE}{3}$; le point G_1 est le centre de gravité du triangle BCD ; joignons ce point au sommet A, et menons des plans infiniment rapprochés parallèles à la base BCD ; ces plans décomposent la pyramide en tranches triangulaires infiniment minces, et tous ces triangles, par raison de similitude, ont leur centre de gravité sur la droite AG_1, et par suite le centre de gravité de la pyramide se trouve aussi sur cette droite.

En décomposant la pyramide en tranches parallèles à une autre face, celle ADC par exemple, on trouverait de même que le centre de gravité est sur la droite BG_2 qui joint le sommet B au centre de gravité de la face opposée. Les deux droites AG_1 et BG_2, évidemment contenues dans un même plan AEB, se coupent au point G qui est le centre de gravité de la pyramide.

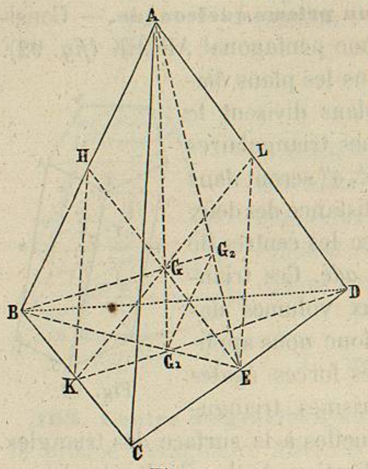

Fig. 93.

Comme pour la décomposition de la pyramide en tranches, nous avons mené les plans parallèlement à deux faces prises arbitrairement, on en conclut que *les quatre droites qui joignent les sommets d'un tétraèdre aux centres de gravité des faces opposées se coupent en un même point qui est le centre de gravité du tétraèdre.*

Menons la droite G_1G_2; cette droite est égale au tiers de l'arête BA et lui est parallèle, car dans le triangle ABE, on a :

$$EG_1 = \frac{BE}{3} \quad \text{et} \quad EG_2 = \frac{AE}{3}$$

Les triangles GG_1G_2 et BGA étant semblables, donnent :

$$\frac{GG_1}{GA} = \frac{G_1G_2}{AB} = \frac{1}{3}$$

Ajoutant les numérateurs aux dénominateurs, on aura :

$$\frac{GG_1}{GA + GG_1} = \frac{1}{4} \quad \text{d'où :} \quad GG_1 = \frac{1}{4} AG_1$$

Donc, *le centre de gravité d'une pyramide triangulaire est situé sur la droite qni joint le sommet au centre de gravité de la base et au quart de cette ligne à partir de la basse.*

Remarque I. — *Le centre de gravité d'une pyramide triangulaire coïncide avec le centre de quatre forces parallèles appliquées aux quatre sommets.* En effet, supposons que l'on ait appliqué, aux quatre sommets d'un tétraèdre ABCD, quatre forces égales dont nous désignerons par F l'intensité commune. En composant d'abord les forces appliquées aux points D et C on obtiendra une résultante égale à 2F appliquée en E, au milieu de la droite DC; pour trouver le point d'application de la résultante 3F des forces 2F et F appliquées l'une en E et l'autre en B, il faut diviser la droite BE en parties inversement proportionnelles à l'intensité des composantes, c'est-à-dire dans le rapport inverse des nombres 2 et 1 ; on obtiendra ainsi le point G_1 centre de gravité de la base BCD. Pour composer ensuite la force 3F appliquée en G_1 avec la dernière force F appliquée en A, il faudra diviser la droite AG_1 dans le rapport inverse des nombres 3 et 1, ce que donne précisément le point G, centre de gravité de la pyramide.

Remarque II. — De ce qui précède, on déduit la conclusion suivante : *Le centre de gravité d'une pyramide triangulaire est sur la droite qui joint le milieu de deux arêtes opposées et il divise cette ligne en deux parties égales.*

Il est évident que, quel que soit l'ordre suivi pour la composition des quatre forces F, le point d'application de la résultante ne changera pas. Cela admis, composons les forces appliquées en A et en B; le point d'application de la résultante 2F sera au point H, milieu de AB. Composons de même les forces appliquées en D et en C; leur résultante égale à 2F passera par le point E milieu de la droite CD. Il reste maintenant à composer les résultantes partielles égales chacune à 2F; le point d'application de la résultante finale du système sera au milieu de la droite HE. Or, nous avons démontré que ce point coïncide avec le centre de gravité de la pyramide; donc le centre de gravité de la pyramide partage la droite HE en deux parties égales.

Au lieu de composer la résultante des forces appliquées en A et B avec celle des forces appliquées en D et C, on pourrait arriver au même résultat en composant A et C avec B et D, ou bien encore en composant A et D avec B et C; on trouverait ainsi deux autres droites analogues à la droite HE contenant le centre de gravité. On voit donc que ces trois droites se coupent en leurs milieux ; cette proposition se démontre aussi en géométrie.

La mécanique offre souvent des exemples de démonstrations simples de certains théorèmes de géométrie.

106. Centre de gravité d'une pyramide quelconque. — Soit SABC.... (*fig.* 94) la pyramide donnée; décomposons cette pyramide en tétraèdres en menant, par l'une des arêtes SA, les plans diagonaux SAC, SAD,.... En suivant la même marche que pour le prisme quelconque, on démontrerait que les centres de gravité g, g', g'' de ces tétraèdres sont dans le plan *abcde* mené parallèlement à la base par le quart de la hauteur de la pyramide; ce plan doit contenir le centre de gravité de la pyramide, et on verrait qu'il coïncide avec le centre de gravité du polygone *abcde*. D'un autre côté et par raison de similitude, les centres de gravité de toutes les sections que l'on peut faire dans la pyramide, parallèlement à la base, sont sur la droite qui joint le sommet au centre de gravité de la base; par suite le centre de gravité de la pyramide est aussi sur cette droite.

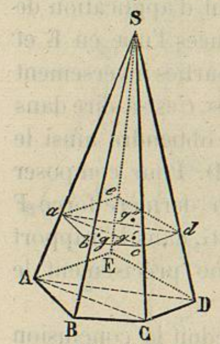
Fig. 94.

Donc, *le centre de gravité d'une pyramide quelconque est sur la droite qui joint le sommet au centre de gravité de la base et au quart de cette droite à partir de la base.*

107. — Le cône pouvant être considéré comme la limite vers laquelle tend une pyramide régulière à mesure qu'on augmente le nombre de ses faces, il s'ensuit que *le centre de gravité d'un cône est sur la droite qui joint le sommet au centre de la base et au quart de cette droite à partir de la base.*

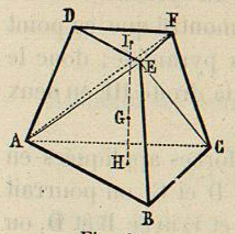
Fig. 95.

108. Centre de gravité d'un tronc de pyramide triangulaire à bases parallèles. — Soit ABCDEF (*fig.* 95) le tronc de pyramide donné. On voit de suite que, comme pour la pyramide, le centre de gravité est sur la droite IH qui joint les centres de gravité des deux bases. Pour connaître la position du centre de gravité G sur cette ligne, appliquons le théorème

des moments par rapport aux deux bases. Désignons par B et par b les bases ABC et DEF ; par x et par y la distance du centre de gravité du tronc à chacune de ses bases et soit h la hauteur de ce tronc.

Décomposons le tronc de pyramide en trois pyramides triangulaires en menant les plans AEC, AEF ; ces pyramides EABC, ADEF et EAFC sont les mêmes que celles servant à la détermination du volume du tronc. Leurs volumes respectifs sont, comme on le sait :

$$v=\frac{Bh}{3}\quad v'=\frac{bh}{3}\quad v''=\frac{h}{3}\sqrt{Bb}$$

Le volume total V est égal à la somme des volumes des trois pyramides v, v', v''. Les distances du centre de gravité de ces pyramides aux plans des moments sont respectivement égales à $\frac{h}{4}$ et $\frac{3h}{4}$ pour la première; $\frac{3h}{4}$ et $\frac{h}{4}$ pour la deuxième. Quant à la troisième on n'aperçoit pas immédiatement quelles sont les distances de son centre de gravité aux deux bases; mais en se rappelant (**105.** Remarque II) que ce centre de gravité est au milieu de la droite qui joindrait les milieux des deux côtés opposés AC et EF, on voit qu'il se trouve dans le plan mené à égale distance des deux bases et par suite sa distance à chacun des deux plans est $\frac{h}{2}$ ou $\frac{2h}{4}$.

Cela connu, l'équation des moments par rapport à la grande base donne :

$$Vx=\frac{Bh}{3}\times\frac{h}{4}+\frac{bh}{3}\times\frac{3h}{4}+\frac{h}{3}\sqrt{Bb}\times\frac{2h}{4}$$

Mettant $\frac{h^2}{12}$ en facteur commun dans le second membre, il vient :

$$Vx=\frac{h^2}{12}(B+3b+2\sqrt{Bb})$$

Par rapport à la petite base, on aura de même :

$$Vy=\frac{h^2}{12}(b+3B+2\sqrt{Bb})$$

En divisant membre à membre, il vient :

$$\frac{x}{y}=\frac{B+3b+2\sqrt{Bb}}{b+3B+2\sqrt{Bb}}$$

On peut se dispenser de mesurer les bases B et b, car on sait que les aires de deux polygones semblables sont proportionnelles aux carrés de leurs côtés homologues ; en désignant par L et l ces côtés, on pourra transformer la formule ci-dessus comme il suit :

$$\frac{x}{y}=\frac{L^2+3l^2+2Ll}{l^2+3L^2+2Ll}$$

109. Centre de gravité d'un tronc de pyramide quelconque à bases parallèles. — Si l'on décompose le tronc donné en troncs de pyramides triangulaires par des plans diagonaux, et si l'on remarque que les bases supérieures sont proportionnelles aux bases inférieures, on verra que le rapport $\frac{x}{y}$ des distances du centre de gravité de chacun d'eux, aux deux bases, est constant. Il résulte de là que tous ces différents centres de gravité se trouvent dans un même plan parallèle aux bases et coïncident avec les centres de gravité des triangles en lesquels cette section est décomposée par les plans diagonaux ; le centre de gravité du tronc se trouvera aussi dans ce plan.

De plus, les volumes des troncs de pyramides triangulaires sont proportionnels aux aires des triangles de la section qui contient leur centre de gravité ; donc, le centre de gravité du tronc de pyramide coïncide avec le centre de gravité de cette section.

Ainsi, *le centre de gravité d'un tronc de pyramide quelconque à bases parallèles est sur la droite qui joint les centres de gravité des deux bases, et il divise cette droite en deux segments additifs donnés par la relation :*

$$\frac{x}{y}=\frac{L^2+3l^2+2Ll}{l^2+3L^2+2Ll}$$

dans laquelle L et l représentent les côtés homologues de bases.

110. — Cette proposition s'étend au tronc de cône qui est la limite vers laquelle tend un tronc de pyramide lorsque le nombre de ses faces augmente indéfiniment.

Si le tronc de cône est à bases circulaires, les cercles étant proportionnels aux carrés de leurs rayons, la relation ci-dessus pourra s'écrire :

$$\frac{x}{y}=\frac{R^2+3r^2+2Rr}{r^2+3R^2+2Rr}$$

§ 4. — THÉORÈME DE GULDIN ET SES APPLICATIONS.

Guldin a démontré un théorème qui permet de calculer la surface ou le volume engendré par la rotation d'une ligne ou d'une surface plane autour d'un axe fixe, lorsqu'on connaît la distance de son centre de gravité à cet axe. Ce théorème comporte deux propositions : l'une relative aux surfaces et l'autre relative aux volumes.

111. Proposition I. — *La surface engendrée par une ligne plane qui tourne autour d'un axe situé dans son plan et sans la couper, a pour mesure la longueur de la ligne génératrice multipliée par la circonférence que décrit le centre de gravité.*

Prenons une ligne plane quelconque AB (*fig.* 96) ; considérons un élément mn, de cette courbe, assez petit pour qu'il puisse être regardé comme rectiligne, et soit x la distance de son milieu à l'axe OO′. L'élément mn, dans sa révolution autour de cet axe, engendre la surface d'un tronc de cône droit dont l'aire est égale à la génératrice mn multipliée par la circonférence moyenne.

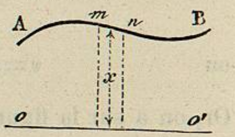

Fig. 96.

On a donc :

$$s=mn\times 2\pi x$$

En désignant par $m'n'$, $m''n''$... les différents éléments de la courbe, on aurait de même :

$$s'=m'n'\times 2\pi x'$$
$$s''=m''n''\times 2\pi x''$$

Ajoutant membre à membre, il vient :

$$S=2\pi(mn\times x+m'n'\times x'+m''n''\times x''+\ldots)$$

Or, la parenthèse exprime la somme des moments des différents éléments qui composent la courbe, par rapport à un plan mené suivant OO′ perpendiculairement au plan de la courbe. Si donc L est la longueur de la ligne et X la distance de son centre de gravité au plan des moments, on aura :

$$LX=mn\times x+m'n'\times x'+\ldots$$

et par suite : $S=2\pi X\times L$

ce qu'il fallait démontrer.