On peut se dispenser de mesurer les bases B et b, car on sait que les aires de deux polygones semblables sont proportionnelles aux carrés de leurs côtés homologues ; en désignant par L et l ces côtés, on pourra transformer la formule ci-dessus comme il suit :

$$\frac{x}{y}=\frac{L^2+3l^2+2Ll}{l^2+3L^2+2Ll}$$

109. Centre de gravité d'un tronc de pyramide quelconque à bases parallèles. — Si l'on décompose le tronc donné en troncs de pyramides triangulaires par des plans diagonaux, et si l'on remarque que les bases supérieures sont proportionnelles aux bases inférieures, on verra que le rapport $\frac{x}{y}$ des distances du centre de gravité de chacun d'eux, aux deux bases, est constant. Il résulte de là que tous ces différents centres de gravité se trouvent dans un même plan parallèle aux bases et coïncident avec les centres de gravité des triangles en lesquels cette section est décomposée par les plans diagonaux ; le centre de gravité du tronc se trouvera aussi dans ce plan.

De plus, les volumes des troncs de pyramides triangulaires sont proportionnels aux aires des triangles de la section qui contient leur centre de gravité ; donc, le centre de gravité du tronc de pyramide coïncide avec le centre de gravité de cette section.

Ainsi, *le centre de gravité d'un tronc de pyramide quelconque à bases parallèles est sur la droite qui joint les centres de gravité des deux bases, et il divise cette droite en deux segments additifs donnés par la relation :*

$$\frac{x}{y}=\frac{L^2+3l^2+2Ll}{l^2+3L^2+2Ll}$$

dans laquelle L et l représentent les côtés homologues de bases.

110. — Cette proposition s'étend au tronc de cône qui est la limite vers laquelle tend un tronc de pyramide lorsque le nombre de ses faces augmente indéfiniment.

Si le tronc de cône est à bases circulaires, les cercles étant proportionnels aux carrés de leurs rayons, la relation ci-dessus pourra s'écrire :

$$\frac{x}{y}=\frac{R^2+3r^2+2Rr}{r^2+3R^2+2Rr}$$

§ 4. — THÉORÈME DE GULDIN ET SES APPLICATIONS.

Guldin a démontré un théorème qui permet de calculer la surface ou le volume engendré par la rotation d'une ligne ou d'une surface plane autour d'un axe fixe, lorsqu'on connaît la distance de son centre de gravité à cet axe. Ce théorème comporte deux propositions : l'une relative aux surfaces et l'autre relative aux volumes.

111. PROPOSITION I. — *La surface engendrée par une ligne plane qui tourne autour d'un axe situé dans son plan et sans la couper, a pour mesure la longueur de la ligne génératrice multipliée par la circonférence que décrit le centre de gravité.*

Prenons une ligne plane quelconque AB (*fig.* 96) ; considérons un élément mn, de cette courbe, assez petit pour qu'il puisse être regardé comme rectiligne, et soit x la distance de son milieu à l'axe OO′. L'élément mn, dans sa révolution autour de cet axe, engendre la surface d'un tronc de cône droit dont l'aire est égale à la génératrice mn multipliée par la circonférence moyenne.

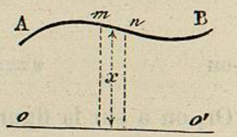

Fig. 96.

On a donc :

$$s=mn\times 2\pi x$$

En désignant par $m'n'$, $m''n''$... les différents éléments de la courbe, on aurait de même :

$$s'=m'n'\times 2\pi x'$$
$$s''=m''n''\times 2\pi x''$$

Ajoutant membre à membre, il vient :

$$S=2\pi(mn\times x+m'n'\times x'+m''n''\times x''+\ldots)$$

Or, la parenthèse exprime la somme des moments des différents éléments qui composent la courbe, par rapport à un plan mené suivant OO′ perpendiculairement au plan de la courbe. Si donc L est la longueur de la ligne et X la distance de son centre de gravité au plan des moments, on aura :

$$LX=mn\times x+m'n'\times x'+\ldots$$

et par suite :

$$S=2\pi X\times L$$

ce qu'il fallait démontrer.

112. Proposition II. — *Le volume engendré par une figure plane qui tourne autour d'un axe situé dans son plan et sans la couper, a pour mesure l'aire de la figure génératrice multipliée par la circonférence que décrit son centre de gravité.*

Soient S (*fig.* 97) la surface génératrice et OO′ l'axe situé dans son plan. Décomposons la surface S en éléments rectangulaires tels que *abcd* au moyen de perpendiculaires et de parallèles à l'axe OO′.

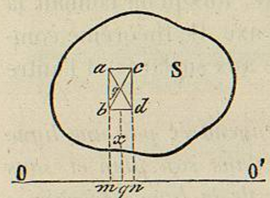

Fig. 97.

Le volume engendré par le petit rectangle *abcd* est égal à la différence des volumes de deux cylindres droits ayant pour hauteur commune *ac* et pour rayons *am* et *bm*; appelant *v* ce volume, on aura :

$$v = \pi\left(\overline{am}^2 - \overline{bm}^2\right) \times ac$$

ou

$$v = \pi(am + bm)(am - bm) \times ac$$

Or, on a sur la figure :

$$am + bm = 2gq = 2x \quad \text{et} \quad am - bm = ab$$

En remplaçant il vient :

$$v = 2\pi x \times ab \times ac$$

Mais $ab \times ac$ est la surface s du petit rectangle *abcd*; donc :

$$v = 2\pi x \times s$$

Pour tout autre petit rectangle, on aurait de même :

$$v' = 2\pi x' \times s'$$
$$v'' = 2\pi x'' \times s''$$
$$\ldots = \ldots\ldots\ldots$$

Ajoutant membre à membre, il vient :

$$V = 2\pi(sx + s'x' + s''x'' + \ldots)$$

Or, la parenthèse exprime la somme des moments des différents petits rectangles en lesquels est décomposée la surface S, par rapport à un plan mené suivant OO′ et perpendiculairement au plan de cette surface. Si donc X est l'ordonnée de son

centre de gravité, on aura :

$$SX = s'x' + sx + s''x'' + \ldots$$

et par suite :

$$V = 2\pi X \times S$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

113. Application à la détermination des surfaces et des volumes. — *Surface et volume du cône droit.* La surface latérale du cône est engendrée par la droite *ab* (*fig.* 98) tournant autour de l'axe *ao* passant par son extrémité *a*. Désignons *ab* par *l*, *bo* par *r* et *ao* par *h*. On a, d'après le théorème de Guldin :

$$S = l \times 2\pi x$$

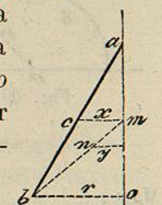

Fig. 98.

Or, dans le triangle *aob*, on a :

$$\frac{x}{r} = \frac{ac}{ab} = \frac{1}{2}$$

d'où

$$x = \frac{r}{2}$$

En remplaçant, il vient :

$$S = l \times 2\pi\frac{r}{2} = \pi r l$$

Le volume est engendré par le triangle rectangle *aob* tournant autour du même axe *ao*; on a donc :

$$V = \frac{rh}{2} \times 2\pi y$$

Mais le triangle *mob* donne :

$$\frac{y}{r} = \frac{mn}{mb} = \frac{1}{3}$$

d'où :

$$y = \frac{r}{3}$$

En remplaçant, il vient enfin :

$$V = \frac{rh}{2} \times 2\pi\frac{r}{3} = \pi r^2 \times \frac{h}{3}$$

114. Surface et volume de la sphère. — On a, d'après le théorème de Guldin (*fig.* 99) :

$$S = l \times 2\pi x$$

Or : $$l = \pi r$$

et $$x = \frac{\text{rayon} \times \text{corde}}{\text{arc}} = \frac{r \times 2r}{\pi r} = \frac{2r}{\pi}$$

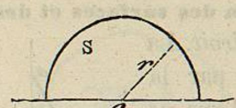

Fig. 99.

En remplaçant, il vient :

$$S = \pi r \times 2\pi \frac{2r}{\pi} = 4\pi r^2$$

On a de même pour le volume :

$$V = s \times 2\pi y$$

Mais : $$s = \frac{\pi r^2}{2} \quad \text{et} \quad y = \frac{4r}{3\pi}$$

Et par suite : $$V = \frac{\pi r^2}{2} \times 2\pi \frac{4r}{3\pi} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

115. Surface et volume engendrés par la rotation d'un hexagone régulier tournant autour d'un de ses côtés (*fig.* 100). — La surface sera donnée par la formule :

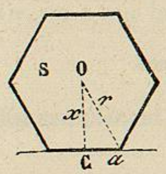

Fig. 100.

$$S = l \times 2\pi x \qquad (1)$$

dans laquelle l est la longueur du contour et x la distance du centre de gravité à l'axe de rotation. Si r est le rayon du cercle circonscrit, on aura :

$$l = 6r$$

Pour trouver x, remarquons que le triangle rectangle aOC donne :

$$x^2 = r^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2$$

équation pouvant s'écrire sous la forme

$$x^2 = \left(r + \frac{r}{2}\right)\left(r - \frac{r}{2}\right) = \frac{3r}{2} \times \frac{r}{2} = \frac{3r^2}{4}$$

d'où : $$x = \frac{r\sqrt{3}}{2}$$

En remplaçant dans la formule (1), il vient :

$$S = 6r \times 2\pi \frac{r\sqrt{3}}{2} = 6\pi r^2\sqrt{3}$$

Pour le volume, on a :

$$V = s \times 2\pi x$$

Or, on sait que la surface s d'un hexagone régulier en fonction du côté est :

$$s = \frac{3r^2\sqrt{3}}{2}$$

Par conséquent :

$$V = \frac{3r^2\sqrt{3}}{2} \times 2\pi \frac{r\sqrt{3}}{2} = \frac{9\pi r^3}{2}$$

116. Application à la recherche des centres de gravité. — Le théorème de Guldin permet encore, en le prenant à l'inverse, de déterminer le centre de gravité des lignes et des surfaces planes, lorsqu'on connaît les surfaces ou les volumes qu'elles engendrent dans leur révolution autour d'un axe situé dans leur plan. Voici quelques exemples.

117. Centre de gravité d'un arc de cercle. — L'arc ab (*fig.* 101), en tournant autour de l'axe mn passant par son centre, engendre la surface d'une zone sphérique de rayon r et de hauteur ab ; la géométrie nous apprend que cette surface est, en posant $ab = h$

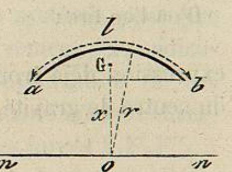

Fig. 101.

$$s = 2\pi r \times h$$

Cette même surface est, d'après le théorème de Guldin,

$$s = l \times 2\pi x$$

Par conséquent : $$l \times 2\pi x = 2\pi r \times h$$

D'où l'on tire : $$x = \frac{rh}{l} = \frac{\text{rayon} \times \text{corde}}{\text{arc}}$$

Cette expression de x est la même que celle trouvée par l'application du théorème des moments.

118. Centre de gravité d'un trapèze. — Soit le trapèze ABCD (*fig.* 102), et proposons-nous de déterminer la distance x du centre de gravité à la grande base. Posons AB = B et CD = b.

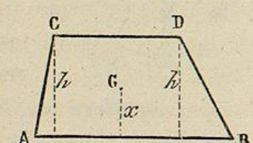

Fig. 102.

Le volume engendré par la rotation de ce trapèze en tournant autour de sa base AB, peut être considéré comme composé de deux parties : 1° du volume d'un cylindre droit de rayon h et de hauteur b; 2° du volume engendré par la rotation d'un triangle ayant pour base $B-b$ et pour hauteur h; ce dernier, donné par un théorème de géométrie, est :

$$\frac{1}{3}\pi h^2(B-b)$$

On a donc :

$$V=\pi h^2\times b+\frac{1}{3}\pi h^2(B-b)=\frac{\pi h^2}{3}(B+2b)$$

Ce même volume, exprimé par le théorème de Guldin, est :

$$V=\frac{B+b}{2}\times h\times 2\pi x$$

Par suite : $$\frac{B+b}{2}\times h\times 2\pi x=\frac{\pi h^2}{3}(B+2b)$$

D'où l'on tire : $$x=\frac{h}{3}\times\frac{B+2b}{B+b}$$

expression déjà trouvée au (**95**) pour la valeur de la distance du centre de gravité à la grande base.

CHAPITRE V

COMPOSITION DES FORCES QUELCONQUES ÉQUILIBRE DES SOLIDES

§ 1. — COMPOSITION ET RÉDUCTION AU MOINDRE NOMBRE D'UN SYSTÈME QUELCONQUE DE FORCES APPLIQUÉES A UN CORPS SOLIDE.

119. Forces situées dans un même plan. — *Leur réduction à une résultante unique ou à un couple.* Soient F, F', F''..... les forces données ; traçons, dans le plan de ces forces, deux axes rectangulaires Ox et Oy. Chaque force du système peut être décomposée en deux composantes respectivement perpendiculaires à chacun des axes, et les points d'application de ces composantes peuvent se transporter aux points où leur direction rencontre l'axe. Le système primitif des forces F, F', F''.... se trouve ainsi remplacé par deux groupes de forces parallèles dont l'un est formé par les composantes parallèles à l'axe Oy et appliquées aux différents points de l'axe Ox, et dont l'autre est formé par les composantes parallèles à l'axe Ox et appliquées aux différents points de l'axe Oy. Nous avons maintenant à composer ces deux groupes de forces parallèles ; cette composition présente trois cas différents :

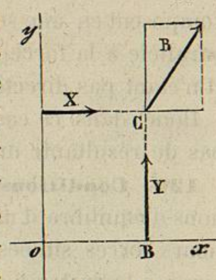

Fig. 103.

1° *Chacun des groupes admet une résultante unique.* Soient X et Y (*fig.* 103) les résultantes des deux groupes. Ces deux forces peuvent être considérées comme appliquées au point C où leurs directions se coupent, et là, elles peuvent se composer en une seule force R qui sera la résultante du système.

2° *L'un des deux groupes donne lieu à un couple, tandis que l'autre admet une résultante unique.* Soient $(X_1 - X_1)$ le couple (*fig.* 104) et Y_1 la résultante de l'autre groupe. Les forces X_1 et Y_1 dont les directions se coupent au point I', se composent en une