

posé de deux parties : 1° du volume d'un cylindre droit de rayon h et de hauteur b ; 2° du volume engendré par la rotation d'un triangle ayant pour base $B - b$ et pour hauteur h ; ce dernier, donné par un théorème de géométrie, est :

$$\frac{1}{3} \pi h^2 (B - b)$$

On a donc :

$$V = \pi h^2 \times b + \frac{1}{3} \pi h^2 (B - b) = \frac{\pi h^2}{3} (B + 2b)$$

Ce même volume, exprimé par le théorème de Guldin, est :

$$V = \frac{B + b}{2} \times h \times 2\pi x$$

Par suite :
$$\frac{B + b}{2} \times h \times 2\pi x = \frac{\pi h^2}{3} (B + 2b)$$

D'où l'on tire :
$$x = \frac{h}{3} \times \frac{B + 2b}{B + b}$$

expression déjà trouvée au (95) pour la valeur de la distance du centre de gravité à la grande base.

CHAPITRE V

COMPOSITION DES FORCES QUELCONQUES ÉQUILIBRE DES SOLIDES

§ 1. — COMPOSITION ET RÉDUCTION AU MOINDRE NOMBRE D'UN SYSTÈME QUELCONQUE DE FORCES APPLIQUÉES A UN CORPS SOLIDE.

119. Forces situées dans un même plan. — *Leur réduction à une résultante unique ou à un couple.* Soient $F, F', F'' \dots$ les forces données; traçons, dans le plan de ces forces, deux axes rectangulaires Ox et Oy . Chaque force du système peut être décomposée en deux composantes respectivement perpendiculaires à chacun des axes, et les points d'application de ces composantes peuvent se transporter aux points où leur direction rencontre l'axe. Le système primitif des forces $F, F', F'' \dots$ se trouve ainsi remplacé par deux groupes de forces parallèles dont l'un est formé par les composantes parallèles à l'axe Oy et appliquées aux différents points de l'axe Ox , et dont l'autre est formé par les composantes parallèles à l'axe Ox et appliquées aux différents points de l'axe Oy . Nous avons maintenant à composer ces deux groupes de forces parallèles; cette composition présente trois cas différents :

1° *Chacun des groupes admet une résultante unique.* Soient X et Y (fig. 103) les résultantes des deux groupes. Ces deux forces peuvent être considérées comme appliquées au point C où leurs directions se coupent, et là, elles peuvent se composer en une seule force R qui sera la résultante du système.

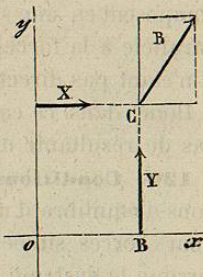


Fig. 103.

2° *L'un des deux groupes donne lieu à un couple, tandis que l'autre admet une résultante unique.* Soient $(X_1 - X_1)$ le couple (fig. 104) et Y_1 la résultante de l'autre groupe. Les forces X_1 et Y_1 , dont les directions se coupent au point I' , se composent en une

seule force R' que l'on peut appliquer au point I où sa direction rencontre celle de la force $-X_1$; en ce point I la résultante partielle R' peut être remplacée par ses composantes X_1 et Y_1 . Mais les forces X_1 et $-X_1$ sont égales et directement opposées; elles se détruisent et il ne reste que la force $R = Y_1$, appliquée au point I , qui est la résultante du système. Donc, dans ce cas, le système des forces données admet encore une résultante unique.

3° *Chacun des groupes se réduit à un couple.* — Soient $(X_1 - X_1)$ (fig. 105) et $(Y_1 - Y_1)$ ces deux couples; les forces X_1 et Y_1 se

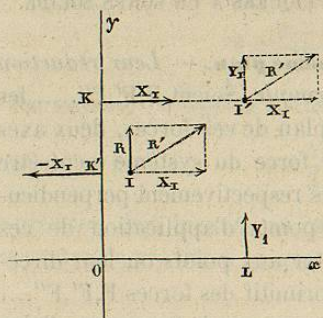


Fig. 104.

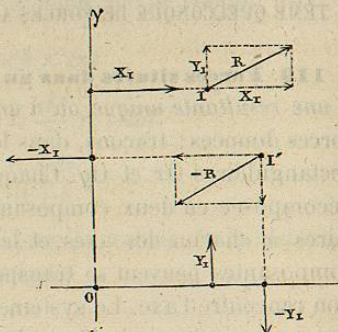


Fig. 105.

composent en une seule force R appliquée au point I , où leurs directions se rencontrent; de même, les forces $-X_1$ et $-Y_1$ se composent en une seule force $-R$ qui est évidemment égale et parallèle à la force R ; ces deux forces étant de sens contraire et n'étant pas directement opposées, forment un couple.

Donc, dans ce cas, le système des forces données n'admet pas de résultante unique.

120. Conditions d'équilibre. — Pour établir les conditions d'équilibre d'un corps solide soumis à l'action de plusieurs forces situées dans un même plan, remarquons que, lorsque le système admet une résultante unique, la projection de la résultante, sur l'un quelconque des deux axes, est égale à la somme algébrique des projections des forces données sur ce même axe, car les composantes des forces $F, F', F'' \dots$ parallèles à l'axe des X par exemple, ne sont autres que les projections de ces forces sur cet axe. On considère comme positives les projections dirigées de O vers x , et comme négatives les

projections dirigées en sens inverse; il en est de même pour l'axe Oy ; les projections dirigées de O vers y sont regardées comme positives, et les projections dirigées en sens contraire comme négatives.

Remarquons aussi que le moment de la résultante, par rapport au point de rencontre des axes, est égal à la somme algébrique des moments des forces proposées. En effet, d'après ce que nous avons démontré (51), on sait que le moment de chacune des forces $F, F', F'' \dots$ est égal à la somme des moments de ses composantes parallèles aux axes; on sait aussi (72) que la même égalité a lieu pour chacun des deux groupes de forces parallèles appliquées aux deux axes. Donc, la somme des moments des forces données par rapport au point O est égale à la somme des moments des forces X et Y , et par suite égale au moment de leur résultante R .

Maintenant, pour que le corps solide sur lequel sont appliquées les forces $F, F', F'' \dots$ soit en équilibre, il faut et il suffit que ces forces se réduisent à une résultante unique, et que cette résultante soit nulle. Or, quand ceci a lieu, la somme des projections de toutes les forces sur un axe quelconque est nulle, ainsi que la somme des moments par rapport à un point quelconque pris dans leur plan.

Donc, pour qu'un corps solide soumis à l'action de plusieurs forces situées dans un même plan soit en équilibre, il faut et il suffit que ces forces satisfassent aux deux conditions suivantes :

1° Que la somme de leurs projections sur deux axes qui se coupent dans leur plan soit nulle pour chacun d'eux;

2° Que la somme de leurs moments par rapport au point de rencontre de ces axes soit égale à O .

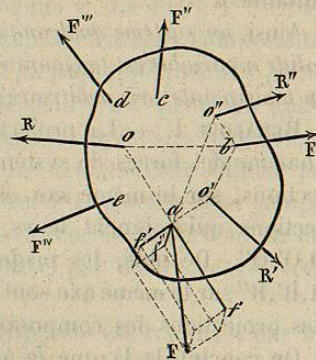


Fig. 106.

121. Forces dirigées arbitrairement dans l'espace. Leur réduction à trois. — Considérons un système quelconque de forces $F, F', F'' \dots$, appliquées aux points $abc \dots$ (fig. 106) d'un

même corps solide. Prenons arbitrairement, dans ce corps, trois points O, O', O'' , non situés en ligne droite et joignons ces trois points aux points a, b, c, \dots d'application des forces. Si la force F n'est pas située dans le plan O, O', O'' , on peut admettre que son point d'application ne s'y trouve pas, puisqu'il peut être situé en un point quelconque de sa direction; dans ce cas, la force F peut se décomposer, par la règle du parallépipède des forces, en trois composantes f, f', f'' dirigées suivant aO, aO', aO'' et pouvant être supposées appliquées aux points O, O', O'' .

Si la force F est comprise dans le plan O, O', O'' , les trois droites aO, aO', aO'' le sont aussi, et la décomposition de la force peut s'effectuer d'une infinité de manières; on peut, par exemple, décomposer la force suivant les deux directions aO et aO' , et supposer nulle la troisième composante. La force F' peut à son tour se décomposer en trois autres dirigées suivant les trois droites bO, bO', bO'' et que l'on peut considérer comme étant respectivement appliquées aux points O, O', O'' . Il en sera de même pour toutes les autres forces proposées. Le système primitif se trouvera ainsi remplacé par trois groupes de forces concourantes dont le premier, appliqué en O , donnera une résultante R ; le deuxième, appliqué en O' , donnera une résultante R' , et le troisième, appliqué en O'' , fournira une résultante R'' .

Ainsi, un système quelconque de forces appliquées à un corps solide invariable est toujours réductible à trois forces appliquées en trois points pris arbitrairement dans le corps.

REMARQUE I. — La projection, sur un axe quelconque, de chacune des forces du système, est égale à la somme des projections, sur le même axe, de ses composantes suivant les directions qui joignent leurs points d'application aux points O, O', O'' . De plus, les projections des résultantes partielles R, R', R'' sur le même axe sont respectivement égales à la somme des projections des composantes appliquées en O, O', O'' .

On conclut de là que la somme des projections sur un axe quelconque des trois forces R, R', R'' est égale à la somme des projections sur le même axe de toutes les forces du système.

REMARQUE II. — Le même raisonnement que nous venons de faire pour la remarque précédente nous conduirait à la con-

clusion suivante : La somme des moments par rapport à un axe quelconque des trois forces R, R', R'' est égale à la somme des moments par rapport au même axe de toutes les forces du système.

122. Réduction d'un système quelconque de forces appliquées à un corps solide à deux forces dont l'une passe par un point pris arbitrairement. — Réduisons d'abord le système

considéré à trois forces F, F', F'' (fig. 107) appliquées en trois points M, M', M'' , pris arbitrairement dans le corps. Ces trois forces peuvent se réduire à deux.

En effet, considérons les deux plans qui passent, le premier par le point M et la force F'' , le deuxième par ce même point M et par la force F' ; soit ME leur intersection, ou s'ils se confondent, une droite tracée dans le plan commun, et prenons

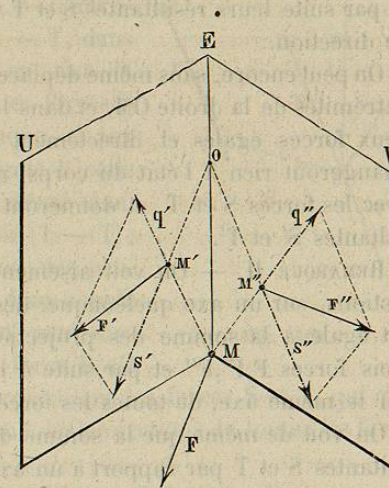


Fig. 107.

sur cette droite un point quelconque O . La force F'' , située dans le plan OMM'' , peut se décomposer en deux composantes dirigées suivant OM'' et MM'' que l'on peut appliquer aux points M et O . La force F' située dans le plan OMM' peut, elle aussi, se décomposer en deux composantes appliquées aux mêmes points M et O . Le point M se trouve actuellement sollicité par trois forces, c'est-à-dire par la force F et par les deux composantes de F' et de F'' , et ces trois forces se composent en une seule S . Le point O est aussi sollicité par deux forces se composant en une seule T .

Donc, le système des forces proposées est remplacé par les deux forces S et T , dont l'une passe par le point M pris à volonté.

Ainsi, un système quelconque de forces appliquées à un corps solide invariable est toujours réductible à deux forces dont l'une passe par un point pris arbitrairement.

Généralement, ces deux forces ne sont pas dans un même plan, et on ne peut pas pousser plus loin la réduction.

REMARQUE I. — La réduction à deux forces peut s'opérer d'une infinité de manières. En effet, on voit que, sans changer le point M, il suffit de déplacer le point O le long de la droite ME, pour que les composantes appliquées en O et en M varient, et par suite leurs résultantes S et T varient aussi d'intensité et de direction.

On peut encore, sans même déplacer le point O, appliquer aux extrémités de la droite OM, et dans la direction de cette droite, deux forces égales et directement opposées; ces forces ne changeront rien à l'état du corps, mais elles se composeront avec les forces S et T, et donneront lieu à deux nouvelles résultantes S' et T'.

REMARQUE II. — On voit aisément que la somme des projections, sur un axe quelconque, des deux résultantes S et T, est égale à la somme des projections sur le même axe, des trois forces F, F', F'' et par suite à la somme des projections sur le même axe, de toutes les forces du système.

On voit de même que la somme des moments des deux résultantes S et T par rapport à un axe quelconque, est égale à la somme des moments par rapport au même axe, des trois forces F, F', F'', et par suite, à la somme des moments par rapport au même axe, de toutes les forces du système.

On conclut de là que : 1° *Quand un système quelconque de forces a été réduit à deux résultantes, la somme des projections de ces deux résultantes sur un axe quelconque est égale à la somme des projections, sur le même axe, de toutes les forces du système.*

2° *Quand un système quelconque de forces a deux résultantes, la somme des moments de ces deux résultantes par rapport à un axe quelconque est égale à la somme des moments, par rapport au même axe, de toutes les forces du système.*

123. Réduction d'un système quelconque de forces à une force et à un couple. — Lorsqu'un système quelconque de forces a été réduit aux deux résultantes S et T, on peut encore remplacer ces deux forces par une force et un couple.

En effet, soient S et T (fig. 108) les deux résultantes auxquelles on a réduit le système; appliquons au point O deux forces T et -T directement opposées, égales et parallèles à la force

T appliquée en M; ces forces ne changent rien à l'état du corps, et l'on peut composer la force T avec la force S en une résultante R, tandis que les forces T et -T forment un couple.

Donc, *un système quelconque de forces appliquées à un corps solide invariable peut toujours se réduire à une force et à un couple.*

REMARQUE IMPORTANTE. — L'introduction des forces T et -T, dans le système, n'a changé en rien la somme des projections des forces S et T sur un axe quelconque, et par suite cette somme est égale à celle des projections, sur le même axe, de la force R et du couple (T - T); mais la somme algébrique des projections des deux forces d'un couple étant toujours nulle, on peut dire que la projection de la force R est égale à la somme des projections des forces S et T, qui elle-même est égale à la somme des projections de toutes les forces du système.

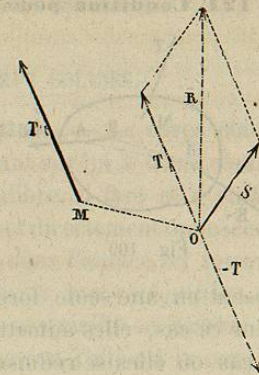


Fig. 108.

Il résulte de là que la projection de la force R, sur un axe quelconque, est indépendante de la position du point O pris arbitrairement dans le corps. Faisons passer par ce point O trois axes rectangulaires; les projections de la force R sur ces axes seront données par les équations :

$$\begin{aligned} R_x &= \sum F_x \\ R_y &= \sum F_y \\ R_z &= \sum F_z \end{aligned}$$

Mais, une droite est déterminée en grandeur et en direction lorsqu'on connaît ses projections sur trois axes rectangulaires, puisqu'elle est la diagonale du parallépipède construit sur ces trois projections. Donc, la force R est constante en grandeur et en direction, quel que soit le point O choisi. On a donné à cette constante le nom de *résultante de translation*.

REMARQUE II. — La projection d'une droite sur un axe quelconque ne change pas quand on déplace cette droite parallèlement à elle-même. Donc, *la résultante de translation d'un sys-*

tème quelconque de forces est égale en grandeur et en direction à la résultante qu'on obtiendrait en transportant au point O , et parallèlement à elles-mêmes, toutes les forces du système, et en les composant en une seule.

124. Condition pour qu'un système quelconque de forces admette une résultante unique. —

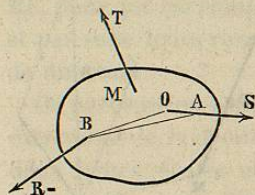


Fig. 109.

Quand on a réduit le système proposé à deux résultantes S et T (fig. 109), il peut arriver que ces deux forces soient dans un même plan, ou bien dans des plans différents. Si elles sont dans un même plan, elles sont concourantes, et alors elles se composent en une seule force ; ou bien elles sont parallèles, et, dans ce cas, elles admettent aussi une résultante unique, sauf le cas où elles se réduisent à un couple.

Si les deux forces S et T sont dans des plans différents, elles ne peuvent avoir de résultante unique. En effet, supposons que cette résultante existe, et appliquons au corps une force $-R$ qui lui soit égale et directement opposée. Les trois forces S , T et $-R$ se feront équilibre, et cet équilibre ne sera pas troublé en fixant le point d'application B de la force $-R$ et un point quelconque O de la force S ; mais ces forces se trouvant détruites, il ne reste que la force T .

Le corps ne pouvant plus que tourner autour de la droite OB , il faut, pour que l'équilibre subsiste, que la force T soit dans un même plan avec cette droite (19). En fixant le point B et un autre point A pris sur la direction de S , on verrait de même que la force T doit se trouver dans un même plan avec la droite AB ; cette force se trouvera donc dans le plan OBA qui contient la force S ; mais, par hypothèse, les deux forces S et T ne sont pas dans un même plan, et, par suite, ces deux forces n'admettent pas de résultante unique.

Ainsi, pour qu'un système quelconque de forces appliquées à un corps solide invariable admette une résultante unique, il faut et il suffit que les deux résultantes auxquelles on peut réduire le système soient dans un même plan, et qu'elles ne forment pas un couple.

REMARQUE. — Le point d'application B de la force $-R$

étant pris quelconque sur la direction de cette force, il s'ensuit que, pour l'équilibre, la force $-R$ doit être située dans le plan des deux autres.

Donc, trois forces appliquées à un corps solide libre et non situées dans un même plan ne peuvent se faire équilibre.

§ 2. — ÉQUILIBRE DES CORPS SOLIDES.

125. Équilibre d'un corps solide libre. — Le corps étant libre, on réduit toutes les forces agissant sur lui à deux résultantes S et T , et, pour qu'il y ait équilibre, il faut et il suffit que ces deux résultantes soient égales et directement opposées.

Ainsi, pour qu'un corps solide libre dans l'espace, et soumis à l'action d'un système quelconque de forces, soit en équilibre, il faut et il suffit que les deux résultantes auxquelles on ramène le système soient égales et directement opposées. Telle est la condition géométrique de l'équilibre.

Pour déterminer les conditions analytiques, remarquons que si les deux composantes S et T sont égales et directement opposées, il est évident que : 1° la somme algébrique de leurs projections sur un axe quelconque est nulle ; 2° la somme algébrique de leurs moments par rapport à un axe quelconque est également nulle.

Cela posé, rapportons le système des forces proposées à trois axes rectangulaires, et si l'équilibre existe, on aura pour chacun des axes :

$$Sx + Tx = 0 \quad (1)$$

$$Sy + Ty = 0 \quad (2)$$

$$Sz + Tz = 0 \quad (3)$$

$$MxS + MxT = 0 \quad (4)$$

$$MyS + MyT = 0 \quad (5)$$

$$MzS + MzT = 0 \quad (6)$$

Mais, en vertu de ce qui a été dit (122, remarque II), ces six équations reviennent aux équations suivantes :

$$\Sigma Fx = 0$$

$$\Sigma Fy = 0$$

$$\Sigma Fz = 0$$

$$\Sigma MxF = 0$$

$$\Sigma MyF = 0$$

$$\Sigma MzF = 0$$