tème quelconque de forces est égale en grandeur et en direction à la résultante qu'on obtiendrait en transportant au point O, et parallèlement à elles-mêmes, toutes les forces du système, et en les composant en une seule.

124. Condition pour qu'un système quelconque de forces admette une résultante unique. — Quand on a réduit le système proposé à deux résultantes S et T (*fig.* 109), il peut arriver que ces deux forces soient dans un même plan, ou bien dans des plans différents. Si elles sont dans un même plan, elles sont concourantes, et alors elles se composent en une seule force ; ou bien elles sont parallèles, et, dans ce cas, elles admettent aussi une résultante unique, sauf le cas où elles se réduisent à un couple.

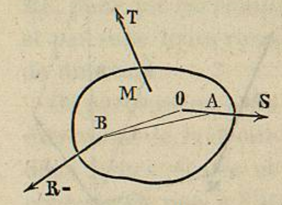

Fig. 109.

Si les deux forces S et T sont dans des plans différents, elles ne peuvent avoir de résultante unique. En effet, supposons que cette résultante existe, et appliquons au corps une force — R qui lui soit égale et directement opposée. Les trois forces S, T et — R se feront équilibre, et cet équilibre ne sera pas troublé en fixant le point d'application B de la force — R et un point quelconque O de la force S; mais ces forces se trouvant détruites, il ne reste que la force T.

Le corps ne pouvant plus que tourner autour de la droite OB, il faut, pour que l'équilibre subsiste, que la force T soit dans un même plan avec cette droite (**19**). En fixant le point B et un autre point A pris sur la direction de S, on verrait de même que la force T doit se trouver dans un même plan avec la droite AB ; cette force se trouvera donc dans le plan OBA qui contient la force S : mais, par hypothèse, les deux forces S et T ne sont pas dans un même plan, et, par suite, ces deux forces n'admettent pas de résultante unique.

Ainsi, *pour qu'un système quelconque de forces appliquées à un corps solide invariable admette une résultante unique, il faut et il suffit que les deux résultantes auxquelles on peut réduire le système soient dans un même plan, et qu'elles ne forment pas un couple.*

Remarque. — Le point d'application B de la force — R

étant pris quelconque sur la direction de cette force, il s'ensuit que, pour l'équilibre, la force — R doit être située dans le plan des deux autres.

Donc, *trois forces appliquées à un corps solide libre et non situées dans un même plan ne peuvent se faire équilibre.*

§ 2. — ÉQUILIBRE DES CORPS SOLIDES.

125. Équilibre d'un corps solide libre. — Le corps étant libre, on réduit toutes les forces agissant sur lui à deux résultantes S et T, et, pour qu'il y ait équilibre, il faut et il suffit que ces deux résultantes soient égales et directement opposées.

Ainsi, *pour qu'un corps solide libre dans l'espace, et soumis à l'action d'un système quelconque de forces, soit en équilibre, il faut et il suffit que les deux résultantes auxquelles on ramène le système soient égales et directement opposées.* Telle est la condition géométrique de l'équilibre.

Pour déterminer les conditions analytiques, remarquons que si les deux composantes S et T sont égales et directement opposées, il est évident que : 1° la somme algébrique de leurs projections sur un axe quelconque est nulle ; 2° la somme algébrique de leurs moments par rapport à un axe quelconque est également nulle.

Cela posé, rapportons le système des forces proposées à trois axes rectangulaires, et si l'équilibre existe, on aura pour chacun des axes :

$$Sx + Tx = 0 \qquad (1)$$
$$Sy + Ty = 0 \qquad (2)$$
$$Sz + Tz = 0 \qquad (3)$$
$$MxS + MxT = 0 \qquad (4)$$
$$MyS + MyT = 0 \qquad (5)$$
$$MzS + MzT = 0 \qquad (6)$$

Mais, en vertu de ce qui a été dit (**122**, remarque II), ces six équations reviennent aux équations suivantes :

$$\Sigma Fx = 0$$
$$\Sigma Fy = 0$$
$$\Sigma Fz = 0$$
$$\Sigma MxF = 0$$
$$\Sigma MyF = 0$$
$$\Sigma MzF = 0$$

Ces six équations sont nécessaires et suffisantes. En effet, les relations (1), (2) et (3) montrent que les deux résultantes sont égales et de sens contraire; mais elles ne prouvent pas que les deux forces soient directement opposées, car ces trois relations seraient également satisfaites dans le cas où les deux forces formeraient un couple. D'un autre côté, les deux composantes S et T étant égales et de sens contraire, les relations (4), (5) et (6) ne peuvent être satisfaites qu'à la condition que ces deux forces soient appliquées au même point.

Donc, ces six équations sont nécessaires et suffisantes pour prouver que les deux résultantes S et T sont égales et directement opposées, auquel cas elles se font équilibre.

126. Cas particuliers. — Dans certains cas particuliers que nous allons examiner, ces six équations peuvent se réduire à un nombre moindre.

1° *Les forces sont toutes dans un même plan.* Si, dans ce cas, on mène les deux axes x et y dans le plan des forces, les conditions d'équilibre se réduisent à trois :

$$\Sigma Fx = 0$$
$$\Sigma Fy = 0$$
$$\Sigma Fz = 0$$

car les trois autres sont satisfaites d'elles-mêmes.

2° *Les forces sont parallèles et situées dans un même plan.* Prenant encore le plan des forces pour plan des x et des y, et dirigeant l'axe y parallèlement à la direction des forces, on voit que les six équations d'équilibre se réduisent à deux :

$$\Sigma Fy = 0$$
$$\Sigma M y F = 0$$

car les quatre autres sont satisfaites d'elles-mêmes.

3° *Les forces sont parallèles, mais situées dans des plans différents.* Prenant pour plan des x et des y un plan perpendiculaire à la direction commune des forces, les conditions d'équilibre se réduisent, dans ce cas, aux trois équations suivantes :

$$\Sigma Fz = 0$$
$$\Sigma M x F = 0$$
$$\Sigma M y F = 0$$

car les trois autres sont satisfaites d'elles-mêmes.

127. Équilibre d'un corps solide mobile autour d'un point fixe. — Considérons un corps solide mobile autour d'un de ses points O, rendu fixe. Nous savons que toutes les forces qui le sollicitent peuvent se réduire à deux, S et T, dont on fera passer l'une S, par le point fixe; cette force sera détruite par la résistance de ce point, et le corps restera soumis à la seule action de l'autre force T. Or, pour qu'il y ait équilibre, il faut nécessairement que cette seconde force soit aussi détruite, ce qui exige qu'elle passe aussi par le point fixe. Les deux forces S et T, appliquées au même point fixe O, se composeront en une résultante R appliquée au même point.

Donc, *pour qu'un corps solide assujetti à tourner autour d'un point fixe soit en équilibre, il faut que les forces qui le sollicitent se réduisent à une résultante unique passant par le point fixe.*

Si nous faisons passer, par le point fixe, trois axes rectangulaires, les relations analytiques de l'équilibre se réduiront à trois :

$$\Sigma M x F = 0$$
$$\Sigma M y F = 0$$
$$\Sigma M z F = 0$$

car elles expriment complètement que les deux résultantes S et T passent par le même point.

128. Pression sur le point fixe. — Le corps peut être considéré comme libre à la condition d'appliquer au point fixe une force — R égale et directement opposée à la résultante des forces S et T; car, dans ces conditions, l'équilibre ne cessera pas d'exister. La force — R mesurera donc la réaction du point fixe, et comme elle est toujours égale et contraire à l'action, on en conclut que la pression supportée par le point fixe est égale à la résultante de toutes les forces du système. Cette résultante n'est autre chose que la force que nous avons appelée résultante de translation, dans le cas où le couple résultant est nul. On peut donc l'obtenir en transportant au point fixe, et parallèlement à elles-mêmes, toutes les forces du système, et en les composant par la règle du polygone des forces.

129. Cas où le corps est sollicité par son poids seul. — Le poids du corps pouvant être considéré comme une force verticale appliquée à son centre de gravité, *il faut, pour qu'il y ait* *équilibre, que la verticale passant par le point fixe passe aussi par le centre de gravité du corps.*

130. Équilibre d'un corps mobile autour de deux points fixes. — Considérons un corps M (*fig.* 110) ayant deux points fixes O et O′ ; tous les points de la droite OO′ sont nécessairement fixes, et le corps est assujetti à tourner autour de cet axe. Les deux résultantes S et T auxquelles se réduisent toutes les forces qui sollicitent le corps, peuvent être choisies de manière que l'une d'elles, S, par exemple, passe par l'un des points fixes O ; cette force se trouve détruite par la résistance de ce point, et, pour qu'il y ait équilibre, il faut et il suffit que l'autre résultante T soit aussi détruite, ce qui arrivera lorsque cette force se trouvera dans un même plan avec l'axe fixe.

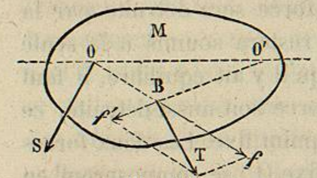

Fig. 110.

Donc, *pour qu'un corps solide, possédant deux points fixes, soit en équilibre, il suffit que l'une des résultantes auxquelles on réduit le système des forces qui le sollicitent, passe par l'axe fixe, et que l'autre résultante soit dans un même plan avec cet axe.*

Si l'on prend l'axe fixe OO′ pour l'axe des x, la seule relation analytique de l'équilibre

$$\Sigma M x F = 0$$

exprime complètement que les deux résultantes S et T sont situées dans des plans passant par l'axe fixe, auquel cas l'équilibre existe.

131. Pression sur les points fixes. — Pour déterminer la pression supportée par chacun des points fixes O et O′, on décompose la force T appliquée au point B en deux composantes f et f' dirigées suivant BO et BO′. La composante f' représente la pression supportée par le point O′, et la pression sur le point O sera égale à la résultante des forces S et f.

132. Cas où le corps est sollicité par son poids seul. — Toutes les actions de la pesanteur sur le corps se réduisent à une résultante unique appliquée en son centre de gravité ; or, cette résultante ne pouvant pas être nulle, il faut, pour qu'il y ait équilibre, qu'elle soit détruite par la résistance de l'axe fixe.

Donc, *pour qu'un corps solide mobile autour d'un axe fixe soit en équilibre, il faut et il suffit que son centre de gravité soit dans le plan vertical passant par l'axe.*

133. Différentes sortes d'équilibre. — Nous venons d'établir la condition nécessaire et suffisante pour l'équilibre d'un corps pesant mobile autour d'un point fixe ou d'un axe fixe ; dans l'un des cas, comme dans l'autre, il faut que la verticale passant par le centre de gravité, rencontre le point fixe ou l'axe fixe. Or, cette condition peut être remplie de trois manières différentes, c'est-à-dire que le centre de gravité peut être soit au-dessus, soit au-dessous du point ou de l'axe fixe, ou bien il peut se confondre avec lui.

De là, trois sortes d'équilibre : 1° *équilibre stable ;* 2° *équilibre instable* et 3° *équilibre indifférent.*

134. Équilibre stable. — On dit que l'équilibre est *stable*, lorsque le corps étant écarté de sa position d'équilibre, puis abandonné à lui-même, tend à revenir à cette position d'équilibre par une suite d'oscillations.

Soit M (*fig.* 111) un corps solide mobile autour du point A, et G son centre de gravité, situé au-dessous du point fixe ; cette position du centre de gravité relativement au point A, correspond à l'équilibre stable. En effet, si nous déplaçons le corps de manière à lui faire occuper la position M′, son centre de gravité viendra en G′, et son poids P, force qui est toujours dirigée verticalement, pourra être décomposé en deux composantes dont l'une, dirigée suivant AG′, sera détruite, et dont l'autre, perpendiculaire à cette droite, aura pour effet de faire tourner le corps autour du point A, jusqu'à ce qu'il soit revenu à sa position primitive.

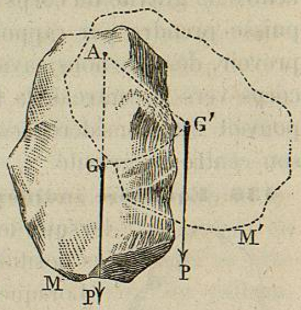

Fig. 111.

Ainsi, *pour que l'équilibre soit stable, il faut que le centre de gravité soit au-dessous du point fixe.*

135. Équilibre instable. — L'équilibre est dit *instable* lorsque le corps étant très peu écarté de sa position d'équilibre, tend à s'en éloigner de plus en plus.

Cet équilibre a lieu lorsqu'on donne au corps M, de la figure précédente, la nouvelle position N (*fig.* 112) dans laquelle le centre de gravité se trouve encore sur la verticale du point fixe, mais au-dessus de ce point. En effet, si nous dérangeons un peu le corps pour l'amener en N′, par exemple, son poids P peut se décomposer en deux forces ; l'une, passant par le point fixe, est détruite, et l'autre, perpendiculaire à la première, tend à faire continuer au corps la rotation commencée.

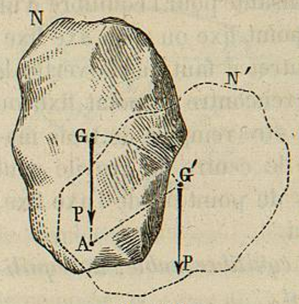

Fig. 112.

Remarque. — On voit par les deux cas traités ci-dessus, que l'équilibre n'est stable que lorsque le centre de gravité du corps occupe la position la plus basse qu'il puisse prendre par rapport au point fixe. Cela était facile à prévoir, dès que nous savions que la pesanteur attire tous les corps vers le centre de la terre, et que son action sur un corps pouvait être considérée comme une force unique appliquée à son centre de gravité.

136. Équilibre indifférent. — L'équilibre est *indifférent* lorsque le corps est en équilibre dans toutes les positions qu'on lui fait prendre.

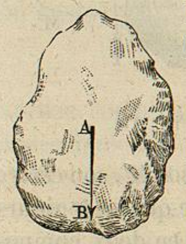

Fig. 113.

Lorsque le centre de gravité du corps coïncide avec le point fixe A (*fig.* 113), on ne peut plus décomposer son poids en deux composantes dont l'une tend à faire tourner le corps, et celui-ci reste en équilibre dans toutes les positions.

Ainsi, *quand on fixe le centre de gravité d'un corps, celui-ci est en équilibre indifférent.*

Tout ce que nous venons de dire pour un corps possédant un point fixe s'applique également, sans modification, à un corps assujetti à tourner autour d'un axe fixe.

137. Considérations sur l'équilibre instable et sur l'équilibre indifférent. — L'équilibre instable est, pour un corps, une position purement hypothétique, irréalisable en pratique. En effet, nous savons qu'un déplacement du corps, quelque

petit qu'il soit, détruit cet équilibre; or, plusieurs causes extérieures, les vibrations, les mouvements de l'air ambiant, la déformation des pièces qui fléchissent, etc., devant amener inévitablement un dérangement dans la position du corps, il s'ensuit que celui-ci ne peut pas conserver sa position primitive correspondant à l'équilibre instable.

L'équilibre indifférent est, au contraire, réalisé dans un grand nombre de cas; il est surtout indispensable pour annuler l'action de la pesanteur sur les organes des machines animés d'un mouvement de rotation; pour cela, on fait en sorte que leur centre de gravité soit situé sur l'axe de rotation. Dans les machines à vapeur, le centre de gravité du volant se trouve sur l'axe de l'arbre moteur; s'il en était autrement, la pesanteur tendrait tantôt à accélérer, tantôt à ralentir le mouvement, ce qui amènerait des irrégularités nuisibles à la marche de la machine et en détériorerait les organes. Les roues d'engrenages, les poulies, les balanciers, doivent également satisfaire à cette condition; pour les pièces qui, par leur forme, ne s'y prêtent pas facilement, on emploie des contre-poids. Ainsi, pour les aiguilles des horloges de dimensions assez considérables, on dispose sur le prolongement de chacune d'elles et au delà du centre du cadran, une petite tige d'une faible longuer, mais assez pesante pour amener le centre de gravité du système sur l'axe de rotation; quelquefois, pour éviter ce prolongement, on dispose sur l'axe, et en arrière du cadran, une petite masse additionnelle destinée à remplir le même but.

138. Équilibre d'un corps assujetti à s'appuyer sur un plan fixe. — Proposons-nous de déterminer les conditions d'équilibre d'un corps solide astreint à s'appuyer constamment sur un plan fixe, en supposant ce plan parfaitement poli et indéformable, c'est-à-dire ne pouvant exercer que des réactions normales à sa surface.

Le corps considéré peut s'appuyer sur le plan, soit par un point, soit par deux points, soit par trois points, soit enfin par un plus grand nombre de points. De là différents cas à examiner suivant le nombre des points d'appui.

139. Corps s'appuyant par un seul point. — Soit C (*fig.* 114) un corps soumis à l'action d'un nombre quelconque de forces F, F′, F″... et s'appuyant par le point O sur le plan MN. Ce