Cet équilibre a lieu lorsqu'on donne au corps M, de la figure précédente, la nouvelle position N (*fig.* 112) dans laquelle le centre de gravité se trouve encore sur la verticale du point fixe, mais au-dessus de ce point. En effet, si nous dérangeons un peu le corps pour l'amener en N′, par exemple, son poids P peut se décomposer en deux forces ; l'une, passant par le point fixe, est détruite, et l'autre, perpendiculaire à la première, tend à faire continuer au corps la rotation commencée.

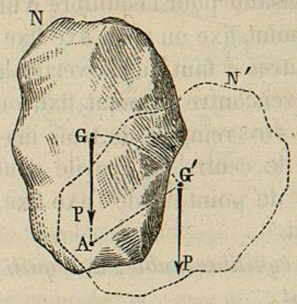

Fig. 112.

REMARQUE. — On voit par les deux cas traités ci-dessus, que l'équilibre n'est stable que lorsque le centre de gravité du corps occupe la position la plus basse qu'il puisse prendre par rapport au point fixe. Cela était facile à prévoir, dès que nous savions que la pesanteur attire tous les corps vers le centre de la terre, et que son action sur un corps pouvait être considérée comme une force unique appliquée à son centre de gravité.

136. Équilibre indifférent. — L'équilibre est *indifférent* lorsque le corps est en équilibre dans toutes les positions qu'on lui fait prendre.

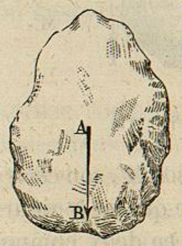

Fig. 113.

Lorsque le centre de gravité du corps coïncide avec le point fixe A (*fig.* 113), on ne peut plus décomposer son poids en deux composantes dont l'une tend à faire tourner le corps, et celui-ci reste en équilibre dans toutes les positions.

Ainsi, *quand on fixe le centre de gravité d'un corps, celui-ci est en équilibre indifférent.*

Tout ce que nous venons de dire pour un corps possédant un point fixe s'applique également, sans modification, à un corps assujetti à tourner autour d'un axe fixe.

137. Considérations sur l'équilibre instable et sur l'équilibre indifférent. — L'équilibre instable est, pour un corps, une position purement hypothétique, irréalisable en pratique. En effet, nous savons qu'un déplacement du corps, quelque

petit qu'il soit, détruit cet équilibre; or, plusieurs causes extérieures, les vibrations, les mouvements de l'air ambiant, la déformation des pièces qui fléchissent, etc., devant amener inévitablement un dérangement dans la position du corps, il s'ensuit que celui-ci ne peut pas conserver sa position primitive correspondant à l'équilibre instable.

L'équilibre indifférent est, au contraire, réalisé dans un grand nombre de cas; il est surtout indispensable pour annuler l'action de la pesanteur sur les organes des machines animés d'un mouvement de rotation; pour cela, on fait en sorte que leur centre de gravité soit situé sur l'axe de rotation. Dans les machines à vapeur, le centre de gravité du volant se trouve sur l'axe de l'arbre moteur; s'il en était autrement, la pesanteur tendrait tantôt à accélérer, tantôt à ralentir le mouvement, ce qui amènerait des irrégularités nuisibles à la marche de la machine et en détériorerait les organes. Les roues d'engrenages, les poulies, les balanciers, doivent également satisfaire à cette condition; pour les pièces qui, par leur forme, ne s'y prêtent pas facilement, on emploie des contre-poids. Ainsi, pour les aiguilles des horloges de dimensions assez considérables, on dispose sur le prolongement de chacune d'elles et au delà du centre du cadran, une petite tige d'une faible longuer, mais assez pesante pour amener le centre de gravité du système sur l'axe de rotation; quelquefois, pour éviter ce prolongement, on dispose sur l'axe, et en arrière du cadran, une petite masse additionnelle destinée à remplir le même but.

138. Équilibre d'un corps assujetti à s'appuyer sur un plan fixe. — Proposons-nous de déterminer les conditions d'équilibre d'un corps solide astreint à s'appuyer constamment sur un plan fixe, en supposant ce plan parfaitement poli et indéformable, c'est-à-dire ne pouvant exercer que des réactions normales à sa surface.

Le corps considéré peut s'appuyer sur le plan, soit par un point, soit par deux points, soit par trois points, soit enfin par un plus grand nombre de points. De là différents cas à examiner suivant le nombre des points d'appui.

139. Corps s'appuyant par un seul point. — Soit C (*fig.* 114) un corps soumis à l'action d'un nombre quelconque de forces F, F′, F″... et s'appuyant par le point O sur le plan MN. Ce plan exerce au point O une certaine réaction r égale et contraire à la pression qu'il éprouve de la part du corps. Si on suppose que cette force, représentant la réaction du plan, soit appliquée au point O du corps, on pourra supprimer le plan et considérer le corps comme entièrement libre. Il suffira, pour l'équilibre, que l'ensemble des forces F, F′, F″... r se réduisent à deux forces égales et directement opposées ; or, pour que cette condition soit remplie, il suffit que les forces F, F′, F″... admettent une résultante unique, normale au plan et tendant à appuyer le corps sur le plan.

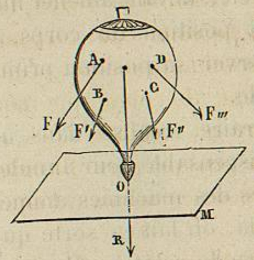

Fig. 114.

Donc, *pour qu'un corps s'appuyant sur un plan inébranlable, par un seul point, soit en équilibre, il faut et il suffit que toutes les forces qui le sollicitent aient une résultante unique, normale au plan et passant par le point d'appui.*

140. Cas où le corps est sollicité par son poids seul. — Ce que nous venons de dire s'appliquant à un système quelconque de forces, s'applique évidemment au cas où le corps n'est soumis qu'à la seule action de la pesanteur. Il faudra donc, pour l'équilibre, *que la verticale du centre de gravité passe par le point d'appui.*

La réaction du plan devant être directement opposée à la pression que le corps exerce sur lui, on voit qu'un corps soumis à l'action de la pesanteur ne peut être en équilibre que sur un plan horizontal.

141. Pression sur le point d'appui. — Il est évident que, dans le cas qui nous occupe, le point d'appui supporte tout le poids du corps, et, par suite, *la pression supportée par le plan au point O est égale à ce poids.*

Remarque. — Si le point d'appui ne change pas lorsqu'on dérange le corps, l'équilibre sera forcément instable, puisque le centre de gravité se trouve au-dessus du point d'appui. Pour le rendre stable, il faut abaisser le centre de gravité du système au-dessous du plan.

Si, au contraire, le point par lequel le corps s'appuie sur le plan horizontal change lorsqu'on dérange le corps, les trois

sortes d'équilibre peuvent se présenter. En effet, la position d'équilibre étant déterminée, si le centre de gravité est plus rapproché du plan que dans toute autre position du corps, l'équilibre sera stable, car le centre de gravité tendant toujours à descendre, ramènera le corps à sa position première.

Si le centre de gravité est plus éloigné du plan que dans toute autre situation du corps, l'équilibre est instable.

Enfin, si dans toutes les positions que peut prendre le corps, le centre de gravité reste à la même distance du plan, l'équilibre est indifférent.

Le premier cas se présente lorsque, décrivant une sphère avec un rayon égal à la distance du centre de gravité au point d'appui, dans la position d'équilibre, cette sphère est entièrement comprise à l'intérieur du corps. Nous nous rappelons tous, étant enfants, d'avoir joué avec de petits pantins qui se tenaient toujours debout malgré nos efforts et nos petites colères pour les coucher sur le plan horizontal. Ce phénomène, incompréhensible alors pour nous, est une application bien simple de ce qui précède.

L'équilibre est instable lorsque la sphère dont nous venons de parler enveloppe le corps.

L'équilibre est indifférent lorsque la surface de la sphère coïncide avec celle du corps.

142. Corps s'appuyant par deux points. — Les conditions d'équilibre d'un corps reposant sur un plan horizontal, qu'il soit soumis à un système quelconque de forces, ou à l'action de la pesanteur, étant exactement les mêmes, comme on l'a vu dans le cas précédent, nous ne nous occuperons, dans ce qui suit, que des corps pesants.

Soit M (*fig.* 115) un corps pesant s'appuyant sur un plan horizontal par les deux points A et A′. Le corps exerce, aux deux points de contact, des pressions dirigées de haut en bas, et le plan réagit avec des forces N et N′ égales et directement opposées à ces pressions ; pour l'équilibre, il faut que l'ensemble des trois forces représentant le poids P du corps et les deux réactions N et N′ du plan se réduisent à deux forces égales et directement opposées. Or, les

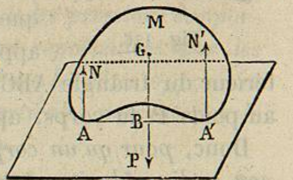

Fig. 115.

deux réactions N et N′ étant parallèles et de même sens, ont une résultante $N+N'$ égale à leur somme et appliquée en un point de la ligne AA′.

Donc, *pour que le corps soit en équilibre, il faut et il suffit que la verticale passant par son centre de gravité rencontre la droite* AA′ *et tombe entre les deux points d'appui.*

143. Pressions sur les points d'appui. — Pour déterminer les pressions supportées par les points A et A′, il suffit de décomposer le poids P du corps en deux forces parallèles et de même sens appliquées en ces deux points. Soit B le point où la verticale passant par le centre de gravité du corps rencontre la droite AA′ ; les deux composantes cherchées seront données par les relations :

$$\frac{N}{A'B}=\frac{N'}{AB}=\frac{P}{AA'}$$

d'où l'on tire : $$N=P\times\frac{A'B}{AA'}$$

et $$N'=P\times\frac{AB}{AA'}$$

144. Corps pesants s'appuyant par trois points non en ligne droite. — Soient N, N′, N″ les trois réactions exercées par le plan aux points A, B, C (*fig.* 116), par lesquels le corps s'appuie sur le plan horizontal. Ces trois forces étant évidemment normales au plan, puisqu'il est supposé parfaitement poli et indéformable, sont parallèles et de même sens ; elles ont une résultante unique, égale à leur somme $N+N'+N''$, appliquée en un certain point situé à l'intérieur du triangle ABC ; cette résultante doit faire équilibre au poids P du corps, appliqué en son centre de gravité.

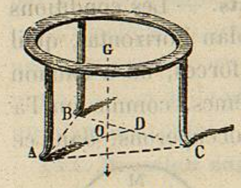

Fig. 116.

Donc, *pour qu'un corps pesant s'appuyant par trois points, non en ligne droite, sur un plan horizontal, soit en équilibre, il faut et il suffit que la verticale passant par son centre de gravité rencontre le plan à l'intérieur du triangle formé par les trois points d'appui.*

145. Pressions sur les points d'appui. — Pour déterminer les pressions supportées par les points d'appui, il faut décom-

poser le poids P du corps en trois composantes parallèles appliquées aux points A, B, C (*fig.* 117). Nous savons que ces composantes sont données par les relations :

$$N+N'+N''=P$$

$$N=P\times\frac{OD}{AD};\quad N'=Q\times\frac{CD}{BC}\quad \text{et}\quad N''=Q\times\frac{BD}{BC}$$

ou bien encore :

$$N=P\times\frac{OD}{AD};\quad N'=P\times\frac{OK}{BK}\quad \text{et}\quad N''=P\times\frac{OH}{CH}\qquad (1)$$

Ces différentes pressions jouissent d'une propriété remarquable. Les triangles BOC et ABC ayant même base, sont entre eux comme leur hauteur, ou comme les longueurs OD et AD ; on a donc :

$$\frac{BOC}{ABC}=\frac{OD}{AD}$$

On trouvera aussi, par la même raison :

$$\frac{AOC}{ABC}=\frac{OK}{BK}\quad \text{et}\quad \frac{AOB}{ABC}=\frac{OH}{CH}$$

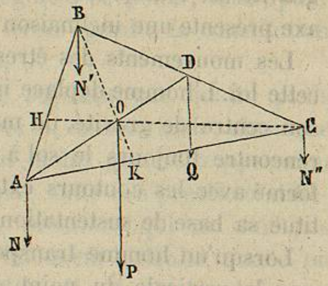

Fig. 117.

Par suite, les relations (1) peuvent s'écrire :

$$\frac{N}{P}=\frac{BOC}{ABC};\quad \frac{N'}{P}=\frac{AOC}{ABC};\quad \frac{N''}{P}=\frac{AOB}{ABC}$$

d'où : $$\frac{N}{BOC}=\frac{N'}{AOC}=\frac{N''}{AOB}=\frac{P}{ABC}$$

Donc, *si l'on représente le poids P du corps par l'aire du triangle* ABC *formé par les points d'appui, les pressions supportées par ces points seront respectivement représentées par les aires des triangles partiels ayant pour base les côtés opposés et pour sommet commun le point où la verticale, passant par le centre de gravité du corps, perce le plan.*

146. Corps s'appuyant par un nombre quelconque de points. — Considérons un corps pesant reposant sur un plan horizontal par des points A,B,C,D... ; ce corps détermine, en chacun des points de contact, des réactions N,N′N″,... de même sens, normales au plan, et si nous substituons à ces réactions des forces verticales F, F′, F″... respectivement égales à

N, N′, N″... le corps pourra être considéré comme entièrement libre. Mais ces forces, normales au plan, se réduisent à une résultante R dont le point d'application doit forcément se trouver à l'intérieur du polygone convexe formé en joignant les différents points A,B,C,D. Il faut donc, pour qu'il y ait équilibre, *que la verticale du centre de gravité tombe à l'intérieur du polygone d'appui appelé base de sustentation.*

La tour de Pise, célèbre par les expériences qu'y fit Galilée, présente une remarquable application de ce principe. Dans cette tour de 59 mètres de hauteur, la verticale du centre de gravité est loin de tomber en dehors de la base, quoique son axe présente une inclinaison de $0^m,086$ par mètre.

Les mouvements des êtres animés sont, de même, soumis à cette loi. L'homme déplace instinctivement, et sans s'en douter, son centre de gravité, de manière que la verticale de ce point rencontre toujours le sol à l'intérieur du polygone convexe formé avec les contours extérieurs de ses pieds et qui constitue sa base de sustentation.

Lorsqu'un homme transporte un fardeau, il s'incline pour que la verticale du point d'application de la résultante du poids de son corps et de celui du fardeau, c'est-à-dire du centre de gravité du système, perce le sol entre ses pieds. S'il porte le fardeau sur son dos, il se penche en avant et d'autant plus que le fardeau est plus volumineux ; l'homme chargé d'un seau, ou portant un paquet à la main, écarte le bras libre et se penche du côté opposé à la charge. Pendant la marche, le corps de l'homme s'incline tantôt à droite, tantôt à gauche, suivant que le pied droit ou le pied gauche forme la base d'appui ; s'il monte une pente, il s'incline en avant, et si, au contraire, il la descend, il se penche en arrière.

Les danseurs de corde se servent, pour maintenir leur équilibre, d'un balancier qui ramène constamment la verticale de leur centre de gravité à l'intérieur du polygone d'appui.

147. Pressions sur les points d'appui. — Lorsqu'un corps repose sur un plan horizontal par un nombre de points supérieur à trois, ou seulement trois en ligne droite, le problème de la recherche des pressions supportées par les points d'appui est complètement indéterminé si l'on connaît simplement la position occupée par le centre de gravité.

En effet, si les trois points sont en ligne droite, on comprend que l'on puisse toujours décomposer, d'une infinité de manières, le poids P du corps, appliqué à son centre de gravité, en trois composantes parallèles et de même sens, appliquées aux trois points d'appui. Il en est de même si le corps s'appuie par un nombre quelconque de points, car la décomposition d'une force en plus de trois autres composantes parallèles est complètement indéterminée, comme nous l'avons vu (**68**).

En réalité, il est bien évident que chacun des points d'appui supporte une portion déterminée du poids du corps, et que la somme des pressions est égale à ce poids ; mais, pour déterminer ces pressions, il faut avoir égard à la constitution moléculaire des corps en contact.

Si nous considérons une table reposant par quatre pieds sur un plancher, celui-ci étant plus ou moins rigide, ainsi que la table, il en résulte une plus ou moins grande compression aux différents points d'appui et par suite des pressions différentes en chacun de ces points, pressions qui ne sont pas indéterminées et qu'on peut parfaitement calculer quand on connaît la loi physique suivant laquelle s'opère la déformation des parties en contact. La résolution de cette question nous entraînerait trop loin et sortirait du cadre que nous nous sommes tracé pour cet ouvrage.

148. Stabilité des corps pesants s'appuyant sur un plan horizontal. — Nous venons de prouver que, si un corps pesant est en équilibre sur un plan horizontal, la verticale passant par le centre de gravité tombe à l'intérieur de la base de sustentation. Mais suivant la position du centre de gravité par rapport à cette base, le degré de stabilité de ce corps sera plus ou moins grand, c'est-à-dire que l'effort à exercer pour renverser le corps sera plus ou moins considérable. En effet, considérons un parallélipipède rectangle posé par une de ses faces sur un plan horizontal, et supposons qu'on veuille le renverser en le faisant tourner autour de son arête AB (*fig.* 118) ; soient G le point où la verticale du centre de gravité

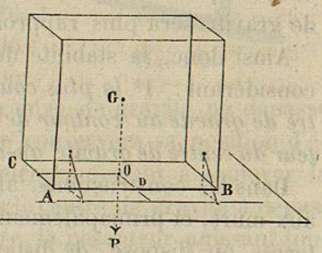

Fig. 118.

perce le plan et OD la distance de ce point à l'arête AB. Le poids P du corps tend à appliquer celui-ci sur le plan horizontal et par suite s'oppose au mouvement. Le moment de P par rapport à l'axe de rotation est :

$$P \times OD$$

et pour renverser le corps il faudrait lui appliquer une force dont le moment fût supérieur à celui de son poids. Ce moment varie avec l'arête autour de laquelle on veut opérer le renversement ; pris avec sa valeur minimum, c'est-à-dire par rapport à l'arête la plus rapprochée du point O, on le nomme *moment de stabilité*.

Le moment de stabilité d'un corps varie non seulement avec son poids, mais aussi avec la distance OD et par suite avec la position du centre de gravité par rapport au contour de la base de sus-tentation. D'un autre côté, lorsque le corps tourne autour d'une arête, le poids P tend à le ramener à sa position première, tant que le centre de gravité n'a pas dépassé le plan vertical passant par l'axe de rotation ; à partir de cette position, la verticale du centre de gravité ne tombant plus à l'intérieur du polygone d'appui, l'équilibre ne peut plus subsister. L'angle dont un corps peut tourner autour d'une de ses arêtes, sans chavirer, mesure donc son degré de stabilité, et on voit que cet angle sera d'autant plus grand que le centre de gravité sera plus rapproché de la base de sustentation.

Ainsi donc, la stabilité des corps pesants se détermine en considérant : 1° *la plus courte distance de la verticale du centre de gravité au contour de la base de sustentation*, 2° *la hauteur du centre de gravité au-dessus de cette base*.

Dans les constructions, afin de donner une grande stabilité aux murs, et principalement aux murs destinés à soutenir des terres, on dispose, de distance en distance, et en saillie, des massifs en maçonnerie appelés *contre-forts*, ayant pour but d'augmenter la distance de la verticale du centre de gravité à l'arête de renversement.

Les étais ou pièces de bois que l'on dispose obliquement contre un mur qui menace de tomber ou qui ne présente pas toute la sécurité désirable, remplissent identiquement le même but.

On donne aux cheminées en briques des usines la forme d'un tronc de cône dont la grande base forme la base d'appui, afin d'abaisser, autant que possible, le centre de gravité, et augmenter, par là, leur moment de stabilité.

149. Application aux chargements des voitures. — Une voiture en mouvement sur une route ordinaire restera en équilibre, c'est-à-dire ne versera point, tant que la verticale du centre de gravité tombera à l'intérieur du polygone formé par les points de contact des roues avec le sol. Mais la stabilité sera d'autant plus grande que le centre de gravité sera plus bas placé ; aussi doit-on, lorsqu'on charge une voiture, disposer au fond les objets les plus lourds. Une voiture chargée de paille ou de foin sera plus exposée à verser qu'une voiture transportant des barres de fer ou des pièces de bois. Les inégalités de la route et son inclinaison transversale modifient d'une manière notable le degré de stabilité des voitures. En effet, considérons une voiture (*fig.* 119) en mouvement sur une route inclinée de gauche à droite ; les irrégularités du sol, les ornières, feront plus ou moins pencher latéralement la voiture de manière que le centre de gravité parcourra un arc de cercle dont le centre sera situé au point de contact A de la roue la plus basse avec le sol. Si le centre de gravité ne dépasse pas le point B de l'arc, la voiture conservera sa position d'équilibre ; mais si une cause quelconque vient à soulever la roue de gauche, cause qui forcera le centre de gravité à dépasser le point le plus élevé B de l'arc, la pesanteur agissant toujours sur lui pour le faire descendre fera inévitablement verser la voiture.

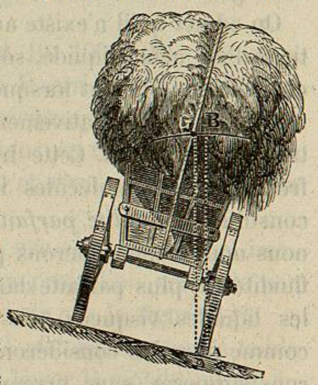

Fig. 119.