CHAPITRE VI

HYDROSTATIQUE

§ 1. — ÉQUILIBRE DES LIQUIDES.

150. Hypothèses sur la constitution des liquides. — Les liquides se distinguent des solides en ce que leurs molécules cèdent à de très faibles efforts tendant à les séparer ou à les faire glisser les unes sur les autres.

On admet qu'il n'existe aucun frottement, soit entre les portions d'un même liquide, soit entre celles-ci et les corps qui les environnent, surtout lorsque ce liquide est animé d'un mouvement très lent relativement aux corps avec lesquels il se trouve en contact. Cette hypothèse de l'absence absolue du frottement des molécules liquides, lorsqu'elles se déplacent, constitue la fluidité parfaite. Suivant la nature des liquides, nous nous rapprocherons plus ou moins de la réalité; cette fluidité est plus parfaite dans l'eau, l'alcool, l'éther, que dans les liquides visqueux tels que les huiles, les sirops; mais comme nous les considérons toujours en équilibre, nous pourrons supposer, sans erreur sensible, qu'ils jouissent de cette propriété.

On admet, en outre, que les liquides sont complètement incompressibles; cette dernière hypothèse, admise depuis fort longtemps, ne concorde pas avec les résultats de l'expérience. Tous les liquides sont compressibles, mais cette compressibilité ne devient appréciable que lorsqu'ils sont soumis à des efforts très considérables, et la diminution de volume ne peut s'observer qu'au moyen d'appareils très précis.

151. Principe de Pascal. — De la nullité du frottement des molécules liquides entre elles, résulte le principe suivant énoncé par Pascal:

1º Si l'on considère un liquide en équilibre dans un vase, un élément quelconque de la paroi, ou un élément pris à l'intérieur

de la masse liquide, supporte une pression normale à sa surface.

2º Un élément quelconque pris dans l'intérieur de la masse

2º Un élément quelconque pris dans l'intérieur de la masse liquide est soumis de la part des molécules environnantes à des pressions égales dans tous les sens. S'il en était autrement, l'élément considéré serait entraîné dans le sens de la plus forte pression, et il n'y aurait pas équilibre.

D'une manière plus générale, on dit que les liquides transmettent les pressions en tous sens, et ces pressions, toutes choses égales d'ailleurs, sont proportionnelles aux surfaces. Ainsi P, P', P'' étant les pressions supportées par des surfaces S, S', S'' d'un même vase, contenant un même liquide, on doit avoir la relation:

 $\frac{P}{S} = \frac{P'}{S'} = \frac{P''}{S''}$

c'est-à-dire que si la surface S est 10, 100, 1000 fois plus grande que la surface S', la pression P sera 10, 100, 1000 fois plus grande que la pression P' et réciproquement. Cette propriété de la transmission des pressions en tous sens est utilisée dans un appareil très puissant et d'un grand usage, la presse hydraulique.

152. Presse hydraulique. — La presse hydraulique, imaginée par Pascal, est représentée en projection verticale par la figure 120, et en coupe longitudinale par la figure 121.

Elle se compose: 1° d'une pompe à piston plongeur de faible section, manœuvrée au moyen d'un levier G mobile autour du point H'; 2° d'un cylindre A, à parois très épaisses, dans lequel se meut un piston B terminé par un plateau C, et 3° d'un tuyau L destiné à conduire l'eau de la pompe dans le cylindre A; pour cela, deux soupapes placées, l'une M dans le tuyau d'aspiration et l'autre N dans le tuyau de refoulement L, servent à établir et à intercepter alternativement l'arrivée de l'eau sous le grand piston B. Une soupape de sûreté F, chargée d'un poids convenable P par l'intermédiaire d'un levier, empêche la rupture des cylindres et des conduits lorsque la pression devient trop forte.

En manœuvrant le levier G, la pompe aspire l'eau d'un réservoir peu profond pour la refouler ensuite sous le piston B; celui-ci s'élève d'une faible quantité à chaque course descendante du piston de la pompe et presse très fortement des corps placés entre le plateau mobile C et le plateau fixe D. Quatre colonnes en fer relient solidement le plateau fixe au corps du cylindre A.

Ordinairement, un manomètre est placé sur le tuyau de com-

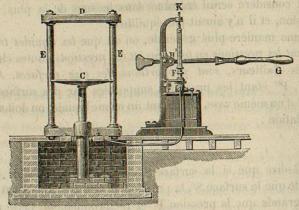
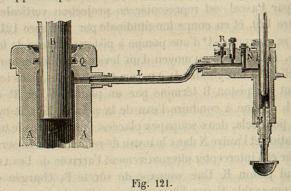


Fig. 120.

munication L pour indiquer la pression à laquelle l'eau est soumise.

Cet appareil permet d'exercer de très fortes pressions com-



parativement à l'effort moteur; en effet, les pressions étant proportionnelles aux surfaces, si le grand piston B a une section 150 fois plus grande que celle du piston plongeur, un effort de 5 kilogrammes appliqué à ce dernier transmettra une pression de 5×150 ou 750 kilogrammes au piston B.

Pour empêcher l'eau de sortir autour du grand piston, Bramah a disposé, dans une gorge située à la partie supérieure du cylindre A et en dedans, un anneau en cuir em-

bouti Q (fig. 122) ouvert du côté du fond du cylindre. L'eau, fortement comprimée, presse l'un des bords de l'anneau contre le cylindre et l'autre contre le



piston, de manière à rendre toute fuite impossible.

La presse hydraulique permet d'obtenir des pressions énormes; aussi est-elle employée dans un grand nombre d'industries. Elle sert, soit pour extraire les liquides contenus dans certains végétaux, soit pour enlever aux graines oléagineuses les matières grasses qu'elles renferment; elle sert aussi à

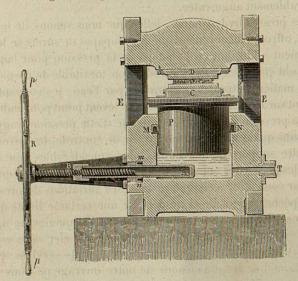


Fig. 123.

exercer de très grands efforts de traction et à soulever des fardeaux d'un poids très considérable; enfin, elle permet d'obtenir l'énorme pression de 1,000 kilogrammes environ, par centimètre carré, nécessaire pour comprimer la gélatine sur les plaques de plomb servant de moule pour l'impression par le procédé connu sous le nom de photoglyptie.

On augmente encore considérablement la puissance de cet

appareil à l'aide d'une disposition très simple due à M. Desgoffe, et représentée par la figure 123. Sur la paroi latérale du grand corps de pompe et tout près du fond, on pratique un orifice dans lequel peut glisser un cylindre en acier A; le joint est rendu étanche par un cuir de Bramah. Le cylindre A est creux et porte à son extrémité extérieure un écrou B dans lequel s'engage une vis manœuvrée par la roue à poignées R.

Lorsque la pression est arrivée à la limite supérieure que peut produire la petite pompe foulante, on agit sur les poignées p pour faire pénétrer le cylindre A à l'intérieur du corps de pompe; la capacité de celui-ci se trouvant ainsi sensiblement réduite, le liquide force le piston P à monter encore et la pression qui s'exerce entre les deux plateaux G et D est considérablement augmentée.

Les presses hydrauliques, telles que nous venons de les décrire, offrent l'inconvénient que les soupapes de sûreté se lèvent rarement à l'instant où l'on dépasse la pression pour laquelle elles ont été réglées. Par l'introduction inévitable de corps gras et de matières étrangères entraînés par l'eau, les soupapes se collent sur leurs sièges, et elles ne se lèvent point pour indiquer que la pression maximum est atteinte. Cette pression augmentant sans qu'on ait aucun moyen sûr de contrôle, les parois du cylindre supportent des efforts plus considérables que ceux pour lesquels elles ont été calculées et il peut y avoir rupture.

Pour connaître, à chaque instant, les variations de pression et empêcher que celle-ci ne dépasse une certaine limite qu'on s'impose, M. Ducomet, ingénieur à Paris, a imaginé un appareil très ingénieux, que nous pourrions appeler manomètre-soupape et qui est appelé à rendre de grands services. Nous regrettons que les dimensions de notre ouvrage ne nous permettent pas de donner la figure de cet appareil ainsi que tous les détails qu'il mérite.

Le liquide agit à la partie inférieure d'un piston cylindrique qui, se soulevant sous l'influence de la pression, vient faire infléchir un ressort formé d'une lame d'acier enroulée plusieurs fois sur elle-même; la déformation de ce ressort produit le déplacement d'une aiguille qui indique, sur un cadran, la pression en atmosphères. De plus, quand la pression arrive à la limite qu'on s'est imposée, la partie inférieure du piston démasque

deux petits orifices donnant passage au liquide. Une disposition particulière permet de découvrir les orifices pour une pression quelconque, réglée d'avance. Ce manomètre sert donc, en même temps, de soupape de sûreté et rend impossible de dépasser la pression que l'on s'impose; on évite ainsi la rupture des corps de pompe.

153. Pression moyenne par unité de surface. — Si par un point pris à l'intérieur d'un liquide en équilibre, nous faisons passer une portion de plan, les deux parties adjacentes du liquide exerceront des actions mutuelles que l'on peut considérer comme des pressions égales supportées par les deux faces du plan. L'une de ces pressions P, exprimée en kilogrammes, divisée par l'aire α qui la supporte ou

P ō

donne la pression moyenne par unité de surface, et la limite de cette pression, à mesure que l'on fait décroître indéfiniment l'étendue sur laquelle elle s'exerce, en y comprenant toujours le point considéré et en conservant au plan sa direction, est la pression par unité de surface au point considéré.

154. Équilibre des liquides soumis à la seule action de la pesanteur. — Nous avons, jusqu'ici, considéré les liquides sans nous occuper de leur poids; nous allons maintenant les considérer comme pesants, c'est-à-dire comme ils sont réellement. Dans ce cas, lorsqu'un liquide est en équilibre, il satisfait aux trois conditions suivantes:

1º Tous les points d'une même couche horizontale supportent la même pression;

2º Tous les points d'une même couche horizontale ont la même densité;

3º La surface libre du liquide est horizontale.



Fig. 124.

Pour démontrer la première condition, prenons deux points quelconques m et m' (fig. 124), sur un même plan horizontal AC, que nous considérerons comme les centres de deux cercles infiniment petits dont les plans sont perpendiculaires à la

droite AC. Supposons que ces deux cercles soient les deux bases d'un cylindre droit à génératrices horizontales, constituant un solide cylindrique environné de toutes parts par le liquide. Si celui-ci est en équilibre, cette substitution du cylindre solide au cylindre liquide ne modifiera en rien l'équilibre. Or, les forces qui sollicitent ce solide sont : 1° son poids P agissant à son centre de gravité; 2° les pressions horizontales qui s'exercent normalement aux bases, et 3° les pressions exercées perpendiculairement à sa surface convexe. Si P et P' représentent les pressions par mètre carré sur chacune des bases de surface ω , les pressions horizontales qu'elles supportent seront exprimées par $P\omega$ et — $P'\omega$. Si nous projetons ces forces sur un axe quelconque, la somme de leurs projections doit être égale à O; projetons, pour simplifier, sur l'axe du cylindre AC; on aura :

$$P_{\omega} = P'_{\omega} = 0$$

car le poids du cylindre et les pressions sur sa surface convexe, étant perpendiculaires à l'axe CA, ont une projection nulle.

Il résulte de cette égalité que P=-P', c'est-à-dire que la pression est la même en tous les points d'une même couche horizontale.

2º Soient AC et A'C' (fig.125), deux plans horizontaux très

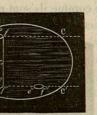


Fig. 125.

voisins situés à l'intérieur d'un liquide en équilibre, et isolons par la pensée deux cylindres verticaux de section droite ω, que nous supposerons comme solidifiés et ayant leurs bases inférieures et supérieures situées dans chacun de ces plans. Or, les forces qui sollicitent le cylindre efe' f' sont : 1° son poids

p agissantà son centre de gravité; 2° les pressions qui s'exercent normalement aux bases, et 3° les pressions horizontales qui s'exercent perpendiculairement à sa surface convexe. Si P et $-P_1$ représentent les pressions par unité de surface, sur chacune des bases A et A', les pressions qu'elles supportent seront P_{ω} et $-P_{1\omega}$. Projetant ces forces sur un axe quelconque, la

somme de leurs projections devra être égale à 0; projetons, pour simplifier, sur l'axe même du cylindre; on aura pour l'équation des projections:

$$P\omega - P_1\omega + p = 0$$

car les pressions horizontales, étant perpendiculaires à l'axe, ont une projection nulle.

De cette égalité on tire :

$$p = (P_1 - P) \omega \tag{1}$$

Les mêmes considérations s'appliqueraient au cylindre de base inférieure $e\,f''$; $P'\,et''\,-P'_1\,$ étant les pressions par unité de surface sur chacune des bases, on aurait de même, en désignant par p' le poids de ce cylindre :

$$p' = (P'_1 - P') \omega$$

Mais, d'après ce qui vient d'être énoncé, on doit avoir P' = P et $P'_1 = P_1$; il en résulte p = p', c'est-à-dire que les deux cylindres liquides ont même poids, et, puisqu'ils ont même base et même hauteur, leurs volumes sont égaux et par suite ils ont la même densité.

Actuellement, si nous faisons décroître la distance très petite qui sépare les deux plans horizontaux, les volumes des cylindres considérés iront toujours en diminuant sans cesser d'être égaux, et à la limite, lorsque les deux plans coïncideront, la même conclusion subsistera toujours, c'est-à-dire que tous les points d'une même couche horizontale auront la même densité.

Remarque. Lorsqu'on compare les pressions par unité de surface en deux points situés sur une même verticale et à des profondeurs différentes dans un liquide en équilibre, on trouve que la pression au point inférieur est égale à la pression au point supérieur augmentée du poids d'une colonne liquide ayant pour base l'unité de surface et pour hauteur la distance verticale comprise entre deux plans horizontaux menés par chacun de ces points.

En effet, reprenons la figure précédente et déterminons la pression sur le point inférieur. Pour cela, soit h la hauteur verticale séparant les deux points considérés et π la densité du liquide; le poids du cylindre de base ω sera:

$$p = \pi \omega h$$

En remplaçant cette valeur de p dans l'équation (1) il vient :

$$\pi\omega h = (P_1 - P) \omega$$

Et en supprimant le facteur commun ω , on tire pour la valeur de P.

 $P_1 = P *\pi h$

ce qui démontre la proposition énoncée.

Si P=0, c'est-à-dire s'il ne s'exerce aucune pression sur le plan supérieur, il vient:

$$P_4 = \pi h$$
 d'où $h = \frac{P_4}{\pi}$

ce qui s'énonce en disant que le quotient d'une pression P_1 rapportée à l'unité de surface, divisée par le poids de l'unité de volume, est la hauteur de ce liquide due à la pression P_1 .

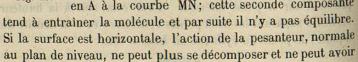
3° La troisième condition résulte de ce qui vient d'être exposé. En effet, reprenons l'égalité:

$$P_1 = P + \pi h$$

Nous savons que la pression est la même en tous les points d'une même couche horizontale; les pressions P et P₁ sont donc des quantités constantes; il en résulte que la hauteur h est la même pour tous les points de cette couche, c'est-à-dire que la surface libre a tous ses points également distants de la tranche horizontale considérée; la surface libre est donc située dans un plan parallèle à cette tranche et par suite elle est horizontale.

Pour le prouver directement, considérons un vase contenant

un liquide dont la surface libre affecte la forme de la courbe MN (fig. 126); ce liquide ne peut pas être en équilibre. En effet, prenons une molécule quelconque A située à la surface libre; le poids p de cette molécule peut se décomposer en deux composantes, l'une AC, normale à la surface, qui sera détruite et l'autre suivant la tangente menée en A à la courbe MN; cette seconde composante



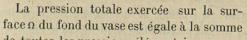
d'autre effet que d'entraîner la molécule vers le fond. Mais toutes les molécules qui l'avoisinent étant soumises à la même force et recevant des réactions égales et contraîres des molécules qui se trouvent situées dans le plan immédiatement inférieur, l'équilibre aura lieu.

Donc, la surface libre d'un liquide en équilibre est forcément horizontale.

155. Pression sur le fond d'un vase. — La pression exercée par un liquide sur le fond d'un vase est égale au poids d'une colonne liquide ayant pour base la surface du fond et pour hauteur la distance verticale du fond à la surface de niveau.

Considérons un vase quelconque ABCD (fig. 127) rempli d'un liquide dont la surface libre CD est située à une distance verti-

cale h du fond BA. Nous savons déjà que la pression est la même en tous les points d'une même couche horizontale, car autrement il n'y aurait pas équilibre; donc, chaque unité de surface du plan BA supporte une pression égale à πh , π étant la densité du liquide.



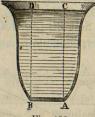


Fig. 127

de toutes les pressions élémentaires supportées par chacune de ses unités de surface, et cette pression totale sera exprimée par:

 $\pi\Omega h$

c'est-à-dire que cette pression est égale au poids d'une colonne liquide ayant pour base la surface du fond du vase et pour hauteur la distance verticale du fond à la surface de niveau.

Ce résultat suppose qu'il ne s'exerce aucune pression extérieure sur le plan de niveau du liquide. La formule $\pi\Omega h$ nous montre que la pression est complètement indépendante de la forme du vase. Si l'on prend trois vases de même surface de fond, dont le premier soit cylindrique, le second très évasé à la partie supérieure et le troisième au contraire étant rétréci, puis que l'on verse, dans chacun d'eux et à une même hauteur, un liquide de même densité, ces vases supporteront sur leur fond une pression égale, ce qui du reste est justifié par l'expérience. Ainsi, pour le vase élargi vers le haut de la figure ci-

FUSTEGUERAS ET HERGOT.

I. - 10

dessus, la pression sur le fond est moindre que le poids total du liquide qu'il contient; pour le vase rétréci à sa partie supé-

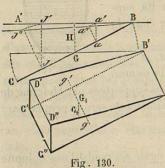
Fig. 129.

rieure (fig. 128 et 129), cette pression est plus grande que le poids total du liquide qu'il renferme, et enfin, dans le cas d'un vase cylindrique, la pression sur le fond est justement égale au poids du liquide qui y est contenu.

156. Pressions sur les parois latérales. — La pression supportée par une paroi latérale d'un vase ou par une surface plane inclinée est égale au

poids d'une colonne liquide ayant pour base la surface pressée et pour hauteur la distance verticale du centre de gravité de cette paroi, ou de cette surface, au plan de niveau.

Soit BC (fig. 130) la trace d'une surface plane rectangulaire perpendiculaire au plan de la figure, et supposons que la pres-



sion soit nulle au-dessus du niveau AB. Considérons un petit élément a de surface w pris sur le plan BC; nous pouvons admettre que cet élément soit rendu horizontal, et dans ce cas la pression qu'il supportera sera:

 $\pi \omega h$ π étant la densité du liquide et

h la hauteur verticale aa'. Mais la pression exercée sur cet élément étant normale à sa direction, la distance aa' sera représentée, lorsque l'élément sera revenu dans sa position première, par la perpendiculaire aa''=aa', élevée sur BC.

Si nous considérons un autre élément J, la hauteur du filet liquide qu'il supporte sera représentée par la perpendiculaire JJ" = JJ', élevée en J sur BC.

Les triangles Baa' et BJJ' étant semblables comme ayant les angles égaux, donnent:

$$\frac{Ba'}{BJ'} = \frac{aa'}{JJ'} = \frac{aa''}{JJ'}$$

c'est-à-dire que les points $a^{\prime\prime}$ et $J^{\prime\prime}$ se trouveront sur un même plan passant par la droite projetée en B et par suite les extrémités des droites représentant les pressions supportées par chacun des éléments de la surface BC, seront toutes situées dans un même plan. Donc, la pression totale exercée sur la paroi rectangulaire, ou la somme de toutes les pressions élémentaires, est égale au poids d'un prisme triangulaire liquide ayant pour base la surface pressée. Mais ce prisme est équivalent à un prisme droit ayant même base que le précédent et pour hauteur la distance du centre de gravité au plan de niveau, car si nous rendons horizontale la surface BC, en la faisant tourner autour d'un axe horizontal passant par son centre de gravité, la pression totale n'aura évidemment pas changé. Si nous désignons par α l'aire de cette surface et par H la distance du centre de gravité à la surface libre, la pression P sera exprimée par :

$P = \pi \Omega H$

c'est-à-dire par le poids du prisme dont nous venons de parler. Si une pression quelconque, la pression atmosphérique par exemple, s'exercait sur la surface de niveau, elle viendrait s'ajouter à la pression déterminée par le poids du liquide, et si P' désigne cette pression par unité de surface, on aura :

$$P = \Omega (P' + \pi H)$$

157. Centre de pression. — On appelle centre de pression le point d'application de la résultante de toutes les pressions élémentaires supportées par une surface plane plongée dans un liquide, ou, en d'autres termes, les pressions élémentaires exercées sur chacun des éléments de la surface, pouvant être considérées comme des forces parallèles et de même sens, et la somme de toute ces forces représentant la pression totale, le centre de pression est le point d'application de la résultante de toutes ces forces parallèles.

158. Recherche du centre de pression, qui est toujours plus bas que le centre de gravité. — Considérons le prisme triangulaire représentant la pression totale exercée sur la surface plane rectangulaire BC (fig. 130). Nous savons que le centre de gravité G, de ce prisme est situé sur la droite qq', qui

joint les centres de gravité de deux faces triangulaires opposées et au milieu de cette droite; si de ce point G, on abaisse une perpendiculaire G₁C₁ sur la surface pressée B'C'C"B", le point C1, pied de la perpendiculaire G1C1, sera le centre de pression, car ce point C, est bien le point d'application de la pression totale exercée par le liquide. Ce point doit être plus bas que le centre de gravité, ce qui est évident sur la figure; on peut toutefois le démontrer d'une manière très simple. En effet, faisons tourner la paroi BC autour d'un axe horizontal situé dans son plan et passant par son centre de gravité G, pour la rendre horizontale; la pression totale restera la même et les points G et C, se confondront. Or, pendant ce mouvement, la somme des pressions élémentaires supportées par la partie supérieure GB a augmenté, et, au contraire, la somme des pressions élémentaires supportées par la partie inférieure GC a diminué. Si nous ramenons la paroi à sa position première, l'inverse aura lieu; la partie inférieure recevra du liquide une pression plus grande que la partie supérieure, et par suite le centre de pression, ou le point d'application des pressions élémentaires, sera forcément plus bas que le centre de gravité.

Ainsi, lorsque la paroi BC est rectangulaire, l'un des côtés, projeté en B, étant situé dans le plan horizontal de niveau, le centre de pression se trouve sur la droite qui joint les milieux des arêtes C'C" et B'B" et aux ²/₃ de cette droite à partir de l'arête B'B".

Si la paroi est un triangle isocèle dont le sommet est situé dans le plan de niveau, la base étant dirigée horizontalement, la pression supportée par cette paroi sera équivalente au poids d'une pyramide quadrangulaire liquide, et, dans ce cas, le centre de pression se trouve sur la droite qui joint le sommet de la paroi au milieu de sa base et au 4 à a partir de cette base.

Le même triangle occupant une position inverse de la précédente, c'est-à-dire ayant sa base dans le plan horizontal de la surface libre, la pression supportée par cette paroi sera équivalente au poids d'une pyramide triangulaire liquide ayant pour base la surface pressée, et, dans ce cas, le centre de pression se trouve au milieu de la droite qui joint le milieu de la base du triangle au sommet opposé. Il résulte de là que, pour une même paroi plongée dans un liquide, mais occupant des positions différentes, le centre de pression varie suivant la place qu'elle occupe à l'intérieur du liquide.

§ 2. — ÉQUILIBRE DES CORPS PLONGÉS ET DES CORPS FLOTTANTS DANS LES LIQUIDES.

159. Principe d'Archimède. — Le principe suivant, découvert par Archimède, peut s'énoncer ainsi: Tout corps plongé dans un liquide est sollicité par une force verticale de bas en haut égale au poids du liquide qu'il déplace. On l'énonce souvent d'une manière moins précise en disant que tout corps plongé dans un liquide perd une partie de son poids égale au poids du liquide qu'il déplace.

Le principe d'Archimède peut être établi par le raisonnement de la manière suivante: Considérons une masse liquide en équilibre dans un vase, et isolons, par la pensée, à l'intérieur de cette masse, une portion du liquide présentant une forme quelconque A (fig. 131); cette fraction du liquide sera tou-

jours en équilibre, et si nous la supposons comme solidifiée, sans augmentation de densité, l'équilibre ne sera pas rompu. Or, la force qui sollicite ce volume solidifié est son poids P, force verticale qui agit de haut en bas, et puisqu'il ne tombe pas, on est conduit à admettre l'existence d'une seconde force provenant des réactions normales exercées par le liquide sur sa surface extérieure, et pour l'équilibre, ces réactions doivent se réduire à une résultante unique



Fig. 131.

égale et directement opposée au poids P du corps.

Substituons actuellement à la partie solidifiée du liquide, un corps de nature quelconque, mais ayant exactement la même forme; les pressions exercées par le liquide étant indépendantes de la nature des surfaces, ces pressions se réduiront, comme précédemment, à la même résultante, et celle-ci aura la même intensité pour tous les corps plongés dans le liquide considéré et ayant la même enveloppe A, ou, en d'autres ter-