joint les centres de gravité de deux faces triangulaires opposées et au milieu de cette droite ; si de ce point G_1 on abaisse une perpendiculaire G_1C_1 sur la surface pressée $B'C'C''B''$, le point C_1, pied de la perpendiculaire G_1C_1, sera le centre de pression, car ce point C_1 est bien le point d'application de la pression totale exercée par le liquide. Ce point doit être plus bas que le centre de gravité, ce qui est évident sur la figure ; on peut toutefois le démontrer d'une manière très simple. En effet, faisons tourner la paroi BC autour d'un axe horizontal situé dans son plan et passant par son centre de gravité G, pour la rendre horizontale ; la pression totale restera la même et les points G et C_1 se confondront. Or, pendant ce mouvement, la somme des pressions élémentaires supportées par la partie supérieure GB a augmenté, et, au contraire, la somme des pressions élémentaires supportées par la partie inférieure GC a diminué. Si nous ramenons la paroi à sa position première, l'inverse aura lieu ; la partie inférieure recevra du liquide une pression plus grande que la partie supérieure, et par suite le centre de pression, ou le point d'application des pressions élémentaires, sera forcément plus bas que le centre de gravité.

Ainsi, lorsque la paroi BC est rectangulaire, l'un des côtés, projeté en B, étant situé dans le plan horizontal de niveau, le centre de pression se trouve sur la droite qui joint les milieux des arêtes $C'C''$ et $B'B''$ et aux $\frac{2}{3}$ de cette droite à partir de l'arête $B'B''$.

Si la paroi est un triangle isocèle dont le sommet est situé dans le plan de niveau, la base étant dirigée horizontalement, la pression supportée par cette paroi sera équivalente au poids d'une pyramide quadrangulaire liquide, et, dans ce cas, le centre de pression se trouve sur la droite qui joint le sommet de la paroi au milieu de sa base et au $\frac{1}{4}$ à partir de cette base.

Le même triangle occupant une position inverse de la précédente, c'est-à-dire ayant sa base dans le plan horizontal de la surface libre, la pression supportée par cette paroi sera équivalente au poids d'une pyramide triangulaire liquide ayant pour base la surface pressée, et, dans ce cas, le centre de pression se trouve au milieu de la droite qui joint le milieu de la base du triangle au sommet opposé.

Il résulte de là que, pour une même paroi plongée dans un liquide, mais occupant des positions différentes, le centre de pression varie suivant la place qu'elle occupe à l'intérieur du liquide.

§ 2. — ÉQUILIBRE DES CORPS PLONGÉS ET DES CORPS FLOTTANTS DANS LES LIQUIDES.

159. Principe d'Archimède. — Le principe suivant, découvert par Archimède, peut s'énoncer ainsi : *Tout corps plongé dans un liquide est sollicité par une force verticale de bas en haut égale au poids du liquide qu'il déplace.* On l'énonce souvent d'une manière moins précise en disant que *tout corps plongé dans un liquide perd une partie de son poids égale au poids du liquide qu'il déplace.*

Le principe d'Archimède peut être établi par le raisonnement de la manière suivante : Considérons une masse liquide en équilibre dans un vase, et isolons, par la pensée, à l'intérieur de cette masse, une portion du liquide présentant une forme quelconque A (*fig.* 131) ; cette fraction du liquide sera toujours en équilibre, et si nous la supposons comme solidifiée, sans augmentation de densité, l'équilibre ne sera pas rompu. Or, la force qui sollicite ce volume solidifié est son poids P, force verticale qui agit de haut en bas, et puisqu'il ne tombe pas, on est conduit à admettre l'existence d'une seconde force provenant des réactions normales exercées par le liquide sur sa surface extérieure, et pour l'équilibre, ces réactions doivent se réduire à une résultante unique égale et directement opposée au poids P du corps.

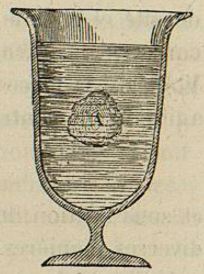

Fig. 131.

Substituons actuellement à la partie solidifiée du liquide, un corps de nature quelconque, mais ayant exactement la même forme ; les pressions exercées par le liquide étant indépendantes de la nature des surfaces, ces pressions se réduiront, comme précédemment, à la même résultante, et celle-ci aura la même intensité pour tous les corps plongés dans le liquide considéré et ayant la même enveloppe A, ou, en d'autres termes, tout corps plongé dans un liquide est sollicité par une force verticale de bas en haut, égale au poids du liquide qu'il déplace.

Le principe d'Archimède se vérifie expérimentalement au moyen de la balance hydrostatique.

160. Centre de poussée. — *On appelle centre de poussée, le point d'application de la résultante de toutes les pressions exercées par un liquide sur un corps qui y est plongé;* c'est le centre de gravité du volume liquide qu'il déplace.

Lorsque le corps est plein et homogène, le centre de poussée se confond avec le centre de gravité du corps.

Lorsque le corps n'est pas homogène, le centre de poussée et le centre de gravité ne coïncident plus; ils occupent alors des positions différentes.

Lorsque le corps est creux, le centre de poussée et le centre de gravité coïncident, à la condition que les volumes intérieurs et extérieurs aient le même centre de gravité.

La connaissance de ce qui précède permet d'expliquer les divers effets qui se produisent lorsqu'on plonge des corps de nature différente dans les liquides et qu'on les abandonne ensuite à eux-mêmes. Si V représente le volume d'un corps, π sa densité et π' celle du liquide, le produit $V\times\pi$ est le poids du corps ou la force qui tend à le faire descendre, et le produit $V\times\pi'$ est la force déterminée par la pression du liquide, et qui agit en sens contraire. La résultante R des deux forces est:

$$R=V(\pi-\pi')$$

et sous l'action de cette résultante, le corps se comportera de diverses manières, suivant les cas:

1° Si $\pi=\pi'$, on aura $R=0$; le corps sera plongé et en équilibre dans toutes les positions qu'on lui fera prendre.

2° Si $\pi>\pi'$, le corps tombera au fond sous l'action de la résultante R; c'est ce qui a lieu pour la fonte, le fer, le bronze plongés dans l'eau, l'alcool.

3° Si $\pi<\pi'$, le corps s'élèvera, il sera flottant; sous l'influence de la résultante R, agissant cette fois de bas en haut, il sortira de la surface libre du liquide jusqu'à ce que le poids du volume de liquide déplacé soit justement égal à son poids; c'est ce qui a lieu pour le bois, le liège plongés dans l'eau, la pierre, le fer plongés dans le mercure, et pour tous les corps dont la densité est inférieure à celle du liquide dans lequel ils sont placés.

Nous aurons donc deux cas à considérer pour l'équilibre des corps placés dans les liquides: 1° *équilibre des corps plongés;* 2° *équilibre des corps flottants.*

161. Équilibre des corps plongés. — Nous savons que lorsqu'un corps est plongé dans un liquide quelconque en équilibre, ce corps est soumis à l'action de deux forces: 1° son poids P, force verticale appliquée à son centre de gravité, et qui agit de haut en bas; 2° la pression du liquide, force verticale appliquée au centre de gravité du volume liquide déplacé, et qui agit de bas en haut. Pour l'équilibre, il faut que ces deux forces soient égales et directement opposées, c'est-à-dire que: 1° *le poids du corps soit égal au poids du liquide déplacé;* 2° *que le centre de gravité du corps et le centre de poussée soient situés sur une même verticale.*

162. Stabilité des corps plongés. — Les conditions relatives à la stabilité des corps plongés présentent deux cas: 1° les corps sont homogènes; 2° les corps sont quelconques.

1° Dans le cas d'un corps homogène, le centre de gravité se confond, comme nous l'avons déjà dit, avec le centre de gravité du liquide déplacé, et l'équilibre est indifférent; le corps se maintient en équilibre stable, quelle que soit la position qu'on lui fasse prendre à l'intérieur de la masse liquide.

2° Dans le cas d'un corps quelconque non homogène, il faut, pour que l'équilibre soit stable, outre les conditions énoncées ci-dessus, que le centre de gravité du corps soit au-dessous du centre de poussée.

Considérons une sphère S (*fig.* 132) dont la partie inférieure est formée d'une matière très dense; elle sera en équilibre stable dans la position (1) où le centre de gravité G du système total est au-dessous du point C, centre de poussée. En effet, supposons que l'on fasse tourner cette sphère de manière à ce que G vienne occuper une certaine position (2); sous l'influence du poids P appliqué en G et agissant de haut en bas, et de la poussée P′ du liquide, appliquée au point C, centre de pression, il y a production d'un couple qui tend à imprimer à la sphère un mouvement de rotation autour d'elle-même, pour ramener le point G dans sa position primitive, c'est-à-dire sur la verticale du point C et au-dessous de ce point.

La sphère sera également en équilibre dans la position (3) où le centre de gravité et le centre de poussée se trouvent sur la même verticale, le premier de ces points étant au-dessus du second. Mais si l'on fait prendre au corps la position (4), le poids P appliqué en G et agissant de haut en bas, et la poussée du liquide appliqué en C et agissant de bas en haut, forment un couple qui tend à ramener la sphère vers sa position

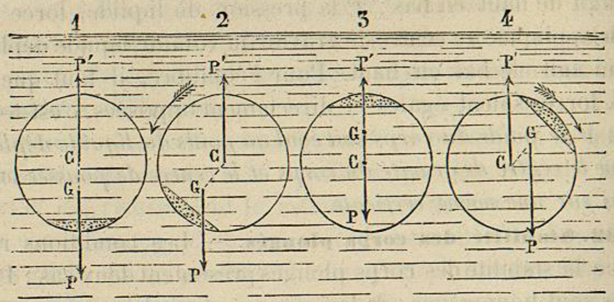

Fig. 132.

(1) d'équilibre stable. La position (3) est donc pour le corps une position d'équilibre instable, car pour un déplacement aussi faible que l'on voudra, la pesanteur agira pour ramener le point G au-dessous du point C.

Ainsi, pour que l'équilibre soit stable, *il faut que le centre de gravité soit au-dessous du centre de poussée.*

163. Équilibre des corps flottants. — Un corps flottant à la surface d'un liquide, c'est-à-dire plongé en partie dans ce liquide, est sollicité par deux forces : 1° son poids P, force verticale agissant de haut en bas et appliquée en son centre de gravité ; 2° la poussée du liquide, force verticale agissant de bas en haut et appliquée au centre de gravité du volume liquide déplacé. Pour l'équilibre, il faut que ces deux forces soient égales et directement opposées, c'est-à-dire : 1° *que le poids du corps soit égal au poids du liquide déplacé ; 2° que le centre de gravité du corps et le centre de poussée soient situés sur une même verticale.*

164. Stabilité des corps flottants. — La stabilité des corps

flottants dépend, comme la stabilité des corps plongés, des différentes positions du centre de gravité du corps relativement au centre de poussée ; pour les corps plongés, l'équilibre stable exige que le centre de gravité soit au-dessous du centre de poussée ; pour les corps flottants, cette condition suffisante n'est pas nécessaire.

165. Corps non homogènes. — Considérons une sphère non homogène flottante dans un liquide en équilibre ; soit G (*fig.* 133) son centre de gravité situé au-dessus du point C, centre de poussée du volume liquide déplacé. Imprimons au corps un déplacement qui lui fasse occuper la position (2) ; le volume du liquide déplacé étant toujours le même, puisque le poids de la sphère est invariable, le nouveau centre de poussée C' sera toujours situé sur la verticale du point O et à une distance OC' = OC ; mais le centre de gravité G du corps occupant une position fixe sur AB, la sphère se trouve sollicitée par un couple qui tend à la ramener à sa position primitive en la faisant tourner autour du point O, c'est-à-dire que l'équilibre est stable. Ainsi, malgré que le centre de gravité G du corps flottant soit au-dessus du centre de poussée, mais au-dessous du point O, il y a équilibre stable.

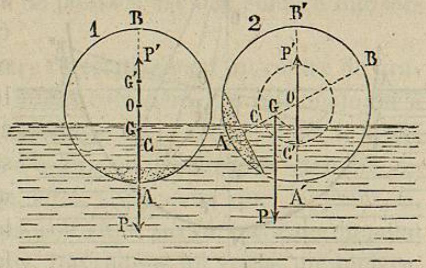

Fig. 133.

Supposons le point G situé au-dessus du point O, en G' par exemple ; si on dérange la sphère de cette position d'équilibre (1), le poids du corps agissant en G' et la pression du liquide appliquée en C, ne se trouvant plus sur une même verticale, donnent naissance à un nouveau couple qui, au lieu de ramener le corps dans sa position première, agira au contraire pour faire descendre le point G' au-dessous du point O. L'équilibre est donc instable, et cela arrivera pour toutes les positions du point G prises au-dessus du point O ; si ces deux points coïncidaient, l'équilibre serait indifférent.

Un corps flottant est donc en équilibre stable, bien que son centre de gravité soit au-dessus du centre de poussée ; mais il faut pour cela qu'il se trouve au-dessous du point O.

166. Cas d'un corps quelconque. — Soit un cylindre flottant à la surface d'un liquide en repos, et tel que la section faite par un plan perpendiculaire au plan longitudinal de symétrie MN soit représenté par la figure 134. Soit AB la ligne d'eau correspondant à cette position du corps, et C son centre de poussée, ou le centre de gravité du volume liquide déplacé. Le cylindre étant dérangé de sa position première par une cause quelconque qui le forcera à s'incliner vers la droite, une nouvelle ligne de flottaison A′B′ s'établira, et le centre de poussée, qui était précédemment en C, se sera transporté en un point C′, centre de gravité du volume A′MB′D, puisque le poids du corps n'a pas changé.

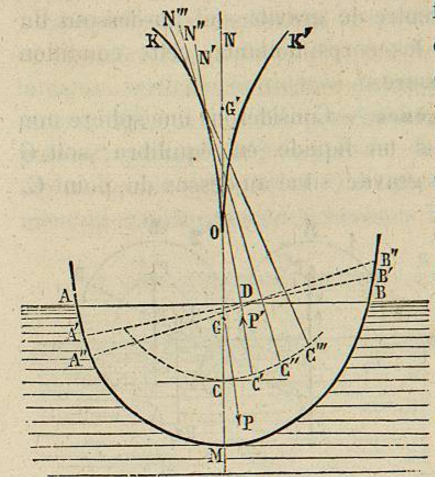

Fig. 134.

Or ces deux volumes AMBD et A′MB′D ont une partie commune A′MBD, et pour passer du premier au second, il faut retrancher la partie ADA′ située à gauche, et ajouter la partie B′DB située à droite. Par conséquent, le nouveau centre de poussée C′ se trouve à droite du plan MN et s'est rapproché de la ligne d'eau primitive AB.

En considérant une nouvelle ligne d'eau A″B″ déterminée par une nouvelle position du corps, on verrait de même que le nouveau centre de poussée C″ du volume A″MB″ est encore situé plus près de la droite AB que le point C′.

Il résulte de là que le centre de poussée, dans les différentes positions que peut prendre le corps, décrit une courbe dont le point le plus bas, C, se trouve dans le plan MN; par suite, la tangente menée en ce point C est horizontale et parallèle à la ligne d'eau qui lui correspond. Donc, pour toutes les positions du corps, le point de contact de la tangente et de la courbe des centres de poussée détermine le centre de

poussée relatif à la position considérée. En menant aux différents points de la courbe CC′C″... des normales CN, C′N′, C″N″..., ces normales déterminent, par leurs intersections, une courbe à deux branches OK, OK′, qui est la développée de la courbe CC′C″..., lieu des centres de poussée. Cette courbe est appelée *courbe métacentrique*, et le point de rebroussement O s'appelle le *métacentre*.

Si le centre de gravité du corps ne se trouve pas toujours dans un même plan pour toutes les variations de position du corps, le lieu des centres de poussée est une surface dite *métacentrique*.

La position du métacentre O, relativement au centre de gravité du corps, joue, dans le cas considéré, un rôle analogue à celui du point O, centre de figure de la sphère dont il a été parlé précédemment, c'est-à-dire qu'il définit la stabilité ou l'instabilité du corps. En effet, supposons que le point G, centre de gravité du corps, soit situé sur la verticale du point C et au-dessous du point O. Imprimons au corps un déplacement très petit, de façon que la ligne d'eau AB devienne A′B′; le cylindre est soumis à l'action de deux forces : 1° son poids P appliqué au centre de gravité G, et 2° la poussée du liquide, force verticale dirigée suivant la normale au point C′ et égale au poids P, mais de sens contraire. Ces deux forces donnent naissance à un couple dont le sens tend à ramener le corps à sa position première; il y a donc équilibre stable.

Le centre de gravité G′ situé au-dessus du métacentre serait pour le corps une position d'équilibre instable, car le poids P et la poussée du liquide formeraient un nouveau couple qui aurait pour effet de ramener le point G′ au-dessous du métacentre, ou, en d'autres termes, pour un déplacement très petit, le corps continuerait de lui-même à se mouvoir pour venir occuper une position d'équilibre stable.

Donc, pour qu'un corps flottant soit en équilibre stable, *il faut et il suffit que son centre de gravité soit au-dessous du métacentre.*

167. Application aux navires. — Les conditions relatives à la stabilité des corps flottants trouvent leur application la plus importante dans l'*arrimage* des navires, c'est-à-dire dans leur chargement; celui-ci doit être effectué pour que les navires remplissent les conditions les plus favorables à leur stabilité.

Afin d'abaisser le centre de gravité, on dispose les objets les plus lourds à fond de cale, et on répartit, autant que possible, la charge symétriquement par rapport au plan longitudinal. Lorsque cette charge ne suffit pas à donner au navire le tirant d'eau nécessaire à sa stabilité, on y ajoute des matières pesantes telles que des pierres, de la fonte, du sable de la mer, etc.; cette charge additionnelle, appelée *lest*, sert aussi, pendant la marche, à changer la position du centre de gravité suivant les besoins.

Dans l'arrimage, on s'arrange toujours pour que le centre de gravité soit situé au-dessus du centre de poussée qui, dans les navires, prend le nom de *centre de carène*. Cette disposition a pour but de ne pas donner au bâtiment une stabilité trop exagérée qui aurait le grave inconvénient de le faire revenir trop brusquement à sa position d'équilibre après chaque oscillation, et qui occasionnerait un grand malaise à l'équipage et une forte fatigue à la carcasse.

168. Analogie entre la stabilité des corps flottants sur l'eau et leur stabilité sur un plan horizontal. — Dans ce qui précède, nous avons trouvé la courbe, ou lieu des centres de poussée, pour les différentes positions que peut prendre le corps représenté par la figure 134. Si l'on donnait à un corps de même poids et de même centre de gravité que le précédent, la forme déterminée par la courbe dont nous venons de parler, ce nouveau corps, en s'appuyant sur un plan horizontal, se trouverait exactement dans les mêmes conditions d'équilibre que le premier, car, dans ce cas, la réaction exercée par le plan, à son point de contact avec le corps, produirait le même effet que la force qui agit au centre de poussée du corps flottant.

CHAPITRE VII

APPLICATION DES PRINCIPES DE LA STATIQUE AUX MACHINES

169. On désigne, en statique, sous le nom de *machines*, des corps ou des assemblages de corps qui, étant soumis à certaines liaisons, servent à mettre en équilibre des forces qui ne sont ni égales, ni directement opposées.

Généralement, deux forces sont en présence sur une machine; l'une, appelée *puissance*, dont la fonction est d'en vaincre une autre, appelée *résistance*. Ces deux forces étant, le plus souvent, d'intensité et de direction différentes et devant être mises en équilibre par l'intermédiaire de la machine, il faut que le corps, ou l'assemblage de corps composant cette machine, soit soumis à certaines liaisons, ou, autrement dit, gêné dans son mouvement par des obstacles fixes.

On distingue deux classes de machines: 1° les machines *simples*, et 2° les machines *composées*. Les machines simples sont formées par un seul corps solide.

Les machines composées sont formées par deux ou plusieurs corps solides reliés entre eux et réagissant les uns sur les autres.

D'après la nature de l'obstacle qui gêne leur mouvement, les machines simples se divisent en trois systèmes différents et prennent les noms indiqués par le tableau suivant:

NATURE DE L'OBSTACLE.	NOM DE LA MACHINE.
Point fixe.	Levier.
Axe fixe.	Tour ou treuil.
Plan fixe.	Plan incliné.

Nous étudierons, en particulier, chacun de ces trois systèmes, et pour chacun d'eux, nous déterminerons les conditions d'équilibre entre la puissance et la résistance; nous donnerons également les applications qui s'y rattachent, telles que les balances et les poulies pour le premier système; le cric, la chèvre