et les grues pour le second. Comme application du troisième système, nous verrons le haquet, les plans inclinés automoteurs et, en cinématique, le coin et les vis.

§ 1. — SYSTÈME LEVIER.

170. On désigne, en général, sous le nom de *levier*, un corps solide de forme quelconque, assujetti à se mouvoir en tous sens autour d'un point fixe ; il affecte ordinairement la forme d'une barre rigide AB (*fig.* 135), droite ou courbe, mobile autour

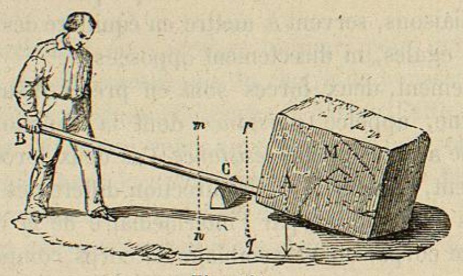

Fig. 135.

d'un de ses points C, appelé *point d'appui* ou centre de rotation. Un ouvrier, placé à l'extrémité B, peut, en exerçant un effort convenable, déplacer un corps M disposé à l'autre extrémité A.

Un levier AB (*fig.* 136) n'est ordinairement soumis qu'à l'action de deux forces, l'une P, appelée *puissance*, agissant pour vaincre une autre force Q, appelée *résistance*. Si du point d'appui C nous abaissons deux perpendiculaires sur les directions des forces P et Q, ces droites prennent le nom de *bras de levier*.

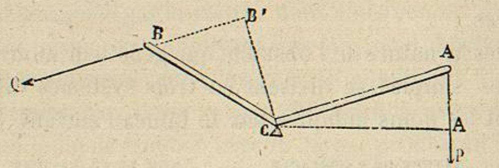

Fig. 136.

171. Conditions d'équilibre. — Nous considérerons deux cas dans la recherche des conditions d'équilibre du levier : 1° celui où il est soumis à un nombre quelconque de forces, et 2° celui où ces forces se réduisent à deux, une puissance et une résistance.

1° Lorsqu'un levier est soumis à un nombre quelconque de forces, il faut et il suffit, pour l'équilibre, *que toutes ces forces aient une résultante unique passant par le point d'appui.*

Cette question a été résolue (**127**) lorsque nous avons traité de l'équilibre d'un corps ayant un point fixe. En effet, nous savons que toutes les forces sollicitant le levier peuvent se réduire à deux, S et T, dont l'une, S, passe par un point pris à volonté ; choisissons le point d'appui C ; cette force sera détruite par la résistance du point fixe, et, pour qu'il y ait équilibre, il faut que la force T passe aussi par le point d'appui. Ces deux forces, concourant au même point C, se composent en une seule, R, appliquée au même point, force qui détermine la pression supportée par le point d'appui.

2° Lorsqu'un levier est sollicité par deux forces, il faut et il suffit, pour qu'il y ait équilibre : 1° *que ces deux forces soient dans un même plan avec le point d'appui ;* 2° *que leurs intensités soient en raison inverse de leurs bras de levier, et* 3° *qu'elles tendent à faire tourner le levier en sens contraire.*

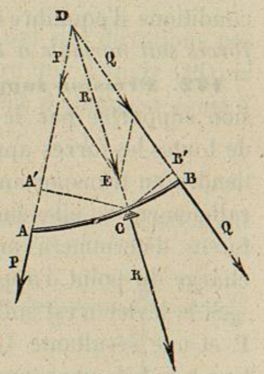

Fig. 137.

Considérons un levier AB (*fig.* 137) mobile autour du point C, et soient P la puissance agissant en A, et Q la résistance agissant en B. Nous avons prouvé (**30**) que lorsque deux forces admettent une résultante unique, cette résultante se trouve dans le plan des composantes ; donc, pour que les deux forces P et Q aient une résultante passant par le point C, il faut d'abord qu'elles soient dans un même plan avec le point d'appui.

Abaissons du point C et sur la direction des forces P et Q, les perpendiculaires CA′ et CB′, que nous désignerons par p et q. La résultante R devant passer par le point C, si nous prenons les moments des forces par rapport à ce point, les moments des composantes sont égaux et de signe contraire ; on a donc :

$$P \times CA' - Q \times CB' = 0$$

Le moment de la résultante étant égal à la somme algébrique des moments des composantes, cette équation indique encore que le moment de la résultante est nul, ce qui est évident, puisqu'elle passe par le centre des moments. On tire de là :

$$P \times p = Q \times q$$

et

$$\frac{P}{Q} = \frac{p}{q}$$

C'est-à-dire que la puissance et la résistance sont inversement proportionnelles à leurs bras de levier, et, de plus, elles tendent à faire tourner le levier en sens contraire.

Remarque I. — On voit, par là, que l'équilibre du levier ne cessera pas d'exister si l'on change à volonté la grandeur et la position de la puissance ou de la résistance, pourvu que le moment de ces forces reste constant par rapport au point d'appui.

Remarque II. — Si le levier repose, par une arête vive, sur une surface d'appui, comme dans le fléau des balances, il peut arriver que si le point de contact change avec l'inclinaison du levier, celui-ci tende à glisser. Il faut alors ajouter aux conditions d'équilibre énoncées ci-dessus, *que la résultante des forces soit normale à la surface d'appui.*

172. Pression supportée par le point d'appui. — La pression supportée par le point d'appui est égale à la résultante de toutes les forces appliquées au levier ; cette résultante s'obtiendra en transportant toutes les forces au point d'appui, parallèlement à elles-mêmes, et la composition de toutes ces forces déterminera une résultante qui sera évidemment la charge du point d'appui.

Si le levier n'est sollicité que par deux forces, une puissance P et une résultante Q, on prolongera leur direction jusqu'à leur point de concours D (*fig.* 137), et on déterminera, par la règle du parallélogramme des forces, leur résultante R qui, étant appliquée en C, sera la charge du point d'appui.

L'intensité de la résultante est donnée algébriquement par la formule :

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos(PQ)}$$

173. Différents genres de levier. — Lorsque la puissance et la résistance ont des directions parallèles (*fig.* 138) et de

même sens, c'est-à-dire que l'angle $(PQ) = 0$, la pression R supportée par le point d'appui est égale à la somme des forces P et Q ;

$$R = P + Q$$

Cette valeur maximum de R est fournie par la position du point d'appui situé entre les points d'application des forces auxquelles le levier est soumis. Toutes les fois que le point d'appui est situé entre le point d'application de la puissance et celui de la résistance, le levier est dit du *premier genre*. Exemples : les fléaux des balances, les pinces des carriers, les balanciers des machines à vapeur, les ciseaux.

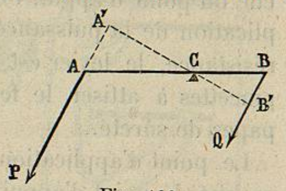

Fig. 138.

Le levier étant rectiligne, les perpendiculaires CA' et CB' sont respectivement proportionnelles aux segments CA et CB, et les forces P et Q sont en raison inverse de la distance de leurs points d'application au point d'appui ; par suite, le levier sera favorable ou défavorable à la puissance, suivant que le bras du levier de la puissance sera plus grand ou plus petit que celui de la résistance.

Lorsque la puissance et la résistance ont des directions parallèles et de sens contraire, c'est-à-dire que l'angle $(PQ) = 180°$, la pression R supportée par le point d'appui est égale à la différence des forces P et Q :

$$R = Q - P$$

Cette valeur minimum de R est donnée par la position du point d'appui situé en deçà et au delà du point d'application des forces P et Q. Si le point d'application de la résistance est le plus rapproché du point d'appui, comme dans la figure 139, le levier est dit du *second genre*.

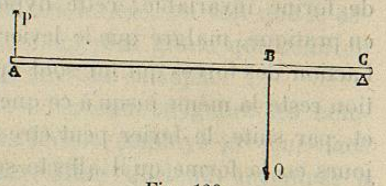

Fig. 139.

Un levier est donc du second genre, *lorsque le point d'application de la résistance est placé entre le point d'appui et la puissance.* Exemples : les brouettes, les pédales des pianos, les casse-noisettes.

La puissance étant toujours inférieure à la résistance, puisqu'elle est la plus éloignée du point d'appui, le levier du second genre est toujours favorable à la puissance.

Si le point d'application de la puissance est le plus rapproché du point d'appui, ou, en d'autres termes, si le point d'application de la puissance est situé entre le point d'appui et la résistance, le levier est dit du *troisième genre*. Exemples : les pincettes à attiser le feu, la pédale du remouleur, les soupapes de sûreté.

Le point d'application de la puissance étant le plus rapproché du point d'appui, il s'ensuit que, pour qu'il y ait équilibre, la puissance doit toujours être plus grande que la résistance ; c'est sur ce principe que repose la construction des soupapes de sûreté.

Le levier du troisième genre est toujours défavorable à la puissance.

Remarque. — Dans tout ce qui précède, nous avons négligé le poids du levier, c'est-à-dire que nous l'avons considéré de telle sorte que la verticale du centre de gravité passât par le point d'appui. Dans bien des cas, cette abstraction ne peut plus être admise, et, si nous désignons par X le poids du levier, et par x son bras de levier, l'équation d'équilibre deviendra :

$$\mathrm{P} \times p + \mathrm{X} \times x + \mathrm{Q} \times q = 0$$

en affectant chaque moment du signe qui lui correspond.

Nous avons considéré également le levier comme un corps de forme invariable ; cette hypothèse peut encore subsister, en pratique, malgré que le levier fléchisse et se déforme sous l'action des forces qui lui sont appliquées, car cette déformation reste la même jusqu'à ce que les forces aient cessé d'agir, et, par suite, le levier peut être considéré comme ayant toujours eu la forme qu'il affecte sous l'influence des forces qui le sollicitent. On rentre ainsi dans le cas d'un levier parfaitement rigide et indéformable, et les considérations exposées plus haut lui sont applicables.

174. Leviers multiples. — Si l'on a une grande résistance à équilibrer avec une faible puissance, le bras de levier de celle-ci devient d'une longueur considérable. Pour éviter cet inconvénient, on fait souvent usage de plusieurs leviers reliés les uns aux autres et qu'on appelle *leviers multiples*.

La combinaison de ces leviers peut se faire d'une infinité de manières suivant les besoins.

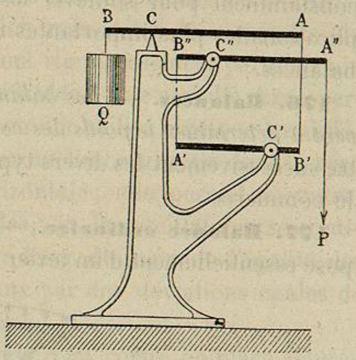

Fig. 140.

La figure 140 représente un levier multiple composé de trois leviers du premier genre. Dans le premier de ces leviers, la résistance agit en B et la puissance en A ; si nous admettons $\mathrm{BC} = 1/10\,\mathrm{AC}$, nous aurons :

$$p = \frac{\mathrm{Q}}{10}$$

La résistance appliquée en B′, du second levier, n'est autre chose que la puissance p agissant en A ; la puissance agit ici en A′, et pour les mêmes proportions que ci-dessus, nous aurons :

$$p' = \frac{p}{10} = \frac{\mathrm{Q}}{10 \times 10}$$

Enfin, pour le troisième levier A″B″ nous aurons également :

$$\mathrm{P} = \frac{p'}{10} = \frac{\mathrm{Q}}{10 \times 10 \times 10} = \frac{\mathrm{Q}}{1000}$$

On voit que, par ce moyen, on peut soulever un poids considérable avec une force relativement très petite : mais en se rendant compte du mouvement des leviers, on voit que le déplacement du point A″ est beaucoup plus grand que celui du point B. Nous reviendrons plus tard sur ce sujet.

175. Usages du levier. — Personne n'ignore les nombreux et importants usages du levier, employé presque dans toutes les machines composées. Dans quelques machines à vapeur verticales, où il prend le nom de *balancier*, il sert à transmettre le mouvement de la tige du piston à la bielle motrice. Il est adapté au régulateur à force centrifuge, soit pour ouvrir ou fermer la valve placée dans le tuyau de communication du cylindre avec la chaudière, soit pour faire monter ou descendre la vanne d'arrivée de l'eau dans les récepteurs hydrauliques. Il sert aussi, dans les générateurs à vapeur et dans les presses hydrauliques, à empêcher la tension intérieure de dépasser une certaine limite. Les ouvriers l'emploient constamment pour soulever les fardeaux, et l'une de ses applications les plus importantes réside dans la construction des balances.

176. Balances. — *Les balances sont des appareils qui servent à déterminer le poids des corps.* Nous allons faire connaître successivement les divers types de balances employées dans le commerce.

177. Balance ordinaire. — La balance ordinaire se compose essentiellement d'un levier AB (*fig.* 141) du premier genre

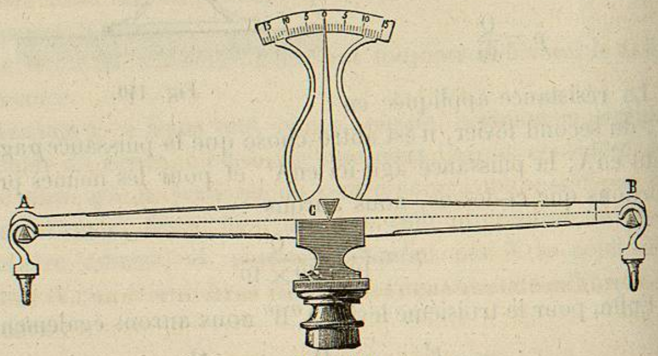

Fig. 141.

appelé *fléau*, qui est une pièce rigide en métal, généralement en cuivre ou en acier, aux extrémités de laquelle sont suspendus, au moyen de chaînes, deux plateaux destinés à recevoir, l'un, les corps à peser, et l'autre, la quantité de poids gradués nécessaires pour établir l'équilibre. Cette barre AB porte en son milieu, et perpendiculairement à sa longueur, un prisme triangulaire C, en acier trempé, appelé *couteau*, faisant saillie de chaque côté. Ce couteau repose, par son arête inférieure, sur deux plaques bien polies, également en acier trempé et quelquefois en agate, disposés dans un même plan horizontal, l'une en avant, l'autre en arrière, et fixées à la partie supérieure d'une colonne servant de support à la balance. Aux deux extrémités du fléau, et à égale distance de l'axe de rotation ou de l'arête inférieure du couteau central,

sont disposés deux autres couteaux également en acier trempé, dont l'une des arêtes, tournée vers le haut, reçoit les crochets auxquels sont fixées les chaînes qui supportent les plateaux. On s'arrange de manière que les trois arêtes de suspension du fléau et des deux plateaux soient rigoureusement parallèles et situées dans un même plan horizontal. Une aiguille, fixée perpendiculairement au fléau et en son milieu, indique les différentes positions de ce fléau sur un limbe gradué dont le zéro correspond à la position horizontale; elle permet en outre, dans les balances très sensibles, où les oscillations se continuent pendant un temps assez long, de juger de l'égalité des poids disposés dans les plateaux par des déviations égales de chaque côté du zéro.

178. Pour déterminer le poids d'un corps, on place celui-ci dans l'un des plateaux de la balance, et dans l'autre, on met un certain nombre de poids connus, de façon à ce qu'il y ait équilibre, position fournie par l'aiguille indicatrice, si elle est au zéro. Il suffit alors, si la balance est juste, d'évaluer le nombre de kilogrammes et de subdivisions qui ont été employés, pour obtenir le poids du corps.

179. Conditions auxquelles doit satisfaire une bonne balance. — Une balance doit, pour être employée utilement, satisfaire aux deux conditions générales suivantes : 1° elle doit être *juste ;* et 2° elle doit être *sensible.*

180. Justesse. — Pour qu'une balance soit juste, il faut : 1° que le fléau se maintienne horizontal lorsque les plateaux sont vides ou contiennent des poids égaux; 2° que les bras du fléau soient égaux en longueur.

Pour vérifier la justesse d'une balance, on constate d'abord l'horizontalité du fléau, lorsque les plateaux ne renferment aucun corps, en supposant qu'ils soient exactement du même poids; puis, on met dans ces plateaux un certain nombre de poids, de telle sorte que, sous leur influence, le fléau occupe toujours la position horizontale; on change alors les poids de place, et si l'horizontalité se maintient encore, on peut affirmer que la balance est juste.

181. Développons les deux conditions de justesse. Soient l et l' (*fig.* 142) les longueurs des deux bras du fléau, q le poids de ce fléau, d la distance de son centre de gravité au point de suspension, et P la valeur commune des poids placés dans les deux plateaux. Pour qu'il y ait équilibre, il faut que la somme des moments de toutes les forces par rapport au point C soit nulle. On aura donc :

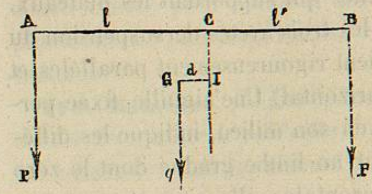

Fig. 142.

$$Pl - Pl' \pm qd = 0$$
$$\text{ou} \quad P(l-l') \pm qd = 0$$

Le terme qd sera positif si le centre de gravité est situé à gauche du point de suspension, et négatif s'il est à droite.

Cette équation doit se vérifier quelle que soit la valeur de P; il en résulte forcément les égalités :

$$l = l' \quad \text{et} \quad d = 0$$

182. Nous venons de prouver que le centre de gravité du fléau doit se trouver sur la verticale passant par l'axe de suspension; mais on peut se demander si, sur cette verticale, sa position est indifférente par rapport au point fixe. Il est facile de voir qu'il n'en est pas ainsi, car l'équilibre doit être stable, lorsque le fléau est horizontal et les plateaux chargés de poids égaux; de plus, si les poids placés dans les plateaux ne sont pas égaux, il faut aussi que cette différence soit indiquée par une nouvelle position d'équilibre stable, inclinée à l'horizon. Il est donc nécessaire d'examiner les trois cas qui peuvent se présenter : 1° le centre de gravité est au-dessus du point d'appui; 2° il se confond avec ce point; et 3° il est au-dessous de lui.

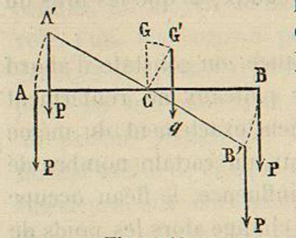

Fig. 143.

Soient AB (*fig.* 143) l'axe du fléau d'une balance, C son point de suspension, G son centre de gravité situé au-dessus du point C, A et B les points de suspension des plateaux. Le poids du fléau que nous désignerons par q, pouvant être considéré comme appliqué à son centre de gravité G, si l'on ajoute au poids P de droite, un poids additionnel très petit, ou si l'on imprime simplement un faible mouvement au fléau, celui-ci s'écartera de sa position

horizontale, le centre de gravité, venu en G', tendra toujours à s'abaisser, et la pesanteur, au lieu de le ramener vers sa position primitive, agira, au contraire, pour le faire descendre. L'équilibre est donc instable; on dit dans ce cas que la balance est *folle*.

Il est expressément interdit de se servir d'une balance folle, car rien ne peut avertir d'une erreur, lorsque l'équilibre est rompu.

2° Si le centre de gravité coïncide exactement avec le point d'appui, le poids du fléau est alors appliqué sur l'axe de suspension, et la balance se maintient en équilibre dans toutes les positions, si les plateaux sont vides ou contiennent des poids égaux; l'équilibre est donc indifférent. Une augmentation de poids, quelque petite qu'elle soit, dans l'un des plateaux, fera trébucher la balance. On dit dans ce cas que la balance est *indifférente*.

3° Considérons enfin le cas où le centre de gravité est au-dessous du point de suspension; dans ce cas, l'équilibre est stable. Si l'on imprime au fléau AB (*fig.* 144) un faible mouvement de manière à lui faire prendre la position A'B', le point G s'élèvera et viendra en G'; mais la pesanteur va agir pour le ramener, en sens contraire, vers sa position première. En vertu du mouvement précédemment acquis, il dépassera cette position, le centre de gravité passera à droite de l'axe de suspension, et la pesanteur agira de nouveau pour le faire redescendre. Au bout de quelques oscillations, l'équilibre sera rétabli, c'est-à-dire que le fléau sera redevenu horizontal.

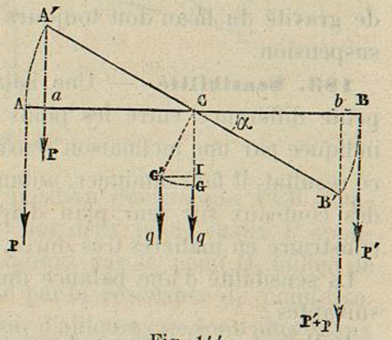

Fig. 144.

Supposons maintenant que le poids placé dans le plateau B surpasse de p celui qui est placé dans le plateau A; cet excédent de poids va agir pour faire incliner le fléau, et si cet excédent n'est pas très considérable, AB viendra, au bout de quelques osillations, prendre une nouvelle position d'équilibre stable A'B', le centre de gravité se trouvant transporté en G'.

En effet, prenons le moment de chacune des forces par rapport au point C; nous aurons, en abaissant des points A', B' et G', les perpendiculaires $A'a$, $B'b$, G'I, et en désignant par q le poids du fléau :

$$(P+p)\,Cb = P \times Ca + q \times G'I$$

Mais les deux poids égaux P, appliqués en A' et B', ont une résultante unique passant par le point C, qui est détruite par la résistance de ce point; par conséquent, les deux termes $P \times Cb$ et $P \times Ca$ s'éliminent, et il vient :

$$p \times Cb = q \times G'I$$

Or, à mesure que le fléau s'incline, le moment $p \times Cb$ diminue, tandis que le moment $q \times G'I$ augmente à partir de zéro. Il y a donc une position inclinée du fléau, et une seule, pour laquelle ces moments sont égaux, et dans cette nouvelle position, la balance est encore en équilibre stable. Donc, le centre de gravité du fléau doit toujours être au-dessous du point de suspension.

183. Sensibilité. — Une balance est sensible lorsqu'une petite différence entre les poids placés dans les plateaux est indiquée par une inclinaison sensible du fléau. Pour arriver à ce résultat, il faut diminuer, autant que possible, le frottement des couteaux sur leur plan d'appui, ce qui a conduit à les construire en matières très dures, telles que l'acier ou l'agate.

La sensibilité d'une balance implique encore les conditions suivantes :

1° Il faut que le fléau soit aussi long et aussi léger que possible, et que le centre de gravité soit situé le plus près possible de l'axe de suspension;

2° Il faut que les points de suspension du fléau et des plateaux soient en ligne droite.

Désignant par h la distance CG, du centre de gravité du fléau au point C, par l la longueur des bras du fléau et par α l'angle $ACA' = BCB'$, nous aurons :

$$Cb = l \cos\alpha \quad \text{et} \quad G'I = h \sin\alpha$$

Et l'équation d'équilibre $p \times Cb = q \times G'I$

pourra s'écrire : $p \times l \cos\alpha = q \times h \sin\alpha$; d'où $\dfrac{p \times l}{q \times h} = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \text{tang}\,\alpha$

Il est évident que la balance sera d'autant plus sensible que l'angle α sera plus grand pour un même poids p; mais tant que cet angle ne dépasse pas un petit nombre de degrés, on peut le considérer comme étant sensiblement proportionnel à sa tangente, et la formule ci-dessus montre qu'une balance sera d'autant plus sensible que la longueur l sera plus grande, le poids q du fléau plus faible et la distance h moins considérable, ce qui prouve la première condition énoncée plus haut.

Pour démontrer la deuxième condition, considérons un fléau affectant la forme d'un levier coudé ACB (*fig.* 145) mobile

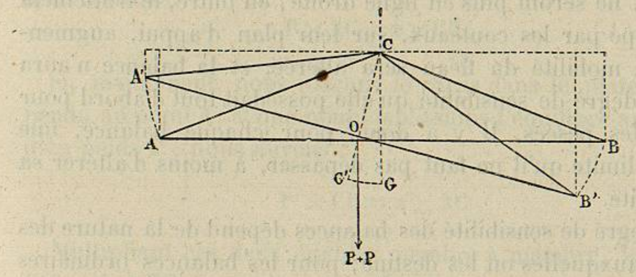

Fig. 145.

autour du point C. Pour une position quelconque A'CB' inclinée de ce fléau, la résultante des deux poids égaux P appliqués en A' et B' passerait toujours par le point O, milieu de A'B', et ne serait plus détruite par la résistance du point fixe. Les moments des poids P, qui, d'ailleurs, ne sont plus égaux puisque le point B' s'est rapproché de la verticale CG tandis que A' s'en est éloigné, ne disparaîtraient pas de l'équation d'équilibre, et, comme conséquence, l'angle α, ou la sensibilité de la balance, varierait suivant la charge des plateaux. En examinant la figure, on voit que la résultante $P+P$ tend à maintenir le point O sur la verticale du point d'appui, et sa résistance au déplacement sera d'autant plus considérable que les poids P seront plus grands. Il faut donc que les trois points de suspension soient en ligne droite pour que la sensibilité de la balance soit indépendante de la charge.

Pour réaliser la première condition, on donne au fléau la forme d'un losange que l'on évide de part et d'autre afin de le