sance qui doit agir à l'extrémité du garant pour faire équilibre à la résistance sera de $\frac{120}{6}$ ou 20 kilogrammes.

Si les moufles renfermaient chacune 4 poulies, la puissance ne devrait plus être que de $\frac{120}{8}$ ou 15 kilogrammes.

En combinant un certain nombre de palans, on peut, avec un effort relativement faible, faire équilibre à un poids très considérable.

204. Palan différentiel. — Le *palan différentiel* est une heureuse modification du palan ordinaire, qu'il remplace avec avantage dans beaucoup de circonstances, et principalement lorsqu'on dispose d'une faible puissance.

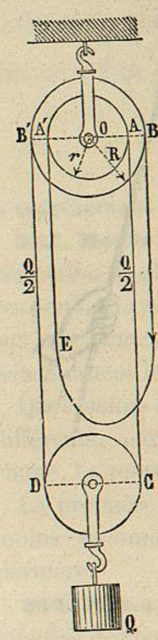

Fig. 163.

Cet appareil (*fig.* 163) se compose : 1° d'une moufle fixe renfermant deux poulies de différents diamètres, montées sur un même axe; 2° d'une poulie mobile dont le crochet supporte la résistance à vaincre ; et 3° d'une chaîne sans fin qui réunit ces deux organes. Les deux poulies de la moufle supérieure sont solidaires l'une de l'autre, et la chaîne est disposée de la manière suivante : à partir du point B, elle embrasse la gorge de la poulie BB', puis elle passe sous la poulie mobile qu'elle supporte, et ensuite elle revient s'enrouler sur la poulie AA'; les deux brins libres se réunissent pour former une chaîne sans fin sur laquelle on agit. En tirant le brin BP on fera monter le fardeau, et le contraire arrivera lorsqu'on agira sur le brin A'E.

205. Conditions d'équilibre. — Lorsqu'un palan différentiel est en équilibre sous l'action d'une puissance P et d'une résistance Q, *la puissance est égale à la résistance multipliée par une fraction qui a pour numérateur la différence des rayons des poulies de la moufle supérieure, et pour dénominateur le double du plus grand rayon.*

Supposons que la chaîne ne puisse pas glisser sur la surface des poulies ; soient P la puissance qui agit dans le sens indiqué par la flèche et Q la résistance appliquée au crochet de la poulie mobile. Pour l'équilibre de cette poulie, les tensions des brins AC et B'D doivent être égales, et comme ces directions sont sensiblement parallèles, chacune des tensions est égale à la moitié de la résistance Q, c'est-à-dire à $\frac{Q}{2}$. Le brin A'E n'étant soumis à aucune tension et son poids étant supposé nul, on aura pour la relation d'équilibre :

$$P \times R + \frac{Q}{2} \times r = \frac{Q}{2} \times R$$

d'où l'on tire : $$P = Q\left(\frac{R-r}{2R}\right)$$

Remarque. — Afin d'éviter le glissement de la chaîne sur les poulies supérieures, et par suite la descente du fardeau, puisque les tensions sont inégales pour chacun des deux brins libres, on a disposé, sur les rainures ou gorges qui ont été pratiquées sur leur circonférence, des saillies analogues aux dents d'engrenages. Les anneaux de la chaîne venant s'engager dans ces saillies, tout glissement est rendu impossible.

La charge Q reste suspendue à une hauteur quelconque, car, dans cette machine, la somme des moments des résistances passives l'emporte sur le moment de la charge, ce qui empêche la rotation des poulies supérieures lorsque les brins BP et A'E ne sont soumis à aucune force.

§ 2. — SYSTÈME TOUR.

206. Treuil. — Le *treuil* est une machine simple servant pour l'élévation des fardeaux. Il se compose essentiellement d'un cylindre A (*fig.* 164) ordinairement en bois et d'une assez faible section par rapport à sa longueur. Ce cylindre, appelé *tambour*, est terminé à ses deux extrémités par deux autres cylindres en fer BB, d'un diamètre plus petit, nommés *tourillons*, et qui reposent sur deux pièces concaves appelées *coussinets*, faisant partie de deux supports C reposant sur le sol. Le tambour ne peut donc prendre qu'un mouvement de rotation autour de son axe, mouvement que l'on utilise pour élever des fardeaux. A cet effet, le corps est suspendu à l'extrémité d'une corde qui, après s'être enroulée plusieurs fois sur la surface du cylindre A, vient se fixer, par son autre extrémité, en un point de sa longueur. La puissance agit par l'intermédiaire de divers organes qui constituent les différentes variétés du treuil; dans cette figure, la puissance est appliquée à l'extrémité de leviers F qui s'engagent dans des trous pratiqués sur le tambour même, et c'est en agissant sur ces leviers que l'on produit le mouvement de rotation du treuil et par suite l'enroulement de la corde et l'élévation du poids P.

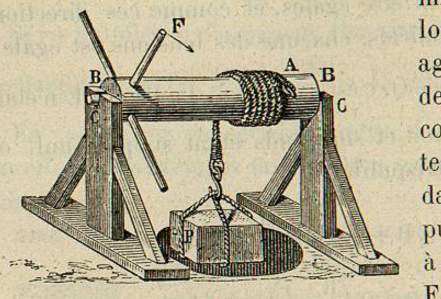

Fig. 164.

207. Conditions d'équilibre. — Lorsqu'un treuil est en équilibre, *la puissance est à la résistance comme le rayon du tambour est au rayon de la circonférence décrite par le point d'application de la puissance*, c'est-à-dire en raison inverse des bras de levier.

Considérons, en premier lieu, le cas où la puissance P et la résistance Q sont verticales. Soient xy (*fig.* 165) l'axe du treuil, C et C' les points d'application des forces P et Q; si nous joignons ces points C et C' aux points O et O' centres des circonférences obtenues en menant par C et C' des plans perpendiculaires à l'axe, les rayons OC et O'C' ainsi tracés seront horizontaux et par suite dans un même plan avec l'axe. La droite CC', qui joint les points d'application, rencontre l'axe xy en un point I, et pour l'équilibre, la résultante des forces P et Q doit être appliquée en ce point. On a donc :

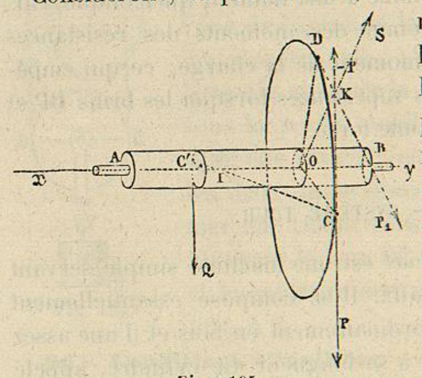

Fig. 165.

$$\frac{P}{Q}=\frac{IC'}{IC} \qquad (1)$$

Les triangles semblables OIC et O'IC' donnent :

$$\frac{IC'}{IC}=\frac{O'C'}{OC}$$

D'où, en substituant dans la relation précédente, on tire :

$$\frac{P}{Q}=\frac{O'C'}{OC}=\frac{r}{R}$$

c'est-à-dire que les forces P et Q sont inversement proportionnelles à leurs bras de leviers.

Considérons maintenant le cas où la puissance a une direction quelconque, P_1 par exemple, et cherchons les conditions d'équilibre. Soit D le point d'application de la force P_1. Appliquons à l'extrémité C du rayon horizontal OC, deux forces égales P et — P de sens contraire et ayant P_1 pour valeur commune. La force P_1, appliquée en D, et la force — P, appliquée en C, se rencontrent en un point K, où l'on peut les considérer comme appliquées et ensuite les composer en une résultante KS rencontrant l'axe xy en O, puisque ces forces sont égales ; cette résultante sera détruite par la résistance de l'axe. Nous sommes donc ramenés au cas précédent, car le treuil n'est plus sollicité que par les forces P et Q appliquées en C et C'; on aura donc la même relation d'équilibre :

$$\frac{P}{Q}=\frac{r}{R}$$

208. Pressions sur les tourillons. — Lorsque la puissance et la résistance agissent verticalement, il faut, pour obtenir la charge sur les tourillons, décomposer la résultante des deux forces P et Q, appliquée au point I, en deux composantes parallèles appliquées aux points A et B.

Lorsque la puissance est dirigée suivant P_1, il faut, pour obtenir la charge sur les tourillons : 1° décomposer la force $P + Q$ appliquée en I, en deux composantes parallèles appliquées aux points A et B; 2° décomposer la force S appliquée en O en deux composantes parallèles appliquées aux mêmes points A et B, et 3° déterminer la résultante entre les deux forces qui agissent sur chaque tourillon.

La décomposition de la résultante $P + Q$ donne, pour la première composante f appliquée en A :

$$f \times (P+Q)\frac{IB}{AB}$$

et pour la deuxième composante f_1, appliquée en B :

$$f_1 = (P+Q)\frac{AI}{AB}$$

La décomposition de la force S donne, pour la première composante appliquée en A :

$$f' = S \times \frac{BO}{AB}$$

et pour la deuxième composante appliquée en B :

$$f'_1 = S \times \frac{AO}{AB}$$

Pour obtenir la charge sur les tourillons, il suffira de composer les forces f, f' et $f_1 f'_1$, d'après la règle du parallélogramme des forces, et on aura en grandeur et en direction la pression supportée par chacun d'eux.

Les pressions sur les tourillons peuvent s'obtenir d'une manière plus simple, en remarquant que les forces P et Q peuvent être transportées parallèlement à elles-mêmes aux points O et O' de l'axe, sans que leur résultante $P+Q$ cesse de passer par le point I. En effet, les triangles semblables O'C'I et OCI donnent :

$$\frac{IC'}{IC} = \frac{O'I}{OI}$$

En remplaçant dans l'équation (1) il vient :

$$\frac{P}{Q} = \frac{O'I}{OI}$$

ce qui prouve que le point I divise la droite OO' en deux segments inversement proportionnels aux forces P et Q; ce point est, par suite, le point d'application de la résultante des forces P et Q transportées parallèlement à elles-mêmes aux points O et O'.

Les pressions sur les tourillons sont donc fournies par les forces P et Q appliquées aux points O et O', et par la force S appliquée en O. Mais il est facile de voir que si nous décomposons cette force S en ses composantes premières, les trois forces P, P_1 et $-P$, appliquées en O, se réduisent à la force primitive $P_1 = P$.

Donc, pour obtenir les pressions, il suffira de décomposer chacune des forces P_1 et Q en deux composantes parallèles appliquées aux points A et B; les deux composantes appliquées en chacun de ces points se composeront en une seule qui représentera en grandeur et direction la pression sur le tourillon.

Remarque. — Nous n'avons pas tenu compte, dans tout ce qui précède, du poids Q' du treuil, appliqué au centre de gravité situé sur l'axe xy; ce poids, force verticale, vient produire une augmentation de pression que l'on détermine en décomposant Q' en deux forces parallèles appliquées aux points A et B, s'ajoutant aux forces déjà connues.

209. Treuil des carriers. — Le *treuil des carriers*, ou *roue à chevilles*, est fréquemment employé pour extraire les pierres des carrières souterraines. Une roue de 4 à 6 mètres de diamètre (*fig.* 166), fixée sur le tambour, porte un grand nombre de chevilles implantées sur sa jante perpendiculairement à son plan; un ou deux hommes montent sur ces chevilles comme sur des échelons et agissent par leur poids pour déterminer la rotation du tambour et par suite l'élévation des blocs de pierre suspendus à l'extrémité d'une corde s'enroulant sur ce cylindre.

Soit A (*fig.* 167) le point auquel le poids d'un homme fait équilibre au poids du corps à soulever; l'équation des moments donne :

$$\frac{P}{Q} = \frac{OM}{ON}$$

Ce point A est pour l'ouvrier une position d'équilibre stable. En effet, supposons qu'il s'élève jusqu'en B par exemple; la puissance agissant à l'extrémité d'un bras de levier plus grand, son moment augmente, et comme celui de la résistance reste constant, l'équilibre sera rompu, la roue se mettra en mouvement dans le sens de la flèche f et ramènera l'ouvrier à sa position A. Si, au contraire, cet ouvrier descend jusqu'au point

C, le moment de la puissance diminuera et l'équilibre n'aura plus lieu; la résistance l'emportera et fera mouvoir la roue dans le sens de la flèche f', c'est-à-dire qu'elle ramènera encore l'ouvrier vers la position A. Cette position est donc stable pour l'ouvrier, et il y a complète sécurité. Mais il n'en

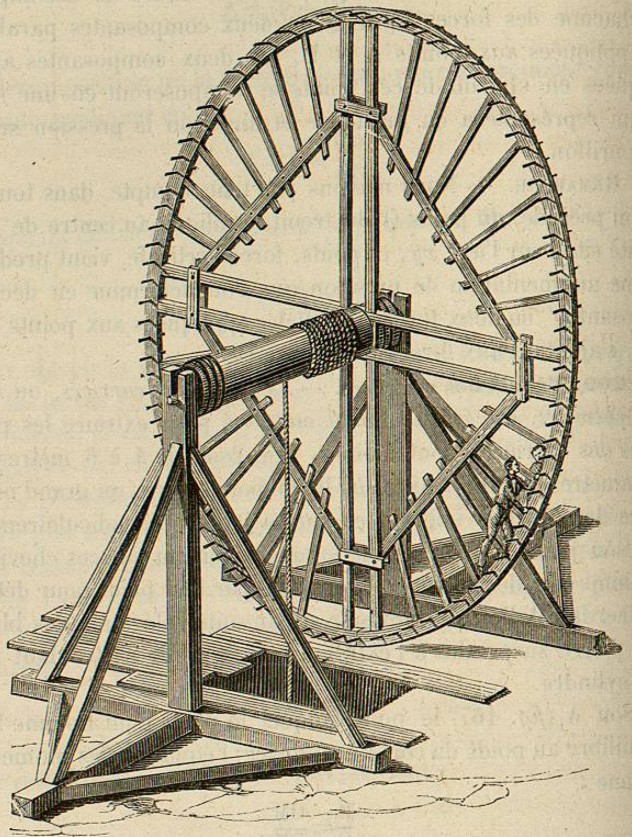

Fig. 166.

serait plus de même si le point A se trouvait au-dessus de l'axe du tambour, en A′ par exemple. Dans cette position, symétrique de la position A, l'équilibre existe évidemment, mais cet équilibre est instable. En effet, supposons qu'une cause quelconque, le choc de la pierre contre les parois du puits, vienne instantanément augmenter la résistance Q; l'ouvrier sera

amené au-dessus du point A′, et le moment de la puissance diminuant à mesure qu'il s'élève, cet ouvrier sera entraîné sans retour avec la roue.

On voit donc que l'ouvrier ne doit jamais agir au-dessus de l'axe du tambour; sans cette précaution, il s'exposerait à de graves accidents qui mettraient sa vie en danger.

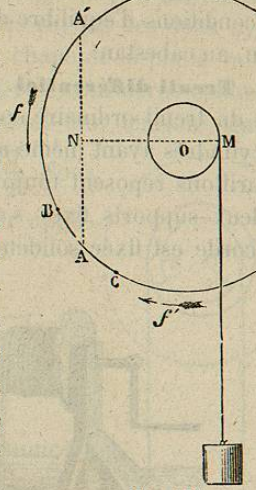

Fig. 167.

210. Cabestan. — Le *cabestan* (*fig.* 168) est un treuil dont l'axe est vertical. Cet appareil est principalement employé dans les ports de mer pour exercer de puissants efforts de traction dans une direction horizontale. Il se compose d'une charpente solide dont deux traverses horizontales, percées de trous, servent de coussinets aux tourillons du tambour. Le tourillon supérieur se prolonge et se termine par une partie prismatique, appelée *tête*, percée de trous dans lesquels s'emmanchent

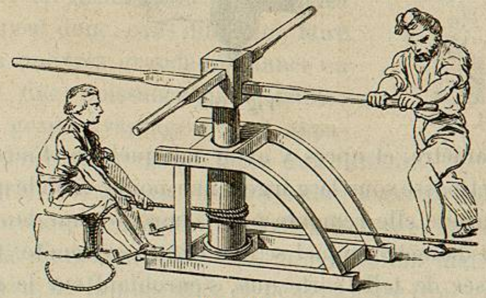

Fig. 168.

quatre, six ou huit leviers aux extrémités desquels agissent des hommes. La corde n'est pas fixée sur le tambour comme dans le treuil; elle y fait seulement deux ou trois tours et l'extrémité libre est maintenue par un manœuvre qui la tire au fur et à mesure que le cylindre tourne, afin d'empêcher tout glissement; de cette façon, une même quantité de corde est toujours enroulée, ce qui permet de donner au tambour une assez faible hauteur. Tout le système est maintenu solidement par des cordages attachés à des points fixes.

Les conditions d'équilibre du treuil s'appliquent, sans modification, au cabestan.

211. Treuil différentiel. — Le *treuil différentiel* (*fig.* 169) diffère du treuil ordinaire en ce que le tambour est formé de deux cylindres ayant même axe, mais de diamètres différents. Les tourillons reposent toujours sur des coussinets maintenus dans deux supports fixes s'appuyant sur le sol. L'extrémité d'une corde est fixée solidement sur le cylindre qui a le plus

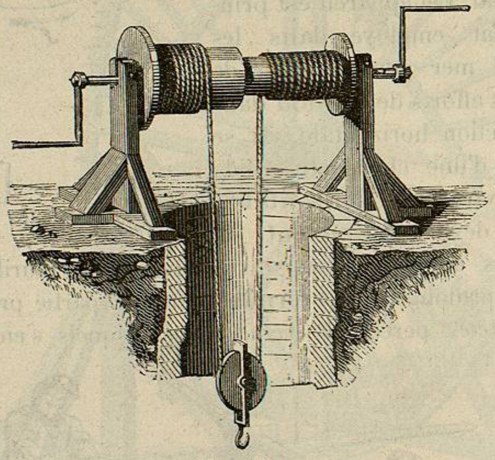

Fig. 169.

grand diamètre, et après y avoir fait quelques tours, elle s'en détache et passe sous la gorge d'une poulie mobile qu'elle supporte; ensuite elle remonte pour s'enrouler sur le cylindre de plus petit diamètre auquel se fixe l'autre extrémité. Cette corde est disposée de telle sorte que, s'enroulant sur le gros cylindre, elle se déroule sur le petit et réciproquement, suivant que le fardeau monte ou descend.

La puissance agit ordinairement à l'extrémité de deux manivelles placées en dehors des supports; ces manivelles doivent être calées à 180°.

212. Conditions d'équilibre. — Lorsqu'un treuil différentiel est en équilibre, *la puissance est à la résistance comme la*

différence des rayons du tambour est au double du rayon de la manivelle.

Soient P (*fig.* 170), la puissance agissant à l'extrémité d'une manivelle de longueur l, R et r les rayons des deux cylindres et Q la résistance appliquée à la chape de la poulie mobile.

Les brins de la corde, pouvant être considérés comme étant sensiblement parallèles, ont chacun une tension égale à la moitié de la résistance (**199**) ou à $\frac{Q}{2}$. Nous aurons donc, pour l'équilibre, en appliquant le théorème des moments :

$$P \times l = \frac{Q}{2} \times R - \frac{Q}{2} \times r = \frac{Q}{2}(R - r)$$

d'où l'on tire : $\frac{P}{Q} = \frac{R - r}{2l}$

ce qui démontre la proposition énoncée.

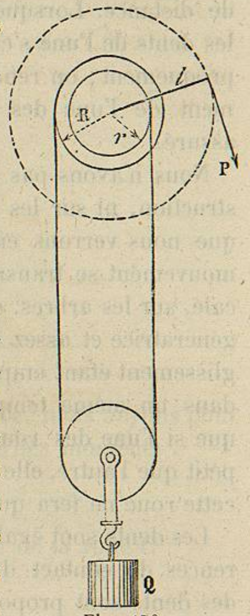

Fig. 170.

Ainsi, dans le treuil différentiel, la puissance varie en raison directe de la différence R — r; plus cette différence sera petite, et plus la puissance qui devra être appliquée aux extrémités des manivelles pour élever un même fardeau deviendra faible. On peut donc, sans difficulté, faire équilibre à une très grande résistance en employant une puissance très faible; c'est là le grand avantage de cet appareil, dont l'invention est attribuée aux Chinois.

On pourrait arriver au même résultat avec un treuil ordinaire, en prenant des manivelles très longues et des tambours de très petit diamètre; mais dans la réalisation matérielle, le bras de levier de la puissance ne peut pas être trop grand, car la manœuvre deviendrait difficile; en outre, le rayon du treuil ne peut pas dépasser une certaine limite inférieure, car il ne pourrait plus supporter l'effort à vaincre avec toute la sécurité désirable. On voit donc l'avantage du treuil différentiel sur le treuil ordinaire, car dans le premier de ces appareils on peut, sans aucune crainte, rendre la différence des rayons aussi petite qu'on le voudra.

213. Roues d'engrenage. — On désigne sous le nom d'*engrenages cylindriques* des cylindres portant, sur leur surface extérieure, des saillies également espacées, appelées *dents*, laissant entre elles des intervalles égaux à ces saillies et appelés *creux*.

Ces roues servent, dans les machines, à communiquer le mouvement d'un arbre à un autre arbre parallèle situé à peu de distance. Lorsque deux roues doivent engrener ensemble, les dents de l'une s'engagent dans les creux de l'autre et réciproquement; on rend impossible, par ce moyen, tout glissement de l'une des roues sur l'autre, et le mouvement est assuré.

Nous n'avons pas ici à entrer dans aucun détail sur la construction, ni sur les différentes sortes de roues d'engrenages que nous verrons en cinématique; disons seulement que le mouvement se transmet de la même manière que si on avait calé, sur les arbres, deux disques pleins, tangents suivant une génératrice et assez fortement pressés l'un contre l'autre. Le glissement étant empêché, les arcs décrits par les deux roues, dans un même temps, sont de même longueur; il en résulte que si l'une des roues a un rayon deux fois, trois fois plus petit que l'autre, elle fera deux tours, trois tours, pendant que cette roue ne fera qu'un tour.

Les dents sont égales et également espacées sur les circonférences de contact des deux roues, de sorte que les nombres des dents sont proportionnels à ces circonférences, ou, ce qui revient au même, proportionnels à leurs rayons.

On donne souvent le nom de *pignon* à la plus petite des deux roues qui engrènent ensemble.

214. Conditions d'équilibre. — Soient D et C (*fig.* 171) une roue et un pignon qui engrènent ensemble; tangentiellement à l'arbre A de la roue D est appliquée une résistance Q, devant être vaincue par une puissance P, agissant à l'extrémité d'une manivelle B calée sur l'arbre du pignon C.

Désignons par R' et R les rayons de la roue D et de la manivelle B; par r et r' les rayons de l'arbre A et du pignon C. Sous l'action de la force qui tend à faire tourner le pignon de droite à gauche, la dent du pignon exerce sur la dent de la roue, suivant la génératrice de contact, une pression t dirigée

suivant la tangente commune aux deux circonférences de contact, pression qui peut être considérée comme la puissance relativement à la roue et au poids Q. Mais la dent de la roue réagit à son tour sur celle du pignon avec une force t' égale et directement opposée à la pression t, et c'est cette réaction t' que doit vaincre la puissance.

L'équilibre général du système exige évidemment que la roue

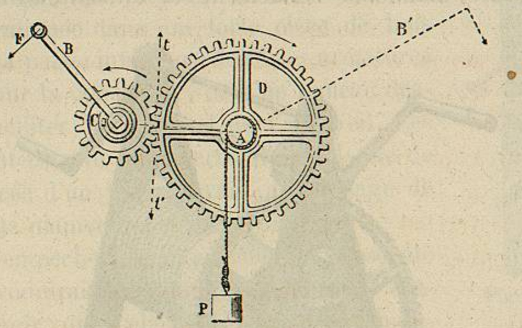

Fig. 171.

et le pignon soient séparément en équilibre; nous aurons pour l'équilibre du pignon, d'après le principe des moments :

$$P \times R = t' \times r'$$

Nous aurons de même, pour l'équilibre de la roue C :

$$t \times R' = Q \times r$$

Multipliant membre à membre, et supprimant les quantités égales t et t', il vient :

$$P \times R \times R' = Q \times r \times r'$$

d'où enfin : $$\frac{P}{Q} = \frac{r \times r'}{R \times R'}$$

Or, les circonférences étant entre elles comme les nombres de dents, nous pouvons remplacer le rapport des rayons par celui des nombres de dents; si N représente le nombre de dents de la roue et n celui du pignon, la relation précédente devient :

$$\frac{P}{Q} = \frac{r}{R} \times \frac{n}{N}$$