Cette formule est plus employée que la précédente, car il est toujours plus facile de compter le nombre de dents d'une roue que de prendre exactement son rayon.

215. Treuil à simple engrenage. — Le treuil à simple engrenage (*fig.* 172) est un appareil dont l'emploi est assez répandu pour l'élévation des fardeaux ; c'est la réalisation matérielle de ce qui vient d'être exposé. Deux supports en fonte évidés, maintenus solidement sur un bâti, au moyen de

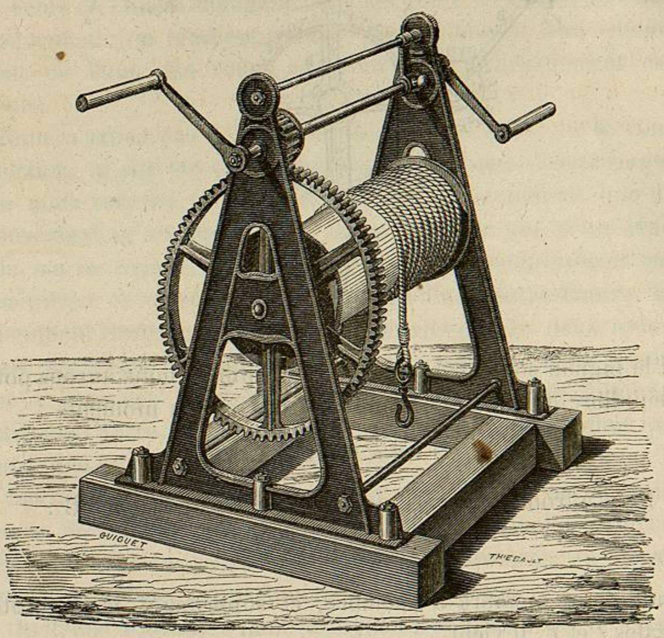

Fig. 172.

boulons, servent de coussinets aux arbres du pignon et de la roue. Le tambour, qui est d'une assez grande longueur et monté sur le même axe que la roue, reçoit l'extrémité d'une corde qui, après y avoir fait plusieurs tours, descend et supporte, par son autre extrémité munie d'un crochet de fer, le fardeau à soulever.

216. Cric. — Le *cric* est une machine dont l'emploi est très fréquent pour soulever des fardeaux très lourds à une faible hauteur. Il se compose (*fig.* 173) d'une crémaillère A qui en-

grène avec un pignon C ; sur l'arbre de celui-ci est calée une roue B recevant le mouvement d'un pignon D, sur l'arbre duquel est calée une manivelle E. La partie supérieure de la crémaillère est terminée par une pièce recourbée à ses deux extrémités, et que l'on dispose sous le corps à déplacer. La partie inférieure de cette crémaillère, ainsi que le mécanisme des roues dentées, sont disposés à l'intérieur d'une cavité pratiquée dans une forte pièce de bois munie à sa partie inférieure de fortes armatures en fer pour la consolider, et d'un anneau destiné à faciliter le transport de l'appareil. Les roues dentées sont recouvertes d'une plaque de tôle, percée d'un trou servant au passage de l'axe de la manivelle placée à l'extérieur.

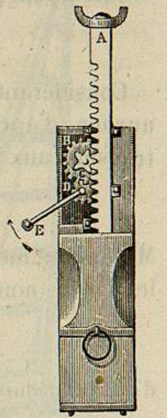

Fig. 173.

Afin d'empêcher le mouvement de descente qui se produirait lorsque la force motrice cesserait d'agir, on a placé sur l'axe de la manivelle, et en dehors de la plaque de tôle, une roue n appelée *rochet*, dont les dents, qui ont une forme particulière comme l'indique la figure 174, reçoivent l'extrémité d'une pièce m appelée *cliquet*. La forme affectée par l'extrémité du cliquet est analogue à celle des creux du rochet, et sa position m est déterminée de telle sorte qu'il permette à la crémaillère de s'élever lorsqu'on tourne dans le sens indiqué par la flèche, et qu'il s'oppose à la descente en empêchant les engrenages de tourner, à moins qu'on ne détruise son action en le soulevant avec le doigt pour lui faire prendre la position m'. Il résulte de là que le fardeau peut être maintenu à une hauteur quelconque, sans craindre que la crémaillère ne rentre à l'intérieur du cric.

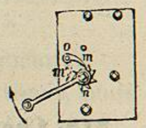

Fig. 174.

217. Conditions d'équilibre. — Soient Q la résistance appliquée au sommet de la crémaillère, et P la puissance qui agit tangentiellement à la circonférence de rayon R, décrite par l'extrémité de la manivelle. Désignons par r le rayon du pignon C, qui engrène avec la crémaillère, par R' le rayon de la roue montée sur le même axe que le pignon, et enfin, par r' le rayon du pignon calé sur l'arbre de la manivelle.

Tout le système étant en équilibre, il en est de même des parties qui le composent. Pour l'équilibre de la manivelle et du pignon r', nous aurons, d'après le principe des moments, en désignant par t la réaction des dents de la roue B :

$$P \times R = t \times r'$$

Considérant l'équilibre de la roue B et du pignon C, nous aurons, d'après le même principe, en désignant par t' l'effort transmis aux dents de la roue B :

$$t' \times R' = Q \times r$$

Multipliant membre à membre et supprimant les quantités égales t et t', nous aurons :

$$P \times R \times R' = Q \times r \times r'$$

d'où l'on déduit : $$\frac{P}{Q} = \frac{r \times r'}{R \times R'}$$

c'est-à-dire que *la puissance est à la résistance comme le produit des rayons des pignons est au produit des rayons de la manivelle et de la roue*.

Si N désigne le nombre de dents de la roue B, et n le nombre de dents du pignon r', nous aurons :

$$\frac{P}{Q} = \frac{r}{R} \times \frac{n}{N} \quad \text{d'où} \quad P = Q \times \frac{r}{R} \times \frac{n}{N}$$

218. Chèvre. — On appelle *chèvre* un appareil servant, dans les constructions, à l'élévation des matériaux et principalement des pièces de charpente ; il est formé par la combinaison d'une poulie et d'un treuil.

La chèvre se compose (*fig.* 175) de deux montants obliques, appelés *hanches*, réunis par des traverses, nommées *épars*, s'appuyant par leur partie inférieure soit sur le sol, soit sur un plancher disposé à une certaine hauteur. A environ $1^{m},30$ de la base d'appui, est placé un treuil manœuvré au moyen de leviers qui viennent s'emmancher dans les trous pratiqués dans chacune des extrémités du tambour. Une poulie P est disposée à la partie supérieure de l'appareil entre les deux montants.

Le fardeau est attaché à l'extrémité d'une corde qui, après avoir passé sur la gorge de la poulie P, descend et vient s'en-

rouler sur le tambour du treuil. On conçoit que, si l'on imprime au treuil un mouvement de rotation dans un certain sens, on produira l'élévation du fardeau placé à l'extrémité inférieure de la corde.

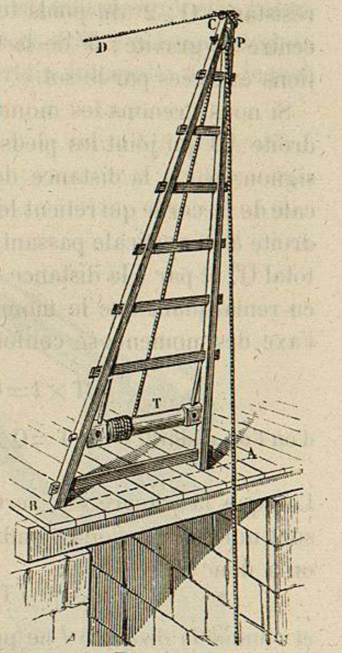

Fig. 175.

Afin de conserver à l'appareil la position indiquée par la figure, position qu'il doit avoir pour son fonctionnement, on le retient à l'aide d'un câble CD, appelé *hauban*, dont l'une des extrémités est fixée à la partie supérieure de la chèvre, et dont l'autre extrémité est solidement amarrée à un corps fixe.

219. Conditions d'équilibre. — Il faut remarquer que la poulie P n'influe en rien sur l'effort à développer pour vaincre la résistance, et la tension de la corde qui s'enroule sur le treuil est juste égale au poids du fardeau Q qui doit être élevé par la puissance P agissant à l'extrémité d'un levier de longueur l.

En désignant par R le rayon du tambour du treuil, nous aurons, pour la relation d'équilibre :

$$P \times l = Q \times R \quad \text{d'où} \quad P = \frac{Q \times R}{l}$$

Au lieu de placer une simple poulie P, on pourrait disposer un palan qui offrirait l'avantage, pour une même force, de vaincre une résistance beaucoup plus considérable. En effet, si n désigne le nombre de poulies du palan, $\frac{Q}{n}$ sera la tension de chaque garant, et la relation d'équilibre deviendra :

$$P = \frac{Q}{n} \times \frac{R}{l}$$

220. Tension du câble. — Proposons-nous de déterminer la tension du câble qui retient la chèvre dans une position inclinée. L'équilibre du système a lieu sous l'action : 1° de la résistance Q ; 2° du poids total Q' de l'appareil agissant à son centre de gravité ; 3° de la tension T du câble, et 4° des réactions exercées par le sol.

Si nous prenons les moments de ces forces par rapport à la droite AB qui joint les pieds des deux montants, et si nous désignons par q la distance de cette droite à la direction verticale de la corde qui retient le fardeau, par q' celle de cette même droite à la verticale passant par le centre de gravité du poids total Q', et par l la distance du câble à l'axe AB, nous aurons, en remarquant que le moment des réactions est nul, puisque l'axe des moments se confond avec AB :

$$T \times l = Q \times q + Q' \times q' \qquad (1)$$

d'où l'on déduit : $$T = Q \times \frac{q}{l} + Q' \times \frac{q'}{l}$$

Lorsque la chèvre est verticale, les moments de Q et de Q' sont nuls et le second membre de l'équation (1) se réduit à 0; on a donc :

$$T \times l = 0,$$

et comme la distance l ne peut être nulle, il s'ensuit que $T = 0$. Ce résultat montre que, dans ce cas, la tension du câble est complètement nulle, et cette tension est d'autant plus considérable que l'appareil est plus incliné.

221. Grues. — Les *grues* sont des machines très puissantes servant à l'élévation des fardeaux dont le poids est très considérable, et à les déplacer dans le sens horizontal. Elles servent, dans les ports et dans les gares de chemin de fer, pour opérer le chargement ou le déchargement des bateaux et des wagons.

La grue représentée par la figure 176 se compose d'un arbre vertical en fonte PQ, reposant, à sa partie inférieure, par un pivot Q, sur une crapaudine placée au fond d'un puits pratiqué dans le sol pour recevoir la portion RQ. A peu près au niveau du sol, cet arbre porte une partie cylindrique R d'un plus fort diamètre, autour de laquelle sont disposés de petits cylindres, appelés *galets*, afin d'atténuer, autant que possible, les frottements qui se développent dans le mouvement de ro-

tation. A la partie supérieure de l'arbre RP, est adaptée une pièce oblique bb', appelée *tirant*, et ces deux corps sont réunis entre eux par une pièce aa' également oblique, appelée *volée*. Le tirant bb' est formé de deux pièces reliées à leurs extrémités, mais laissant entre elles un certain intervalle dans lequel

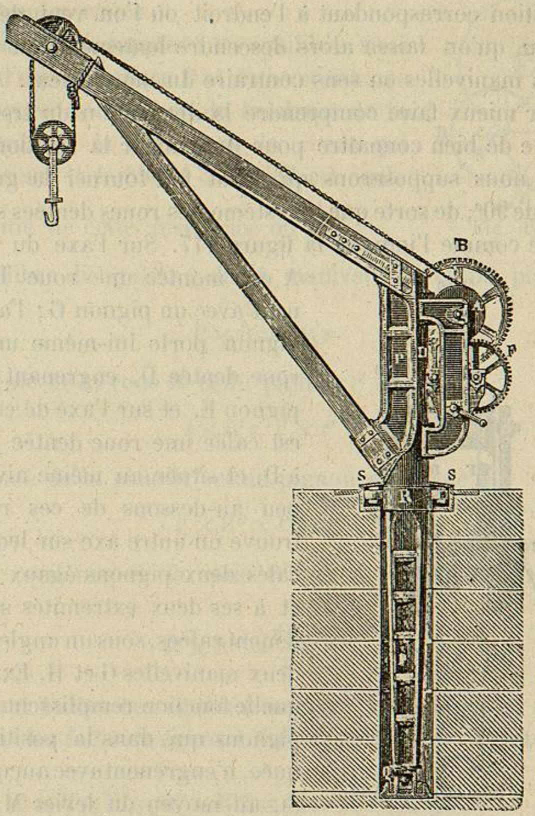

Fig. 176.

est placée une poulie fixe z dont la gorge reçoit une corde venant se fixer en un point c. Cette corde, qui supporte une poulie mobile z', au crochet de laquelle est attaché le corps à soulever, prend une direction parallèle au tirant et vient s'enrouler sur le tambour d'un treuil manœuvré au moyen de deux manivelles.

Lorsqu'on veut faire fonctionner cette grue, on fait d'abord descendre la poulie mobile afin d'y accrocher le fardeau à soulever, puis on fait tourner le treuil dans le sens convenable; la corde s'enroule sur le treuil, et, par suite, le fardeau s'élève. Celui-ci étant arrivé à une certaine hauteur, on fait tourner la grue autour de l'axe vertical PQ, jusqu'à ce qu'elle soit dans la position correspondant à l'endroit où l'on veut déposer le fardeau, qu'on laisse alors descendre lentement, en agissant sur les manivelles en sens contraire du mouvement.

Pour mieux faire comprendre la disposition du treuil, qu'il importe de bien connaître pour déterminer la relation d'équilibre, nous supposerons qu'on ait fait tourner la grue d'un angle de 90°, de sorte que le système des roues dentées se trouve projeté comme l'indique la figure 177. Sur l'axe du tambour A est montée une roue B engrenant avec un pignon C; l'axe de ce pignon porte lui-même une autre roue dentée D, engrenant avec un pignon E, et sur l'axe de ce pignon est calée une roue dentée F, égale à D, et située au même niveau. Un peu au-dessous de ces roues se trouve un autre axe sur lequel sont calés deux pignons égaux K et L, et à ses deux extrémités sont également calées, sous un angle de 180°, deux manivelles G et H. Examinons quelle fonction remplissent les deux pignons qui, dans la position indiquée, n'engrènent avec aucune roue. Si, au moyen du levier M, mobile autour de l'axe N, on amène le pignon K pour engrener avec la roue D, les manivelles feront mouvoir le treuil par l'intermédiaire des roues D, B et des pignons K et C; si nous poussons maintenant le levier M en sens contraire, le pignon L viendra engrener avec la roue F, et les manivelles feront mouvoir le treuil par l'intermédiaire des roues F, D, B et des pignons L, E, C. Au moyen de la première disposition des pignons K et L, le mouvement d'ascension du fardeau est plus rapide que dans le second cas, pour une même vitesse de la puissance agissant

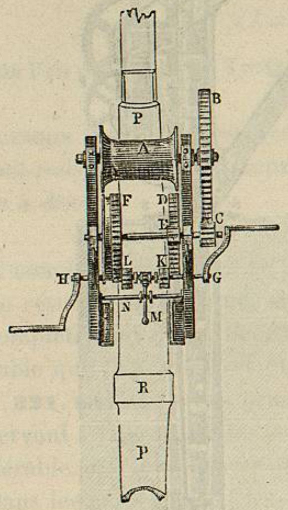

Fig. 177.

sur les manivelles; on l'emploie lorsque le poids du fardeau n'est pas très considérable.

222. Conditions d'équilibre. — Soient r, r', r'', r''' (*fig.* 178), les rayons des différents pignons et du tambour du treuil, et R, R′, R″, R‴ les rayons de la manivelle et des différentes roues.

La grue étant supposée en équilibre sous l'action d'une puissance P et d'une résistance Q appliquée au crochet de la chape de la poulie mobile, la tension de la corde qui s'enroule sur le tambour du treuil est égale à la moitié de cette résistance ou à $\frac{Q}{2}$.

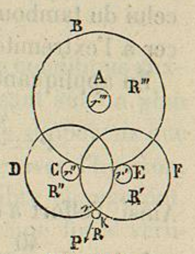

Fig. 178.

L'équilibre du système de la manivelle R et du pignon r donne :

$$P\times R = t\times r$$

Le système de la roue R′ et du pignon r' donne :

$$t\times R' = t'\times r'$$

Le système de la roue R″ et du pignon r'' donne :

$$t'\times R'' = t''\times r''$$

Enfin, le système de la roue R‴ et du tambour du treuil donne :

$$t''\times R''' = \frac{Q}{2}\times r'''$$

Multipliant toutes ces égalités membre à membre, et remarquant que les facteurs égaux t, t', t'' disparaissent, il reste :

$$P\times R\times R'\times R''\times R''' = r\times r\times' r''\times\frac{Q}{2}\times r'''$$

d'où l'on tire : $$P = \frac{Q}{2}\times\frac{r\times r'\times r''\times r'''}{R\times R'\times R''\times R'''}$$

Telle est la formule qui fait connaître la valeur de la puissance nécessaire pour vaincre la résistance Q. Les nombres des dents des pignons r, r', r'' étant n, n', n'' et les nombres des dents des roues R′, R″, R‴ étant N, N′, N″, l'équation précédente devient :

$$P = \frac{Q}{2}\times\frac{r'''}{R}\times\frac{n\times n'\times n''}{N\times N'\times N''}$$

Les données relatives aux inconnues étant les suivantes : $Q=51840$ kilogrames, les nombres N,N',N'' étant respectivement égaux à 54, 54 et 66 ; les nombres n,n',n'' étant respectivement égaux à 9, 9 et 11 ; le rayon de la manivelle $=0^m51$, et celui du tambour du treuil 0^m17, on demande l'effort à exercer à l'extrémité de chacune des manivelles.

En appliquant la formule précédente, nous aurons :

$$P=\frac{51840}{2}\times\frac{0,17\times9\times9\times11}{0,51\times66\times54\times54}=40 \text{ kilog.}$$

Ainsi, l'effort à exercer à l'extrémité de chacune des manivelles doit être de $\frac{40}{2}$ ou 20 kilogrammes. En comparant la puissance à la résistance, on obtient le rapport :

$$\frac{40}{51840}=\frac{1}{1296}$$

c'est-à-dire que la puissance est $\frac{1}{1296}$ de la résistance.

Nous avons supposé, jusqu'ici, que le pignon L engrenait avec la roue F ; supposons maintenant que ce soit le pignon K qui engrène avec la roue D, et, dans les mêmes hypothèses, déterminons la résistance qui peut être vaincue, en admettant que la puissance soit égale à 40 kilogrammes.

De la formule générale on tire, en supprimant la roue F et le pignon E, qui ne sont plus en jeu :

$$Q=2P\times\frac{R\times N'\times N''}{r'''\times n\times n''}$$

ou

$$Q=2\times40\times\frac{0,51\times54\times66}{0.17\times9\times11}=8640 \text{ kil.}$$

En comparant la puissance à la résistance, on obtient le rapport :

$$\frac{40}{8640}=\frac{1}{216}$$

Le rapport de la puissance à la résistance est $\frac{1}{1296}$ dans le premier cas et $\frac{1}{216}$ dans le second cas ; mais il faut remarquer

que, dans ce dernier cas, le fardeau s'élève 6 fois plus rapidement que dans le premier.

§ 3. — SYSTÈME PLAN.

223. Plan incliné. — Nous avons trouvé les conditions auxquelles doit satisfaire un corps pesant reposant sur un plan horizontal pour qu'il soit en équilibre. Si nous supposons que le plan d'appui vienne à faire un certain angle avec l'horizon, il est facile de voir que les conditions d'équilibre changeront. En effet, le poids du corps restant toujours une force verticale, celle-ci ne sera plus détruite par la réaction du plan, lors même que la verticale du centre de gravité tomberait encore à l'intérieur du polygone d'appui. Le poids du corps se décompose en deux composantes, l'une normale au plan incliné, et l'autre parallèle à sa longueur ; la première mesure la pression supportée par le plan d'appui, et la seconde tend à entraîner le corps. Pour que celui-ci reste en équilibre, il faudra donc lui appliquer une force d'intensité et de direction convenables ; nous allons chercher les relations qui lient cette force au poids du corps, et à l'inclinaison du plan.

224. Conditions d'équilibre. — Considérons, en premier lieu, le cas général où le corps se trouve soumis à l'action d'un nombre quelconque de forces dirigées dans tous les sens. Pour que l'équilibre existe, il faut que l'ensemble des réactions exercées par le plan sur les différents points de contact du corps et des forces extérieures, se réduise à deux forces égales et directement opposées. Or, toutes les réactions se composent en une seule résultante normale au plan et appliquée à l'intérieur de la base de sustentation. Par suite, *pour qu'un corps soumis à l'action d'un système quelconque de forces soit en équilibre sur un plan incliné, il faut et il suffit que toutes ces forces admettent une résultante unique, normale au plan, et rencontrant celui-ci à l'intérieur du polygone d'appui.*

Pour traiter le cas où le corps n'est soumis qu'à l'action de la pesanteur, nous allons d'abord exposer quelques considérations qui nous permettront de simplifier la figure.

1° La force P représentant le poids du corps et la force Q qu'il faut lui appliquer pour le maintenir en équilibre, devant