Les données relatives aux inconnues étant les suivantes : $Q=51840$ kilogrames, les nombres N, N', N'' étant respectivement égaux à 54, 54 et 66 ; les nombres n, n', n'' étant respectivement égaux à 9, 9 et 11 ; le rayon de la manivelle $=0^m51$, et celui du tambour du treuil 0^m17, on demande l'effort à exercer à l'extrémité de chacune des manivelles.

En appliquant la formule précédente, nous aurons :

$$P=\frac{51840}{2}\times\frac{0{,}17\times9\times9\times11}{0{,}51\times66\times54\times54}=40\,\text{kilog.}$$

Ainsi, l'effort à exercer à l'extrémité de chacune des manivelles doit être de $\frac{40}{2}$ ou 20 kilogrammes. En comparant la puissance à la résistance, on obtient le rapport :

$$\frac{40}{51840}=\frac{1}{1296}$$

c'est-à-dire que la puissance est $\frac{1}{1296}$ de la résistance.

Nous avons supposé, jusqu'ici, que le pignon L engrenait avec la roue F ; supposons maintenant que ce soit le pignon K qui engrène avec la roue D, et, dans les mêmes hypothèses, déterminons la résistance qui peut être vaincue, en admettant que la puissance soit égale à 40 kilogrammes.

De la formule générale on tire, en supprimant la roue F et le pignon E, qui ne sont plus en jeu :

$$Q=2P\times\frac{R\times N'\times N''}{r'''\times n\times n''}$$

ou

$$Q=2\times40\times\frac{0{,}51\times54\times66}{0{.}17\times9\times11}=8640\text{ kil.}$$

En comparant la puissance à la résistance, on obtient le rapport :

$$\frac{40}{8640}=\frac{1}{216}$$

Le rapport de la puissance à la résistance est $\frac{1}{1296}$ dans le premier cas et $\frac{1}{216}$ dans le second cas ; mais il faut remarquer

que, dans ce dernier cas, le fardeau s'élève 6 fois plus rapidement que dans le premier.

§ 3. — SYSTÈME PLAN.

223. Plan incliné. — Nous avons trouvé les conditions auxquelles doit satisfaire un corps pesant reposant sur un plan horizontal pour qu'il soit en équilibre. Si nous supposons que le plan d'appui vienne à faire un certain angle avec l'horizon, il est facile de voir que les conditions d'équilibre changeront. En effet, le poids du corps restant toujours une force verticale, celle-ci ne sera plus détruite par la réaction du plan, lors même que la verticale du centre de gravité tomberait encore à l'intérieur du polygone d'appui. Le poids du corps se décompose en deux composantes, l'une normale au plan incliné, et l'autre parallèle à sa longueur ; la première mesure la pression supportée par le plan d'appui, et la seconde tend à entraîner le corps. Pour que celui-ci reste en équilibre, il faudra donc lui appliquer une force d'intensité et de direction convenables ; nous allons chercher les relations qui lient cette force au poids du corps, et à l'inclinaison du plan.

224. Conditions d'équilibre. — Considérons, en premier lieu, le cas général où le corps se trouve soumis à l'action d'un nombre quelconque de forces dirigées dans tous les sens. Pour que l'équilibre existe, il faut que l'ensemble des réactions exercées par le plan sur les différents points de contact du corps et des forces extérieures, se réduise à deux forces égales et directement opposées. Or, toutes les réactions se composent en une seule résultante normale au plan et appliquée à l'intérieur de la base de sustentation. Par suite, *pour qu'un corps soumis à l'action d'un système quelconque de forces soit en équilibre sur un plan incliné, il faut et il suffit que toutes ces forces admettent une résultante unique, normale au plan, et rencontrant celui-ci à l'intérieur du polygone d'appui.*

Pour traiter le cas où le corps n'est soumis qu'à l'action de la pesanteur, nous allons d'abord exposer quelques considérations qui nous permettront de simplifier la figure.

1° La force P représentant le poids du corps et la force Q qu'il faut lui appliquer pour le maintenir en équilibre, devant avoir une résultante normale au plan incliné, se trouveront dans un même plan perpendiculaire au premier;

2° Le plan déterminé par les directions P et Q sera perpendiculaire au plan horizontal, puisqu'il contient la verticale du centre de gravité du corps;

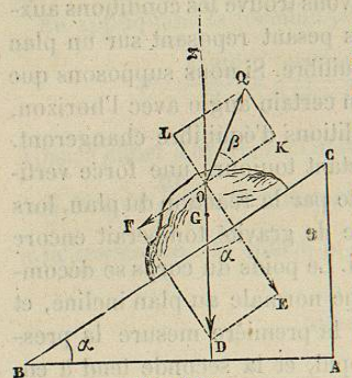

Fig. 179.

3° Le plan des forces P et Q étant perpendiculaire au plan incliné et au plan horizontal, est perpendiculaire à leur intersection.

Il résulte de ces trois considérations que la figure 179 peut désormais se réduire à une coupe verticale faite suivant le plan des forces P et Q. La ligne de plus grande pente BC se nomme la *longueur* du plan incliné; l'horizontale BA est sa *base*; la verticale AC sa *hauteur*, et le rapport $\frac{AC}{AB}$ ou la tangente trigonométrique de l'angle CBA indique la *pente* ou l'inclinaison du plan à l'horizon.

Cela posé, menons la droite FK parallèle à la longueur du plan incliné, et soient α et β les angles du plan avec l'horizon et de la force Q avec la ligne FK. Le poids P du corps peut être décomposé en deux composantes rectangulaires, l'une P cos α normale au plan incliné et l'autre P sin α dirigée suivant OF; la puissance Q peut de même être décomposée en deux forces, l'une Q sin β normale au plan incliné et l'autre Q cos β dirigée suivant OK. Pour qu'il y ait équilibre, il faut que la résultante des composantes de P et de Q, dirigées suivant FK, soit nulle; on a donc :

$$P \sin \alpha - Q \cos \beta = 0$$

d'où l'on tire : $$Q = \frac{P \sin \alpha}{\cos \beta}$$

Si la force Q est donnée en intensité, l'équation ci-dessus nous fera connaître sa direction; en effet, cette équation peut s'écrire :

$$\cos \beta = \frac{P \sin \alpha}{Q}$$

La valeur d'un cosinus ne pouvant jamais dépasser l'unité, il faut que Q soit au moins égal à P sin α, et, dans le cas où ces deux quantités seraient égales, on aurait :

$$\cos \beta = 1 \quad \text{et} \quad \beta = 0$$

c'est-à-dire que la force Q agirait parallèlement à la longueur du plan incliné.

Dans le cas où la force Q est plus grande que P sin α, la valeur

$$\cos \beta = \frac{P \sin \alpha}{Q}$$

convient à deux angles égaux, mais de signe contraire. Cela indique que, pour une même intensité de la force Q, il y a deux directions symétriques par rapport à la droite FK, l'une en dessus, l'autre en dessous, pour lesquelles l'équilibre existe.

Si la force Q tire au-dessus de la droite FK, sa direction ne peut pas dépasser la verticale du point O, car à cet instant l'angle β est le complément de l'angle α et l'on a :

$$\cos \beta = \sin \alpha$$

et par suite : $$Q = P$$

le corps ne fait que toucher le plan sans s'y appuyer.

Si dans cette même hypothèse on fait $Q > P$, le corps ne sera plus en équilibre, il sera soulevé par la puissance. La valeur $Q = P$ est donc le maximum que peut atteindre la puissance lorsqu'elle tire au-dessus de la ligne FK.

Si la puissance Q tire au-dessous de la ligne FK, sa valeur n'a plus de maximum; elle tend vers l'infini à mesure que l'angle β croît en s'approchant de 90°, c'est-à-dire que la direction Q se rapproche de la normale EL. A cette limite, elle ne pourra pas, quelle que soit son intensité, empêcher le corps de glisser.

Examinons, en particulier, les deux cas suivants qui peuvent s'énoncer géométriquement :

1° *La puissance Q agit parallèlement au plan incliné.* Alors $\beta = 0$ et, par suite,

$$Q = P \sin \alpha$$

Dans le triangle BAC on a : $$\sin \alpha = \frac{AC}{BC}$$

En remplaçant, il vient :

$$Q = P \times \frac{AC}{BC} \quad \text{d'où} \quad \frac{Q}{P} = \frac{AC}{BC}$$

c'est-à-dire que *la puissance est au poids du corps qu'elle tient en équilibre, comme la hauteur du plan incliné est à la longueur.*

2° *La puissance* Q *agit horizontalement.* Dans ce cas, l'angle β est égal à l'angle α, et, par suite, de l'équation d'équilibre :

$$P \sin\alpha - Q \cos\beta = 0$$

on peut tirer : $$Q = P \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \text{tang}\,\alpha$$

Mais, dans le triangle BAC, on a :

$$\text{tang}\,\alpha = \frac{AC}{AB}$$

En remplaçant, il vient :

$$Q = P \times \frac{AC}{AB} \quad \text{d'où} \quad \frac{Q}{P} = \frac{AC}{AB}$$

c'est-à-dire que *la puissance est au poids du corps qu'elle tient en équilibre, comme la hauteur du plan incliné est à sa base.*

225. Pression supportée par le plan incliné. — Proposons-nous de déterminer la pression supportée par le plan incliné. Dans le cas de la figure ci-contre, où la force Q agit au-dessus de la droite FK, cette pression est donnée par la différence des composantes de P et de Q, dirigées suivant LE; en la désignant par N, on aura :

$$N = P \cos\alpha - Q \sin\beta \qquad (1)$$

Si, au contraire, la puissance agit au-dessous de la ligne FK, cette pression est exprimée par :

$$N = P \cos\alpha + Q \sin\beta$$

Mais comme il est préférable de renfermer la solution complète de cette question dans une seule équation, on est convenu de regarder l'angle β comme négatif lorsqu'il est situé au-dessous de la droite FK. Avec cette convention, la valeur de la pression supportée par le plan incliné sera toujours donnée par l'équation (1).

226. Usages du plan incliné. — L'application la plus fréquente du plan incliné consiste, soit dans les grands travaux de terrassement pour l'élévation ou pour la descente des matériaux, soit pour amener le minerai au sommet des hauts fourneaux.

Le plan incliné est aussi employé dans un appareil appelé haquet, bien connu de tout le monde, qui sert pour le transport des corps pesants et surtout des tonneaux. Il se compose d'une charrette à longs brancards (*fig.* 180), dont les limons

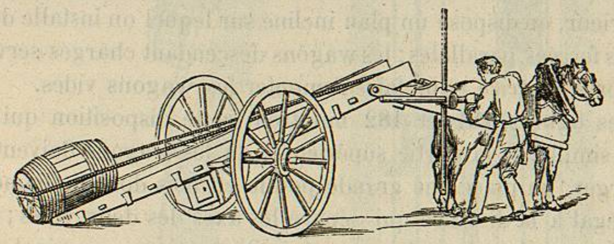

Fig. 180.

sont mobiles autour d'une cheville ouvrière placée à l'avant. Cette disposition permet d'opérer le chargement et le déchargement avec une grande facilité, car la partie postérieure du corps de la voiture venant s'appuyer sur le sol, et les limons restant à peu près dans leur position première, ce qui n'incommode pas le cheval, on dispose d'un plan incliné dont le rapport de la hauteur à la longueur est ordinairement de 1/4. Les limons sont munis, à une très petite distance de leur point d'articulation avec la charrette, d'un treuil sur lequel s'enroule une corde qui sert à faire monter le fardeau sur le haquet et à le maintenir pendant le trajet.

Il est facile de déterminer l'effort qui doit être développé à l'extrémité d'un levier avec lequel on agit sur le cylindre, ou treuil, pour enrouler la corde, afin de déplacer, sur la charrette, un corps d'un poids déterminé, 1600 kil. par exemple. Si ce corps se déplaçait sur un plan vertical, l'effort à exercer, pour opérer son élévation, serait de 1600 kil. ; mais, comme il se meut sur un plan incliné dont le rapport de la hauteur à la longueur est de 1/4, cet effort se réduit à $\frac{1600}{4}$ ou 400 kil. La longueur du levier étant supposée 8 fois plus grande que le rayon du treuil, l'effort nécessaire pour vaincre la résistance sera de $\frac{400}{8} = 50$ kilogrammes.

Cet exemple montre la grande utilité de cet appareil qui est un plan incliné portant un treuil à sa partie supérieure, et par l'intermédiaire duquel un homme seul peut facilement charger des fardeaux d'un poids assez considérable.

227. Plans inclinés automoteurs. — Lorsqu'on veut transporter des matériaux d'un endroit à un autre situé à un niveau inférieur, on dispose un plan incliné sur lequel on installe deux voies ferrées parallèles; les wagons descendant chargés servent de force motrice pour faire remonter les wagons vides.

Les figures 181 et 182 montrent cette disposition qui est très simple. A la partie supérieure, où les wagons doivent se charger, on place une grande poulie en bois dont le diamètre est égal à la distance qui sépare les axes des deux voies; une corde, attachée par chaque extrémité à un wagon, vient embrasser la gorge de cette poulie. Supposons les deux wagons vides, et décomposons leur poids en deux composantes, l'une normale, l'autre parallèle au plan incliné. Cette dernière tendra à faire descendre le wagon; mais les deux brins de la corde se trouveront soumis à une tension égale, et il y aura équilibre dans toutes les positions. Si l'un des wagons est chargé et l'autre vide, les deux composantes agissant aux extrémités de la corde ne seront plus égales et le wagon chargé, en descendant, fera monter le wagon vide.

Pour régler le mouvement qui s'accélérerait de plus en plus, on adapte, à la partie supérieure de la poulie, un tambour en bois que deux mâchoires également en bois, A, A, embrassent sur une partie de son contour. Ces mâchoires, fixées par un boulon à l'une de leurs extrémités, peuvent s'appliquer fortement contre le tambour en manœuvrant le levier CB, mobile autour du point C et agissant sur deux tringles articulées aux mâchoires.

La longueur de la corde est déterminée de manière que l'un des wagons étant en bas, l'autre se trouve en haut, sur la plate-forme où il est chargé.

Ces plans sont appelés *plans inclinés automoteurs* parce qu'il suffit de pousser un peu le wagon chargé pour que le mouvement

se continue de lui-même sous la seule action de la pesanteur.

A la naissance de la plate-forme, on a disposé un tablier D

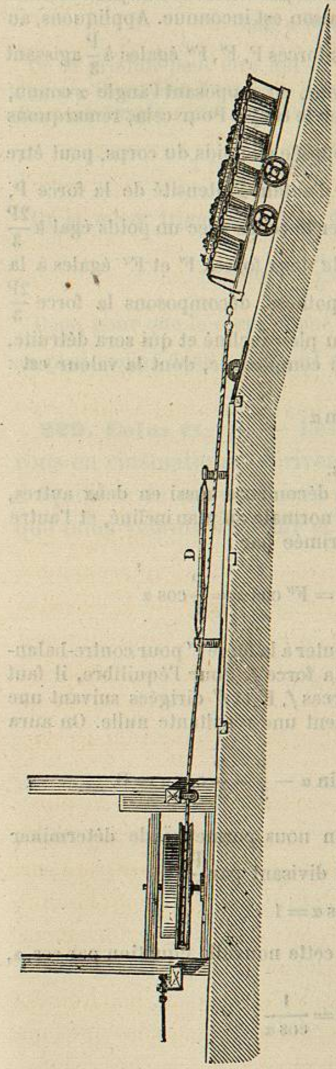

Fig. 181.

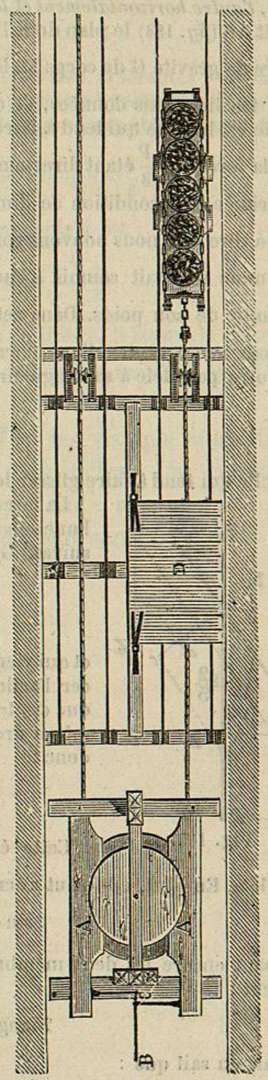

Fig. 182.

qui, en tournant sur l'un de ses côtés comme charnière, peut se rabattre, à volonté, sur l'une ou l'autre voie et sert ainsi à faciliter le chargement des wagons.

228. Application. — *Déterminer quelle est l'inclinaison à donner à un plan incliné pour qu'un corps de poids P y soit en équilibre sous l'action de trois forces égales chacune au 1/3 de son poids et agissant l'une verticalement, l'autre horizontalement et la troisième parallèlement au plan incliné.*

Soit AB (*fig.* 183) le plan dont l'inclinaison est inconnue. Appliquons, au centre de gravité G du corps M, les trois forces F, F', F'' égales à $\frac{P}{3}$ agissant dans les directions données, et cherchons, en supposant l'angle α connu, quelle est la force qui tend à faire glisser le corps. Pour cela, remarquons que la force $F=\frac{P}{3}$ étant directement opposée au poids du corps, peut être supprimée à la condition de diminuer d'autant l'intensité de la force P, c'est-à-dire que nous pouvons considérer le corps avec un poids égal à $\frac{2P}{3}$ et comme s'il était soumis à l'action de deux forces F' et F'' égales à la moitié de son poids. Dans cette hypothèse, décomposons la force $\frac{2P}{3}$ en deux composantes, l'une normale au plan incliné et qui sera détruite, et l'autre parallèle à sa longueur; cette composante, dont la valeur est :

$$f=\frac{2P}{3}\sin\alpha$$

est celle qui tend à faire glisser le corps.

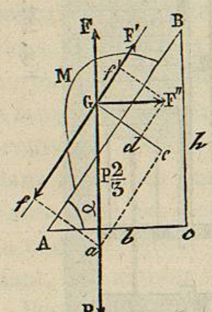

Fig. 183.

La force F'' se décompose aussi en deux autres, l'une suivant Gd normale au plan incliné, et l'autre suivant Gf' exprimée par :

$$f' = F''\cos\alpha = \frac{P}{3}\cos\alpha$$

et qui vient s'ajouter à la force F' pour contre-balancer l'action de la force f. Pour l'équilibre, il faut que ces trois forces f, F' et f' dirigées suivant une même droite, aient une résultante nulle. On aura donc :

$$\frac{2P}{3}\sin\alpha-\frac{P}{3}-\frac{P}{3}\cos\alpha=0$$

Cette équation nous permettra de déterminer l'angle α. En effet, elle peut s'écrire en divisant par $\frac{P}{3}$:

$$2\sin\alpha-\cos\alpha=1$$

Divisant encore les deux membres de cette nouvelle équation par cos α, il vient :

$$2\,\mathrm{tang}\,\alpha-1=\frac{1}{\cos\alpha}$$

Mais on sait que :

$$\frac{1}{\cos\alpha}=\sqrt{1+\mathrm{tang}^2\alpha}$$

En remplaçant et élevant au carré, on a :

$$4\,\mathrm{tang}^2\alpha-4\,\mathrm{tang}\,\alpha+1=1+\mathrm{tang}^2\alpha$$

En simplifiant il vient :

$$3\,\mathrm{tang}^2\alpha-4\,\mathrm{tang}\,\alpha=0$$

Et en mettant tang α en facteur commun il vient :

$$\mathrm{tang}\,\alpha\,(3\,\mathrm{tang}\,\alpha-4)=0$$

Or ce produit peut être nul de deux manières différentes : en faisant tang $\alpha=0$, ou bien 3 tang $\alpha-4=0$. La première hypothèse est inadmissible, car l'angle α serait égal à 0, ce qui ne peut pas être ; il reste donc :

$$2\,\mathrm{tang}\,\alpha-4=0 \quad \text{d'où} \quad \mathrm{tang}\,\alpha=\frac{4}{3}$$

Or la valeur trigonométrique de la tangente α est :

$$\mathrm{tang}\,\alpha=\frac{h}{b} \text{ et par suite } \frac{h}{b}=\frac{4}{3}$$

Donc, pour que le corps donné soit en équilibre, il faudra le placer sur un plan incliné dont le rapport de la hauteur à la base soit égal à $\frac{4}{3}$.

229. Coins et vis. — Les coins et les vis, que nous étudierons en cinématique, dérivent du plan incliné. Les conditions d'équilibre de ces machines sont, par suite, analogues à celles que nous venons d'établir et se déduisent sans difficulté.