

LIVRE II

CINÉMATIQUE

230. La *Cinématique* est la partie de la mécanique qui traite du mouvement des corps, indépendamment des forces qui le produisent. Elle comprend deux parties : 1° l'étude de toutes les considérations relatives aux divers mouvements et la composition de ces mouvements; 2° l'étude des appareils au moyen desquels on communique et l'on transforme les mouvements.

CHAPITRE PREMIER

MOUVEMENT UNIFORME — MOUVEMENT VARIÉ

§ 1. — CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES ET DÉFINITIONS.

231. Nous savons déjà (5) qu'un corps est en *mouvement* quand il occupe successivement diverses positions dans l'espace, et qu'il est au *repos* quand il reste constamment à la même place.

La notion de mouvement implique les idées primordiales d'*espace* et de *temps*, car le mouvement d'un point matériel ne peut être complètement défini qu'à la condition de connaître les déplacements successifs de ce point et le temps qu'il emploie pour opérer ces divers déplacements; de là résulte la nécessité de la connaissance de la mesure du temps.

232. Du temps et de sa mesure. — Le temps, comme

l'espace, ne peut être défini; mais la notion du temps nous est acquise par l'expérience, par l'observation des faits. Nous en avons une idée nette, précise, en observant la succession de certains phénomènes, leur durée et l'intervalle qui les sépare.

Le temps est donc, comme toutes les quantités, susceptible d'être mesuré, et pour cela il faut d'abord établir l'égalité de temps égaux. Supposons qu'un phénomène quelconque s'accomplisse pendant un certain temps; un autre phénomène qui se passerait de la même manière, en produisant des effets identiques et en étant soumis aux mêmes influences, s'accomplirait pendant un intervalle de temps égal au précédent, et les mêmes phénomènes se produiraient dans des temps égaux. Par conséquent, en prenant la durée de ce phénomène pour l'unité de temps, il suffira de compter le nombre de phénomènes qui se sont succédé sans interruption pour avoir la durée d'un temps quelconque.

233. Parmi tous les phénomènes que nous observons dans la nature, celui qui se produit d'une manière régulière et uniforme est le mouvement diurne apparent du soleil, et on appelle *jour solaire vrai* le temps qui s'écoule entre deux passages successifs du soleil au méridien d'un même lieu.

Mais le soleil ne passant pas toujours à ce méridien à des intervalles de temps égaux, on substitue au jour solaire vrai un *jour solaire moyen* qui est une moyenne entre un très grand nombre de jours solaires vrais.

234. L'unité de temps adoptée dans les usages ordinaires de la vie est le *jour solaire moyen* qui se divise en 24 heures, l'heure en 60 minutes et la minute en 60 secondes, de sorte qu'une heure équivaut à 3,600 secondes et le jour à 86,400 secondes.

L'unité de temps adoptée en mécanique est la *seconde sexagésimale de temps moyen*.

Les anciens se servaient, pour mesurer le temps, d'un instrument appelé *clepsydre* ou *sablier*, qui est encore employé pour apprécier des intervalles de courte durée. Les appareils qui, de nos jours, servent à la mesure du temps, sont: le pendule, les chronomètres, les montres et les horloges.

235. Diverses sortes de mouvement. — Un mouvement quelconque peut être considéré à deux points de vue dif-

férents: 1° *par rapport à l'espace* et 2° *par rapport au temps*.

Le mouvement, considéré par rapport à l'espace, peut être *rectiligne* ou *curviligne*; il est *rectiligne* lorsque tous les points du corps se meuvent suivant des lignes droites, et il est *curviligne* lorsque tous ces points décrivent des lignes courbes. Parmi tous les mouvements curvilignes, le plus simple est celui dans lequel tous les points du corps décrivent des cercles ou des arcs de cercle; le mouvement prend alors le nom de *circulaire* ou de *rotation*.

Les mouvements rectilignes et curvilignes peuvent être *continus* ou *alternatifs*; il sont *continus* lorsque le corps se meut constamment dans le même sens, et ils sont *alternatifs* lorsque le corps se meut tantôt dans un sens et tantôt dans l'autre.

236. Le mouvement, considéré par rapport au temps, peut être *uniforme* ou *varié*; il est *uniforme* lorsque le corps parcourt des espaces égaux dans des temps égaux, ou, en d'autres termes, lorsque les espaces parcourus sont proportionnels aux temps employés à les parcourir. Le mouvement est *varié* lorsque les espaces parcourus ne sont plus proportionnels aux temps employés à les parcourir; si ces espaces vont toujours en croissant pour des temps égaux, le mouvement est dit *accélééré*, et il est dit *retardé* dans le cas contraire. Les espaces parcourus augmentant ou diminuant de quantités égales dans des temps égaux, le mouvement est *uniformément varié*.

On appelle *mouvement périodique* un mouvement dans lequel les mêmes phases se reproduisent après certains intervalles de temps, et on appelle *période* la durée de ces intervalles. Si les périodes sont égales, le mouvement est dit *uniformément périodique*.

237. Trajectoire. — On désigne sous le nom de *trajectoire* la ligne droite ou courbe, essentiellement continue, qui unit toutes les positions successives d'un point matériel en mouvement, depuis sa position initiale jusqu'à sa position finale.

238. Mobile. — En Cinématique, on donne souvent le nom de *mobile* à un corps animé d'un mouvement quelconque.

239. Représentation graphique du mouvement d'un mobile. Loi de mouvement. — Le mouvement d'un mobile est complètement défini si l'on connaît sa trajectoire et la loi suivant

laquelle ce mobile se déplace sur cette ligne, c'est-à-dire la position qu'il y occupe à chaque instant, Ainsi, soit AB (fig. 184) la trajectoire parcourue par un mobile M, et O un point quelconque pris sur cette trajectoire. Pour

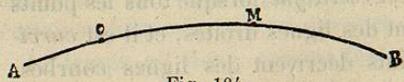


Fig. 184.

connaître le mouvement que possède le mobile pendant qu'il parcourt l'espace OM, il faut noter, pour chacune des positions intermédiaires, le temps correspondant. On a ainsi la relation qui lie les espaces aux temps, et, d'après cette relation, on en conclut la nature du mouvement.

Le point O, position du mobile prise arbitrairement sur sa trajectoire, et à partir duquel on mesure l'espace parcouru, s'appelle *origine des espaces*.

L'instant initial à partir duquel on commence à compter le temps s'appelle *origine des temps*.

Ordinairement, l'instant initial se confond avec l'origine des espaces, c'est-à-dire que l'on commence à compter le temps lorsque le mobile passe à l'origine des espaces.

La relation qui lie les espaces aux temps peut être représentée graphiquement, car on conçoit que ces deux quantités peuvent être représentées par des lignes; donc, la représentation graphique d'un mouvement devient très facile si l'on connaît, pour des valeurs de l'espace parcouru, les valeurs correspondantes des temps employés à les parcourir. Dès lors, l'étude des divers mouvements pourra se faire d'une manière très simple, au moyen de considérations géométriques.

240. Soit à déterminer la loi du mouvement d'un mobile sur une trajectoire connue, étant données les valeurs du temps comptées à partir de l'instant initial et les valeurs correspondantes de l'espace parcouru comptées à partir de l'origine des espaces. Adoptons des longueurs déterminées pour représenter l'unité de temps ou une seconde, et l'unité de l'espace parcouru. Traçons

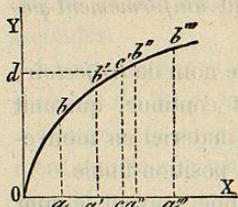


Fig. 185.

deux axes rectangulaires OX et OY (fig. 185) se coupant au point O; à partir de ce point, portons une longueur Oa représentant la seconde, et élevons en ce point une perpen-

diculaire ab sur laquelle nous portons, à l'échelle convenable, une longueur ab représentant le chemin parcouru pendant la première seconde. Les unités de temps étant égales, portons, à partir du point a , des longueurs aa' , $a'a''$..., égales entre elles et à Oa , et, en chacun de ces points élevons des perpendiculaires sur lesquelles nous prendrons, à l'échelle adoptée, les espaces parcourus correspondant aux temps. On obtient ainsi les points b' , b'' ..., qui, étant joints par un trait continu, fourniront la courbe représentative du mouvement appelée *loi de mouvement*.

241. Au moyen de cette courbe, il est facile de déterminer l'espace parcouru au bout d'un certain temps, ou, réciproquement, quel est le temps employé par le mobile pour parcourir un espace donné. En effet, soit à déterminer l'espace parcouru au bout de $2'' \frac{2}{3}$; divisons la distance $a'a''$ en trois parties égales, et, au point c , élevons une perpendiculaire rencontrant la courbe du mouvement en c' ; la longueur cc' , mesurée à l'échelle des espaces, fournira la valeur cherchée.

Réciproquement, si l'espace parcouru est connu, portons sur l'axe OY, à partir du point O, une longueur Od représentant l'espace donné à l'échelle adoptée; par le point d menons une parallèle dc' à l'axe OX, rencontrant la courbe du mouvement en c' , et de ce point abaissons une perpendiculaire sur cet axe; la longueur Oc , appréciée à l'échelle des temps, fournira la valeur cherchée.

Dans la recherche des lois de mouvement, il faut, autant que possible et pour éviter les difficultés, adopter une même échelle pour les espaces et pour les temps.

242. Abscisses. Ordonnées. Coordonnées. — Les longueurs Oa , aa' ..., portées sur l'axe OX, sont appelées *abscisses*, et cette ligne porte le nom d'*axe des abscisses*; les perpendiculaires ab , $a'b'$..., sont appelées *ordonnées*, et la ligne OY porte le nom d'*axe des ordonnées*. L'ensemble des abscisses et des ordonnées se désigne sous l'expression générale de *coordonnées*, et le point O s'appelle *origine*.

243. Différence entre la loi de mouvement et la trajectoire. — Il ne faut jamais confondre la loi de mouvement d'un mobile avec sa trajectoire; la loi de mouvement est la relation des espaces aux temps, et la trajectoire est la ligne, droite ou

courbe, suivie par le mobile et sur laquelle on mesure les espaces parcourus.

§ 2. — MOUVEMENT UNIFORME.

244. Définition. — Le mouvement est uniforme lorsque le mobile parcourt des espaces égaux dans des temps égaux, quelque petits qu'ils soient. — Ainsi, supposons qu'un mobile ait parcouru 2 mètres en une seconde; si, en mesurant l'espace parcouru au bout de 2, 3, 4... secondes, on reconnaît que le chemin décrit est de 4, 6, 8... mètres, c'est-à-dire double, triple, quadruple... du premier, le mobile est dit animé d'un mouvement uniforme. De là, la définition donnée que le mouvement est uniforme quand les espaces parcourus sont proportionnels aux temps employés à les parcourir.

En désignant par $e, e', e'' \dots$, les espaces parcourus et par $t, t', t'' \dots$, les temps correspondants, on aura la suite de rapports égaux :

$$\frac{e}{t} = \frac{e'}{t'} = \frac{e''}{t''} = \dots$$

245. Vitesse. — Le rapport constant de l'espace parcouru au temps employé à le parcourir s'appelle *vitesse*, et, en la désignant par v , on aura :

$$v = \frac{e}{t}. \quad (1)$$

La vitesse à un instant quelconque est donc égale à l'espace parcouru divisé par le temps employé à le parcourir.

Si dans l'équation (1) nous faisons $t = 1$, il vient :

$$v = e,$$

c'est-à-dire que, dans le mouvement uniforme, la vitesse est égale à l'espace parcouru pendant l'unité de temps.

De l'équation (1) on tire :

$$e = v \times t. \quad (2)$$

L'espace parcouru est égal à la vitesse multipliée par le temps.

Nous avons supposé que le mobile passait à l'origine des espaces à l'instant initial; lorsque cela n'a pas lieu, le mobile

se trouve à une distance de l'origine des espaces que nous désignerons par e_0 . Alors e désignant le chemin total parcouru par le mobile au bout du temps t , on aura, pour l'équation générale du mouvement uniforme :

$$e = e_0 + vt, \quad (3)$$

qui renferme implicitement tous les cas qui peuvent se présenter. Si dans cette équation nous faisons $e_0 = 0$, il vient :

$$e = vt$$

qui est l'équation (1) trouvée précédemment.

246. Loi du mouvement uniforme. — Supposons que l'origine des espaces coïncide avec l'instant initial et soit OX (fig. 186) l'axe des abscisses. A partir de l'origine A , portons sur cet axe des longueurs OA, AB, BC , représentant des intervalles de temps égaux, et en chacun des points A, B, C , élevons des ordonnées sur lesquelles nous prendrons, à la même échelle, les espaces parcourus pendant les temps correspondants. En joignant toutes les extrémités des ordonnées, nous obtiendrons la loi du mouvement uniforme; cette loi est une ligne droite. En effet, nous savons que les espaces parcourus sont proportionnels aux temps employés à les parcourir; nous aurons donc la suite de rapports égaux :

$$\frac{OA}{AA'} = \frac{OB}{BB'} = \frac{OC}{CC'} = \dots$$

Les triangles OAA', OBB', OCC' , sont semblables comme ayant un angle égal compris entre deux côtés homologues proportionnels; par suite : angle $AOA' = BOB' = \dots$ et comme ces angles ont les côtés OA, OB, OC , communs, les autres côtés OA', OB', OC' doivent se trouver en ligne droite.

247. Si, à l'instant initial, le mobile était déjà éloigné de l'origine des temps d'une quantité quelconque e_0 , cette quantité serait portée de O en O' (fig. 187) et la droite OC' qui, dans le cas précédent, avait pour origine le point O , passera actuellement par le point O' .

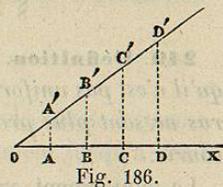


Fig. 186.

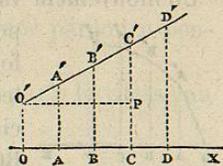


Fig. 187.

La direction de la droite $O'D'$ nous montre que le mobile s'éloigne constamment de l'origine des espaces, c'est-à-dire que la vitesse est positive; si cette vitesse était négative, le mobile se rapprocherait indéfiniment de l'origine des espaces et la droite $O'D'$ occuperait une position symétrique de la précédente par rapport à $O'P$.

248. Loi des vitesses. — Dans le mouvement que nous considérons, nous savons que la vitesse est constante et égale à l'espace parcouru au bout de l'unité de temps. Par suite, si dans la figure 186 nous menions une ligne parallèle à l'axe des abscisses, passant par le point A' , cette ligne représenterait la loi des vitesses.

§ 3. — MOUVEMENT VARIÉ.

249. Définition. — On dit qu'un mouvement est varié lorsqu'il n'est pas uniforme, c'est-à-dire, lorsque les espaces parcourus ne sont plus proportionnels aux temps employés à les parcourir.

Le mouvement varié, comme nous l'avons déjà dit, peut être varié d'une manière quelconque, uniformément varié, ou périodique.

250. Loi d'un mouvement varié quelconque. — La méthode que nous avons suivie pour la représentation graphique de la loi du mouvement uniforme s'applique également au mouvement varié, et, dans ce cas, la relation qui lie les espaces aux temps n'est plus une ligne droite, mais une courbe dont la convexité peut être tournée vers l'axe des abscisses, ou en sens contraire, ou alternativement dans les deux sens.

Un mouvement varié peut être considéré comme étant composé d'une succession de mouvements uniformes infiniment petits de vitesses différentes. En effet, portons sur l'axe OX des abscisses (fig. 188) des divisions égales OA, AB, BC, \dots représentant des secondes; élevons des ordonnées en chacun des points de divisions et portons, sur chacune d'elles, des longueurs représentant les espaces parcourus au bout d'une 1", de 2", de 3"... En joignant les points ainsi obtenus par des lignes droites, on obtient

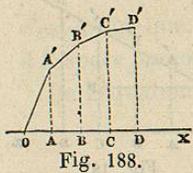


Fig. 188.

la ligne brisée $OA'B'C'D'$ dont chacun des éléments représente la loi d'un mouvement uniforme pendant 1". Si nous faisons décroître indéfiniment la durée de ces petits mouvements uniformes, la ligne brisée se rapprochera de plus en plus d'une courbe continue qui, à la limite, représentera la loi du mouvement varié.

251. Vitesse moyenne. Vitesse à un instant donné. — Considérons un mobile animé d'un mouvement varié et parcourant une trajectoire rectiligne. Appelons O le point pris sur cette trajectoire pour origine des espaces et des temps, A' la position de ce mobile au bout d'un certain temps t , et B' sa position au bout d'un temps plus grand t' . L'espace parcouru pendant le temps $t' - t$ sera exprimé par $A'B'$; si cet espace était parcouru d'un mouvement uniforme, la vitesse v serait donnée par la relation :

$$v = \frac{OB' - OA'}{t' - t} = \frac{A'B'}{t' - t}.$$

Dans le mouvement varié, ce rapport est appelé *vitesse moyenne*. Lorsque la différence $t' - t$ décroît indéfiniment jusqu'à zéro,

le rapport $\frac{A'B'}{t' - t}$ tend vers une limite déterminée qu'on nomme *vitesse au bout du temps t*. Cette limite peut se déterminer graphiquement. En effet, soient OC' la loi du mouvement varié considéré (fig. 189), OA et OB les longueurs comptées sur l'axe des temps pour représenter les durées t et t' ; en élevant aux points A et B les ordonnées AA' et BB' , on obtiendra les espaces parcourus AA' et BB' correspondant aux temps t et t' , et en menant par A une parallèle $A'P$ à l'axe OX , la partie $B'P$ de l'ordonnée BB' sera l'espace parcouru pendant la différence $t' - t$.

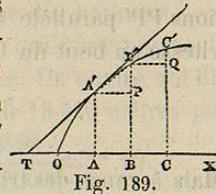


Fig. 189.

En désignant par v_1 la vitesse moyenne et par v la vitesse au bout du temps t , on aura :

$$v_1 = \frac{B'P}{A'P} \text{ et } v = \limite \frac{B'P}{A'P}.$$

Mais dans le triangle $A'B'P$ on a :

$$\text{tang } B'A'P = \frac{B'P}{A'P} \text{ et par suite } v = \limite \text{ tang } B'A'P.$$

Or, à mesure que la différence $t' - t$ diminue, les points A' et B' se rapprochent de plus en plus; à la limite, lorsque ces deux points coïncideront, le côté $A'B'$ du triangle $A'B'P$ se confondra avec la tangente à la courbe au point A' ; on aura donc :

$$\text{limite tang } B'A'P = \text{tang } A'TA.$$

En appelant α l'angle de la tangente $A'T$ avec l'axe des temps, il vient :

$$v = \text{tang } \alpha.$$

La vitesse à un instant quelconque d'un mouvement varié est donc égale à la tangente trigonométrique de l'angle que fait la tangente à la loi du mouvement au point considéré, avec l'axe des temps.

Dès lors, une simple construction graphique permet de trouver cette vitesse au bout d'un temps quelconque t ; pour cela, portons sur l'axe OX des temps (*fig. 190*) une longueur $OA = t$ et élevons l'ordonnée du point A qui rencontre la courbe en A' . Par ce point A' menons la tangente $A'T$ à la courbe et la parallèle $A'B$ à l'axe OX ; portons sur cette parallèle une longueur $A'P$ égale à l'unité de temps, et par le point P menons PP' parallèle à AA' . Cette longueur PP' représente la vitesse au bout du temps t . En effet, on a :

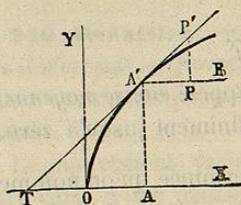


Fig. 190.

$$v = \text{tang } A'TA = \frac{AA'}{AT}.$$

Mais à cause des triangles semblables on a :

$$\frac{AA'}{AT} = \frac{PP'}{A'P} \text{ et comme } A'P = 1, \text{ il vient } v = PP'.$$

REMARQUE. — Si, à l'instant considéré, c'est-à-dire au bout du temps t , le mouvement devenait uniforme, le mobile continuerait à se mouvoir avec la vitesse qu'il possède à cet instant et qui est représentée par PP' . On peut donc dire que *la vitesse du mouvement varié à un instant quelconque est la vitesse du mouvement uniforme qui succéderait au mouvement varié à cet instant.*

252. Loi des vitesses. — Connaissant le procédé à employer pour trouver la vitesse à un instant quelconque dans un mouvement varié, lorsqu'on connaît la loi des espaces, il est facile de construire la loi des vitesses en déterminant, sur la courbe des espaces, les vitesses au bout de $1''$, $2''$, $3''$ Sur l'axe des abscisses on porte des longueurs respectivement égales à $1''$, $2''$, $3''$ et en chacun des points de division on élève des ordonnées sur lesquelles on prend des hauteurs correspondant aux vitesses de tous ces points. En joignant les extrémités de toutes les ordonnées par un trait continu, on obtiendra une courbe représentative de la vitesse dans le mouvement varié considéré.

253. Choix de l'unité de vitesse. — L'unité de longueur généralement adoptée pour exprimer la vitesse est le mètre, et on la compte par seconde. Mais le mouvement uniforme se présente rarement; un train de chemin de fer, une voiture, un homme en marche, parcourent leur trajet d'un mouvement varié; dans ce cas, on a recours à la vitesse moyenne que l'on exprime en kilomètres par heure. Ainsi, on dit qu'un train de chemin de fer à grande vitesse parcourt 80 kilomètres à l'heure, qu'une voiture fait 18 kilomètres à l'heure, qu'un homme en marche fait 6 kilomètres à l'heure; mais il est toujours facile, avec ces données, d'évaluer la vitesse en mètres.

Dans la marine, pour mesurer la vitesse des bâtiments, on se sert d'une unité spéciale, appelée *nœud*, qui correspond à la longueur du mille marin ou à 1852 mètres. Un navire qui file 10 nœuds à l'heure parcourt une distance de 18 520 mètres par heure, et sa vitesse par seconde est de $\frac{18520}{60 \times 60} = 5^m,40$.

254. Mouvement uniformément varié. — Dans le mouvement uniformément varié, le plus simple et le plus remarquable de tous les mouvements variés, la vitesse croît ou décroît de quantités égales dans des temps égaux. La vitesse augmentant proportionnellement au temps, le mouvement est dit *uniformément accéléré*, et si cette vitesse diminue proportionnellement au temps, le mouvement est dit *uniformément retardé*. Dans le chapitre suivant nous étudierons spécialement chacun de ces deux mouvements.