CHAPITRE II

MOUVEMENT UNIFORMÉMENT VARIÉ

§ 1. — MOUVEMENT UNIFORMÉMENT ACCÉLÉRÉ.

255. Définition. — *Le mouvement est uniformément accéléré lorsque la vitesse croît proportionnellement au temps.*

256. Vitesse. Accélération. — Considérons un mobile animé d'un mouvement uniformément accéléré et cherchons sa vitesse au bout d'un temps t, ce mobile ayant une vitesse initiale nulle, c'est-à-dire partant du repos. L'accroissement de vitesse pendant l'unité de temps ou $1''$ étant représenté par j, la vitesse v du mobile au bout du temps t sera exprimée par :

$$v = j \times t.$$

La constante j, qui est l'accroissement de vitesse pendant l'unité de temps, est appelée *accélération*.

En remarquant que l'accélération est la vitesse acquise pendant la première seconde, on peut dire que *la vitesse acquise par un mobile animé d'un mouvement uniformément accéléré sans vitesse initiale, au bout d'un temps* t, *est égale au produit de ce temps, exprimé en secondes, par l'accélération.*

Si, à l'origine des temps, le mobile possédait une vitesse initiale v_0, la vitesse du mobile au bout du temps t serait exprimée par :

$$v = v_0 + jt. \qquad (1)$$

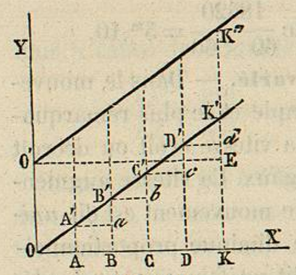

Fig. 191.

257. Représentation graphique de la relation des vitesses aux temps. — La relation entre les vitesses et les temps, ou loi des vitesses, peut se représenter graphiquement. En effet, traçons les axes des coordonnées OX et OY (*fig.* 191) ; à partir du point O portons sur

l'axe OX des abscisses, des longueurs OA, AB, BC,... représentant les secondes écoulées depuis l'origine du mouvement, et en chacun des points de division élevons des ordonnées respectivement égales aux vitesses correspondantes. En joignant toutes les extrémités des ordonnées par un trait continu, on obtiendra une ligne OK' représentative de la relation des vitesses au temps.

D'après la définition même du mouvement, les triangles OAA', OBB', OCC'..., sont semblables, et l'on a :

$$\frac{AA'}{OA} = \frac{BB'}{OB} = \frac{CC'}{OC} = \cdots$$

Ces égalités montrent que les points A', B', C'... se trouvent situés sur une même ligne droite. Donc, *lorsqu'un mobile est animé d'un mouvement uniformément accéléré sans vitesse initiale, la relation des vitesses aux temps est une ligne droite passant par l'origine* O. Si le mobile possédait, à l'instant initial, une vitesse v_0, il faudrait porter cette vitesse, à l'échelle adoptée, sur l'axe OY, de O en O', et la relation des vitesses aux temps passerait par le point O' et serait représentée par la droite O'K''.

258. Détermination de l'espace parcouru. — Soit à déterminer l'espace parcouru par un mobile animé d'un mouvement uniformément accéléré au bout d'un temps t, connaissant la relation des vitesses au temps. Divisons la durée totale t du mouvement, représentée par OK (*fig.* 191), en intervalles très petits et considérons l'un d'eux, BC, par exemple. Supposons que, pendant ce temps très petit, le mobile se meuve d'un mouvement uniforme, avec une vitesse égale à celle qu'il possède à la fin de l'intervalle précédent, représentée par BB'. La valeur de l'espace parcouru dans le mouvement uniforme étant égale au produit de la vitesse par le temps, l'espace parcouru pendant l'intervalle de temps très petit BC sera exprimé par l'aire du rectangle BB'bC ou BB'$\times$BC.

En considérant un autre intervalle de temps CD, l'espace parcouru pendant cette durée sera représenté par l'aire du rectangle CC'cD ou CC'$\times$CD, et ainsi de suite pour les autres éléments de temps considérés. Or, l'erreur commise en remplaçant l'espace réel parcouru par le mobile animé d'un mouvement uniformément accéléré, par la somme des espaces parcourus à l'aide des différents mouvements uniformes que nous avons considérés, sera d'autant plus petite que le temps OK sera divisé en un plus grand nombre de parties. Mais à mesure que les éléments AB, BC, CD..., diminueront, les aires des rectangles AA'aB, BB'bC..., se rapprocheront de plus en plus de celles des trapèzes AA'B'B, BB'C'C... Donc, à la limite, l'espace réel parcouru sera égal à la somme des aires de tous ces trapèzes élémentaires, c'est-à-dire à l'aire du triangle OKK' qui a pour mesure :

$$OK \times \frac{1}{2} KK' ;$$

$$\text{mais } OK = t \quad KK' = v = jt.$$

On aura donc, en désignant par e l'espace total parcouru,

$$e = t \times \frac{1}{2} jt = \frac{1}{2} tj^2. \qquad (2)$$

L'espace parcouru par un mobile qui se meut d'un mouvement uniformément accéléré, sans vitesse initiale, est donc égal à la moitié de l'accélération multipliée par le carré du temps.

En remarquant que si $t = 1''$, la formule (2) devient :

$$e = \frac{1}{2} j,$$

on peut dire que *l'espace réel parcouru pendant la 1re seconde est égal à la moitié de l'accélération.*

De là, on en conclut que *l'espace total parcouru est égal au produit de l'espace parcouru pendant la 1re seconde par le carré du temps.*

Si le mobile possédait à l'instant initial une vitesse v_0, l'espace parcouru au bout du temps t se composerait de l'aire du rectangle OO'EK, augmentée de l'aire du triangle EO'K''; les aires de ces deux surfaces étant respectivement égales à :

$$OO' \times OK \text{ ou } v_0 t \text{ et } \frac{1}{2} EK'' \times OK \text{ ou } \frac{1}{2} jt^2,$$

l'expression de l'espace parcouru e serait :

$$e = v_0 t + \frac{1}{2} jt^2, \qquad (3)$$

ce qui s'exprime en disant que *l'espace total parcouru pendant un temps t est égal à l'espace que parcourrait ce mobile pendant le même temps s'il était animé d'un mouvement uniforme de vitesse v_0 augmenté de l'espace qu'il parcourt d'un mouvement uniformément accéléré sans vitesse initiale.*

259. Loi des espaces. — Étant donnés les espaces $e, e', e''...$, parcourus par un mobile, après des intervalles de temps égrux $t, t', t''...$, il est facile de trouver la loi de son mouvement ou la relation qui lie les espaces aux temps. Pour cela, traçons les deux axes OX et OY des coordonnées (*fig.* 192), et portons sur l'axe des abscisses des longueurs OA, AB, BC..., représentant, à une certaine échelle, les temps $t, t', t''...$; en chacun des points de division élevons des perpendiculaires sur lesquelles nous prendrons des longueurs respectivement proportionnelles aux espaces correspondants. En joignant toutes les extrémités des ordonnées par un trait continu, nous obtiendrons la courbe OD' qui est la loi du mouvement.

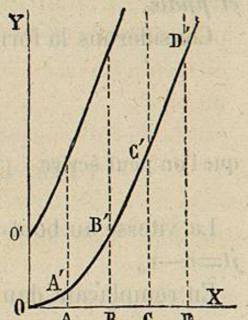

Fig. 192.

En remarquant qu'une ordonnée quelconque, représentant l'espace e parcouru au bout d'un temps t, a pour valeur :

$$e = \frac{1}{2} jt^2$$

et que j est constant, on voit que l'espace e est proportionnel au carré du temps employé à le parcourir. La courbe CD', dont les ordonnées sont proportionnelles aux carrés des abscisses, est une *parabole*.

Le mobile partant du repos, l'axe OY est l'axe de la parabole, et l'axe OX est une tangente à son sommet O.

Le mobile ayant déjà parcouru un espace e_0 avant son passage à l'instant initial, le sommet de la parabole ne sera plus en O. Cette courbe coupera l'axe OY en un point O' qui sera déterminé en portant une longueur OO' représentant, à l'échelle des espaces, le chemin e_0 parcouru par le mobile depuis l'origine du mouvement jusqu'à l'instant initial.

Des formules qui précèdent on déduit les conséquences suivantes :

1° *Dans le mouvement uniformément accéléré, l'espace parcouru par un mobile au bout d'un temps* t *est égal à l'espace qu'il parcourrait s'il était animé d'un mouvement uniforme, dont la vitesse serait une moyenne arithmétique entre les vitesses initiale et finale.*

Considérons la formule générale (3) de l'espace parcouru :

$$e=v_0t+\frac{1}{2}jt^2,$$

que l'on peut écrire $$e=\left(v_0+\frac{1}{2}jt\right)t. \qquad (a)$$

La vitesse au bout d'un temps t étant $v=v_0+jt$, on en tire : $jt=v-v_0$.

En remplaçant dans la formule (a), il vient

$$e=\left(v_0+\frac{v-v_0}{2}\right)t \text{ ou } e=\left(\frac{v+v_0}{2}\right)t,$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

Cette formule aurait pu se déduire de la figure 191 elle-même, en remarquant que l'espace total parcouru au bout du temps t étant représenté par la somme des aires du triangle O'K''E et du rectangle OO'KE, est, par suite, égal à leur somme ou à la surface du trapèze OO'KK'', qui a pour mesure

$$\left(\frac{\text{KK}'+\text{OO}'}{2}\right)\text{OK ou } \left(\frac{v+v_0}{2}\right)t.$$

2° *Les vitesses sont proportionnelles aux temps.* — Nous avons vu que la vitesse au bout d'un temps quelconque t est $v=jt$.

Pour un autre temps t', on aura de même $v'=jt'$.

Divisant membre à membre ces deux égalités et supprimant le facteur commun j, il vient :

$$\frac{v}{v'}=\frac{t}{t'}.$$

Ainsi, en donnant au temps les valeurs successives 1'', 2'', 3'', 4'', on aura :

$$v=j \quad v'=2j, \quad v''=3j, \quad v'''=4j;$$

donc, les vitesses sont bien proportionnelles aux temps.

3° *La vitesse acquise par un mobile au bout d'un temps* t *est égale à la moyenne géométrique entre l'espace parcouru et le double de l'accélération.*

Reprenons les égalités

$$v=jt \quad \text{et} \quad e=\frac{1}{2}jt^2.$$

Élevant la première au carré, on a :

$$v^2=j^2t^2.$$

Divisant la seconde par cette dernière, il vient :

$$\frac{e}{v^2}=\frac{\frac{1}{2}jt^2}{j^2t^2}=\frac{1}{2j};$$

d'où $$v^2=2je \quad \text{et} \quad v=\sqrt{2je}.$$

260. 4° *L'espace parcouru pendant un temps quelconque* t *est égal à la différence des carrés des vitesses à la fin et au commencement de ce temps* t, *divisée par le double de l'accélération.*

Reprenons les formules (1) et (3)

$$v=v_0+jt \qquad e=v_0t+\frac{1}{2}jt^2.$$

Tirons la valeur de t de la première, il vient :

$$t=\frac{v-v_0}{j}$$

Introduisant cette valeur de t dans la seconde, nous aurons :

$$e=v_0\frac{v-v_0}{j}+\frac{1}{2}j\frac{(v-v_0)^2}{j^2}$$

Cette équation peut s'écrire :

$$e=\frac{2v_0(v-v_0)+(v-v_0)^2}{2j}$$

En effectuant, il vient :

$$e=\frac{2v_0v-2v_0^2+v^2-2vv_0+v_0^2}{2j}$$

En simplifiant, on a enfin :

$$e=\frac{v^2-v_0^2}{2j}, \text{ C.Q.F.D.}$$

Si le mobile part du repos au moment où l'on commence à compter le temps t, nous retombons dans la formule de la conséquence ci-dessus ; en effet, dans ce cas $v_0=0$ et l'on a :

$$e=\frac{v^2}{2j} \quad \text{d'où : } v=\sqrt{2je}.$$

261. Loi des accélérations. — Dans le mouvement uniformément accéléré, la vitesse augmentant d'une manière uniforme, l'accélération est constante, et la loi, ou relation des accélérations aux temps, est une droite parallèle à l'axe des temps menée à une distance de cet axe égale à l'ordonnée de la vitesse au bout de la 1re seconde lorsque le mobile part du repos. Elle passerait par le point A′ de la figure 186.

§ 2. — MOUVEMENT UNIFORMÉMENT RETARDÉ.

262. Définition. — *Le mouvement est uniformément retardé lorsque la vitesse décroît porportionnellement au temps.*

Soient v_0 la vitesse initiale du mobile, et j la quantité dont elle diminue à chaque unité de temps. Au bout de la 1re seconde on aura : $v'=v_0-j$,
au bout de la 2e seconde $v''=v_0-2j$,
au bout de la 3e seconde $v'''=v_0-3j$,
et au bout du temps t, la vitesse sera égale à :

$$v=v_0-jt. \qquad (1)$$

Cette formule ne diffère de celle du mouvement uniformément accéléré qu'en ce que la quantité j est prise négativement.

263. Loi des vitesses. — Pour obtenir la loi des vitesses, traçons les axes des coordonnées OX et OY (*fig.* 193), puis portons sur l'axe OY une longueur Oa représentant, à l'échelle adoptée, la vitesse initiale v_0. Sur l'axe OX des abscisses, portons des longueurs OA, AB, BC,... représentant, à l'échelle des temps, les secondes successives écoulées depuis l'instant initial, et en chacun des points de division élevons des or-

données respectivement égales aux vitesses correspondantes. La vitesse AA′, au bout d'une seconde, s'obtiendra en retranchant de l'ordonnée Oa l'accélération j portée de a' en A′, et les vitesses au bout des secondes successives s'obtiendront d'une manière analogue en diminuant de l'accélération j les ordonnées correspondant aux vitesses des secondes précédentes. En joignant les extrémités des ordonnées ainsi obtenues, nous aurons la loi des vitesses, qui est une ligne droite inclinée en sens contraire de celle représentant la loi des vitesses du mouvement uniformément accéléré.

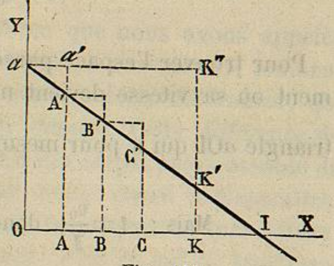

Fig. 193.

Le point I, où la loi des vitesses rencontre l'axe des temps, correspond à l'instant où la vitesse v est nulle, et, à cet instant, le mobile est au repos. Pour déterminer le temps OI, faisons, dans la formule (1), $v=0$, et il vient :

$$v_0=jt \quad \text{d'où} \quad t=\frac{v_0}{j}.$$

Or, dans le mouvement uniformément accéléré, le temps employé par le mobile pour acquérir la vitesse v est exprimé par :

$$t=\frac{v}{j}.$$

On peut donc dire que, *dans le mouvement uniformément retardé, le temps employé par un mobile pour perdre sa vitesse initiale v_0 est exactement le même que celui qu'il nécessiterait si, partant du repos et étant animé d'un mouvement uniformément accéléré, il devait acquérir cette vitesse v_0.*

264. Détermination de l'espace parcouru. — L'espace parcouru e par un mobile pendant un temps t, représenté par OK, est exprimé, comme il serait facile de le voir, par l'aire du rectangle OaKK″ qui a pour mesure $v_0\times t$, diminuée de l'aire du triangle aK′K″ qui a pour mesure :

$$\frac{1}{2}a\text{K}''\times\text{K}'\text{K}''=\frac{1}{2}t\times jt=\frac{1}{2}jt^2.$$

On aura donc pour la valeur de e :

$$e = v_0 t - \frac{1}{2} j t^2.$$

Pour trouver l'espace parcouru par le mobile jusqu'au moment où sa vitesse devient nulle, il suffit d'évaluer l'aire du triangle aOI qui a pour mesure $\frac{1}{2}\,\mathrm{OI} \times \mathrm{O}a = \frac{1}{2} v_0 t$.

$$\text{Mais : } \quad t = \frac{v_0}{j}; \quad \text{donc : } e' = \frac{1}{2} v_0 \times \frac{v_0}{j} = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{j}.$$

Or, dans le mouvement uniformément accéléré, l'espace parcouru au bout du temps t par un mobile partant du repos est donné par l'équation :

$$e = \frac{1}{2} j t^2.$$

En remplaçant t par sa valeur $\frac{v}{j}$, cette formule devient :

$$e = \frac{1}{2} j \times \frac{v^2}{j^2} = \frac{1}{2}\frac{v^2}{j}.$$

On peut donc dire *qu'un mobile animé d'un mouvement uniformément retardé avec une vitesse v_0 parcourt, pour arriver à une vitesse nulle, le même espace qu'il parcourrait si, étant animé d'un mouvement uniformément accéléré, il devait acquérir la vitese v_0.*

265. Loi des espaces. — En prenant pour abscisses les valeurs successives du temps et pour ordonnées les espaces parcourus correspondants, on déterminera la loi des espaces qui, dans ce cas, sera une parabole tournant sa concavité vers l'axe des temps.

266. Loi des accélérations. — Dans le mouvement uniformément retardé, l'accélération étant constante, la loi ou relation des accélérations aux temps est, comme pour le mouvement uniformément accéléré, une droite parallèle à l'axe des temps ; mais l'accélération étant négative, la droite se trouvera au-dessous de cet axe à une distance égale à l'ordonnée de la vitesse au bout de la 1re seconde lorsque le mobile partira du repos.

§ 3. — LOIS DE LA CHUTE DES CORPS.

267. Sous l'influence d'une force que nous avons appelée *pesanteur*, tous les corps, abandonnés à eux-mêmes, tombent à la surface du sol avec des vitesses bien différentes, qui varient selon leur forme et leur densité. Cette différence de vitesse, dans le mouvement vertical des corps, provient seule de la résistance de l'air, et si cette cause venait à disparaître, tous les corps, quelles que soient leur forme et leur nature, tomberaient avec la même vitesse : c'est ce qui se démontre, en physique, en faisant le vide dans un long tube de verre contenant des corps de diverses natures.

Les lois du mouvement vertical des corps pesants dans le vide, ou lois de la chute des corps, ont été découvertes par le célèbre physicien Galilée.

268. Démonstration expérimentale des lois de la chute des corps. — Les lois de la pesanteur se démontrent expérimentalement au moyen de la machine d'Atwood et de l'appareil à indications continues du général Morin.

269. Machine d'Atwood. Son principe. — Considérons une poulie très mobile autour d'un axe horizontal, sur laquelle s'enroule un fil de soie très fin, portant à chacune de ses extrémités deux poids parfaitement égaux P et P′. Ces deux poids se feront constamment équilibre dans toutes les positions qu'on pourra leur donner ; mais si l'on vient à placer sur l'un d'eux, P par exemple, un poids additionnel p, l'équilibre sera rompu et le système se mettra en mouvement sous la seule influence de ce poids additionnel. Les lois de la chute de p ne seront pas changées, c'est-à-dire qu'il se mouvra comme s'il tombait librement, mais l'action de la pesanteur sur lui se trouvera diminuée. En effet, supposons que les poids P et P′ pèsent chacun 24 grammes et que le poids additionnel pèse 1 gramme ; au moment où l'on place p sur P, p produit le mouvement descendant de P et le mouvement ascensionnel de P′ ; or, ces poids se faisant équilibre dans toutes les positions, le poids p ou 1 gramme entraîne seul la somme $\mathrm{P} + \mathrm{P}' + p$ ou 49 grammes. Par conséquent le mouvement du poids p est le même que s'il se mouvait seul, l'intensité de la pesanteur étant rendue