$v=v_0-gt$, de faire $v=0$, et l'on aura $v_0=gt$; d'où :

$$t=\frac{v_0}{g}=\frac{63^m,75}{9^m,8088}=6''5.$$

La hauteur à laquelle il s'élèvera sera donnée par la formule (11)

$$h=\frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g}=\frac{\overline{63,75}^2}{2\times 9,8088}=205^m,25;$$

on l'appelle *hauteur due à la vitesse* v_0.

Actuellement, cherchons quelle sera la vitesse acquise par ce corps en supposant que, partant du repos, il ait à parcourir un espace de $205^m,25$. Reprenons l'équation (4), nous aurons :

$$v=\sqrt{2gh}=\sqrt{2\times 9,8088\times 205,25}=63^m,75.$$

Cette vitesse est appelée *vitesse due à la hauteur h*.

On voit donc que la hauteur à laquelle s'élève un corps lancé verticalement de bas en haut avec une vitesse initiale v_0, est exactement la même que celle qu'il devrait parcourir de haut en bas si, partant du repos, il devait posséder en touchant le sol la même vitesse v_0. En d'autres termes, *tout corps lancé verticalement de bas en haut et qui revient au sol, possède des vitesses égales au départ et à l'arrivée.*

Ce corps possède aussi des vitesses égales en passant par un même point quelconque de sa trajectoire, soit en montant soit en descendant. En effet, prenons un point situé à une hauteur h'; la vitesse du mobile en montant, tirée de la formule (7), sera :

$$v_m=\sqrt{v_0^2-2gh'}$$

Pour revenir au même point en descendant, le mobile parcourt la hauteur $h-h'$ et sa vitesse d'après la formule (4) est :

$$v_d=\sqrt{2g(h-h')}$$

Remplaçant h par sa valeur tirée de la formule (11) il vient :

$$v_d=\sqrt{2g\frac{v_0^2}{2g}-2gh}=\sqrt{v_0^2-2gh'}$$

et par suite :

$$v_m=v_d$$

CHAPITRE III

MOUVEMENT PÉRIODIQUE — MOUVEMENT QUELCONQUE — MOUVEMENT DE ROTATION

§ 1. — MOUVEMENT PÉRIODIQUE.

276. Définition. — *Le mouvement est périodique lorsque la vitesse repasse par les mêmes valeurs après certains intervalles de temps appelés périodes;* si ces périodes sont égales, *le mouvement est uniformément périodique.* Tel est le cas du mouvement du pendule, du châssis d'une scie, du piston des machines à vapeur, des pompes, etc., et de presque toutes les pièces composant les machines.

La figure 197 représente la loi des espaces d'un mouvement uniformément périodique; pendant chaque période il est successivement retardé et accéléré. Il est retardé dans la première demi-période OA, la courbe OA′ tournant sa concavité vers l'axe des temps; il est accéléré dans la seconde demi-période AB, la courbe A′B′ tournant sa convexité vers le même axe OX, et la vitesse est presque nulle au milieu de la période.

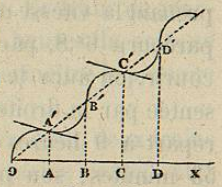

Fig. 197.

On substitue très souvent à un mouvement uniformément périodique un mouvement uniforme, appelé *mouvement moyen*, tel que les espaces parcourus dans chaque période soient égaux. La vitesse de ce mouvement moyen, appelée *vitesse moyenne*, s'obtiendra en divisant l'espace parcouru pendant une période par le temps nécessaire à ce parcours, et en construisant la loi des espaces de ce mouvement moyen, on aura la droite passant par les points O, A′, B′, C′, D′.

277. Application. Graphique des trains. — Dans l'exploitation des chemins de fer, on se sert du *mouvement moyen*, remplaçant un mouvement périodique, pour représenter, par des lignes droites, sur une épure, la marche des trains; cette épure s'appelle *le graphique des trains*.

La planche placée à la fin de ce volume (*fig.* 198) représente le graphique des trains de la ligne de l'État, circulant entre Cognac et Angoulême; l'épure est facile à construire. Sur un axe horizontal on prend des parties égales représentant les heures de la journée, et on les divise chacune en 10 ou en 6 parties plus petites représentant des intervalles de 6 ou 10 minutes; les intervalles plus petits s'apprécient à l'œil. On prend un autre axe vertical sur lequel on porte, à l'échelle adoptée, des longueurs égales aux distances séparant les différentes stations qui se trouvent sur la ligne. En menant, par tous les points de division de chacun des axes, des droites parallèles à l'autre axe, on couvre la feuille d'une série de lignes dont les verticales représentent les heures et leurs fractions, et dont les horizontales correspondent aux différentes stations.

Un train part de Cognac à 9 heures 30 minutes du matin et arrive à Gensac à 9 heures 40 minutes; ce train, partant du repos pour revenir au repos après avoir parcouru $6^k,8$, possède un mouvement varié dont la loi serait une ligne courbe; en prenant la vitesse moyenne que l'on obtient en divisant l'espace parcouru $6^k,8$, par le temps 10 minutes, employé à le parcourir, on aura le mouvement moyen dont la loi sera représentée par la droite aa'. Le train reste deux minutes à Gensac, repart à 9 heures 42 minutes et arrive à Jarnac à 9 heures 53 minutes; son mouvement moyen sera représenté par la droite bb'. Le train, après s'être arrêté deux minutes à chaque station, arrive à Angoulême à 11 heures 2 minutes, et son mouvement moyen est donné par une série de lignes à peu près parallèles cc', dd', ee'..., ll'; son mouvement, pendant tout le trajet, est représenté par la ligne brisée aa', bb', cc'..., ll', dont les parties obliques correspondent à la marche, et les parties horizontales $a'b$, $b'c$, $e'd$, aux temps d'arrêt.

Les trains plus rapides seront représentés par des obliques plus rapprochées de la verticale, et les trains plus lents par des obliques se rapprochant davantage de l'horizontale.

Nous avons représenté, sur la figure, les diverses sortes de trains par des lignes différentes, ainsi :

Les trains de voyageurs par
Les trains mixtes par
Les trains de marchandises réguliers par
Les trains de marchandises facultatifs par

Les trains montants, allant d'Angoulême à Cognac, sont représentés par des lignes inclinées en sens contraire des précédentes. Ainsi, un train part d'Angoulême à 9 heures 40 minutes et arrive à Saint-Michel à 9 heures 49 minutes; il repart à 9 heures 51 minutes et, après s'être arrêté deux minutes à Nersac et à Sireuil, arrive à Châteauneuf à 10 heures 20 minutes; là, il reste quatre minutes, afin de laisser le temps au train de voyageurs venant de Cognac, et qu'il attend depuis deux minutes, de repartir une minute après; il quitte cette station à 10 heures 24 minutes et arrive à Cognac à 10 heures 18 minutes.

Cette épure fait voir les croisements, les garages et les rencontres des trains, et permet de combiner ceux-ci pour que les rencontres aient lieu aux stations ou sur des parcours établis à double voie, de manière à éviter les chocs.

On voit que le train de marchandises facultatif qui part de Cognac à 8 heures 15 minutes du matin, se gare à Châteauneuf pour laisser la voie libre aux deux trains dont nous avons parlé plus haut et qui se croisent à cette station. Le train de marchandises régulier, partant de Cognac à 4 heures du soir, se gare quatre fois, pendant son trajet, pour permettre le passage à quatre trains circulant en sens inverse.

On voit encore que, quelques minutes après midi, deux trains allant en sens contraire se rencontrent en pleine route, entre Saint-Michel et Angoulême; ceci exige, pour éviter toute collision, que le parcours entre ces deux stations soit établi à double voie, ce qui existe en effet. La rencontre de ces deux trains peut ne pas avoir lieu au point précis indiqué par l'épure, car il ne faut pas oublier qu'en prenant des lignes droites, nous remplaçons le mouvement réel et varié des trains par un mouvement moyen uniforme. Il en résulte que les lois du mouvement réel des trains, qui sont des courbes sinueuses, peuvent se couper en un point autre que m plus rapproché de l'une ou de l'autre station; mais ceci n'offre pas d'inconvénients, puisque, comme nous l'avons dit, on combine les croisements pour qu'ils aient lieu aux temps d'arrêt, ou sur des parcours établis à double voie.

§ 2. — MOUVEMENT QU LCONQUE.

278. Considérons le cas général d'un mobile se mouvant d'une manière quelconque sur sa trajectoire. Soit a, d, f, h, l, sa loi de mouvement (*fig.* 199), xx' l'axe des temps et o' l'origine des temps. En étudiant cette loi, nous allons exposer les différentes phases du mouvement du mobile sur sa trajectoire AB.

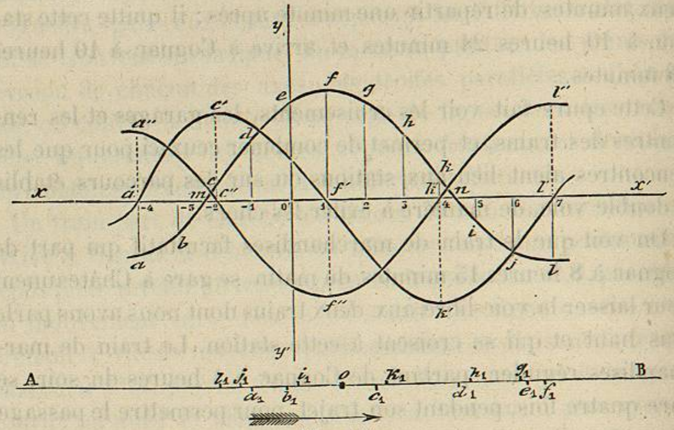

Fig. 199.

Les ordonnées $-4a$, $-3b$, $-2e$... $7l$, représentent, comme nous le savons, la distance variable du mobile sur sa trajectoire, à une origine fixe O; lorsque l'ordonnée est au-dessous de xx', le mobile se trouve à gauche de l'origine O, ce qui a lieu pour les valeurs de $t = -4$, -3 et 5, 6, 7 secondes; lorsque l'ordonnée est au-dessus de xx', le mobile se trouve à droite du point O. Cela posé, il est facile de trouver la position du mobile sur la ligne AB, pour les différentes valeurs de t. Portons sur AB, à partir du point O (*).

A gauche..	$Oa_1 = -4a$	A droite...	$Oc_1 = -2c$
	$Ob_1 = -3b$		$Od_1 = -1d$
	$Oi_1 = 5i$		$Oe_1 = O'e$
	$Oj_1 = 6j$		$Of_1 = 1f$
	$Ol_1 = 7l$		$Og_1 = 2g$
			$Oh_1 = 3h$
			$Ok_1 = 4k$

(*) Afin de rendre la figure plus claire, nous avons porté ces diverses distances à une échelle double de celle des ordonnées.

Les points a_1, b_1, c_1... f_1, et g_1, h_1... l_1, seront les positions successives du mobile, à partir de 4 secondes avant l'origine des temps jusqu'à 7 secondes après.

Pour aller de b_1 en c_1, le mobile passe au point O, ce qui se voit aisément sur la loi du mouvement, car l'ordonnée du point b est dirigée vers le bas, tandis que celle du point c est dirigée vers le haut; le point m où la courbe coupe l'axe des temps donne l'instant précis du passage au point O. Au point f la courbe atteint son maximum et redescend vers l'axe xx' qu'elle coupe de nouveau au point n ; cela indique qu'une seconde après l'origine des temps, le mobile change de sens; il revient sur ses pas et repasse en O entre les positions k_1 et i_1, c'est-à-dire entre la 4^e^ et la 5^e^ seconde.

La loi des espaces étant connue, on en déduit la loi des vitesses $a'c'k'$ par le procédé que nous avons appris (**251**). Le mouvement étant quelconque, la vitesse change à chaque instant, et, par suite, l'accélération change aussi. Les ordonnées de la loi des accélérations seront proportionnelles aux rapports des variations très petites de la vitesse aux temps, très petits aussi, pendant lesquels ces variations se produisent, et, par conséquent, la loi $a''f''l''$ des accélérations se déduira de celle des vitesses par le même procédé que la loi des vitesses se déduit de celle des espaces.

La courbe $a'c'k'$ des vitesses coupe l'axe xx' aux points a', f', l', projections des points a, f, l où la courbe $a\,f\,l$ des espaces atteint un maximum ou un minimum ; ces points donnent les instants où le mobile s'arrête sur sa trajectoire, pour reprendre un mouvement en sens contraire. Les ordonnées de la loi des vitesses sont positives, entre les points a' et f', parce que le mobile parcourt sa trajectoire dans le sens de la flèche ou sens positif; ces ordonnées sont négatives, entre f' et l', parce que le mouvement du mobile s'effectue en sens inverse, ou sens négatif.

Les maximums ou les minimums de la courbe des vitesses, tels que c', k', correspondent aux points d'inflexion, tels que c, k, de la courbe des espaces.

La courbe $a''f''l''$ des accélérations coupe l'axe xx' en des points c'', k'', projection des points c', k' où la loi des vitesses atteint un maximum ou un minimum. Les ordonnées de la loi des accélérations sont positives, avant c'' et après k'', parce que la vitesse augmente ou diminue dans le sens négatif du mouvement.

Les maximums ou les minimums $a''f''l''$ de la courbe des accélérations correspondent aux points d'inflexion de la courbe des vitesses.

Nous avons supposé la courbe des espaces connue ; si c'était la courbe des vitesses qui fût donnée, on pourrait passer facilement de celle-ci à la courbe des espaces. En effet, nous avons vu (**258**) qu'en divisant le temps total pendant lequel un mouvement s'accomplit, en très petites parties t, on pouvait admettre que, pour chacune de ces petites divisions, le mobile se meut d'un mouvement uniforme avec une vitesse égale à celle qu'il possède à la fin de l'intervalle précédent, et alors l'espace parcouru est représenté par l'aire comprise entre la courbe, l'abscisse t et les ordonnées correspondant aux extrémités de cette abscisse. Par conséquent, en évaluant à l'aide de la formule de Thomas Simpson les aires correspondant aux différentes abscisses t, $2t$, $3t$..., ces aires représenteront les déplacements totaux successifs du mobile sur sa trajectoire AB, à partir de l'origine fixe O, déplacements qui seront positifs ou négatifs suivant que les aires seront situées au-dessus ou au-dessous de l'axe xx'. En divisant les différentes aires par la longueur qui représente l'unité de temps à l'échelle adoptée, on obtiendra des longueurs qui donneront les ordonnées de la loi des espaces.

Le même procédé servirait à passer de la loi des accélérations à celle des vitesses ; on voit donc qu'une quelconque des trois lois étant donnée, on peut, sans difficulté, en déduire les deux autres et déterminer toutes les différentes circonstances d'un mouvement rectiligne.

§ 3. — MOUVEMENT UNIFORME DE ROTATION.

279. Définition. — On dit *qu'un corps est animé d'un mouvement de rotation, lorsqu'il tourne autour d'un axe fixe, et que tous ses points décrivent des circonférences dont les plans sont perpendiculaires à cet axe.* Les meules de moulin, des rémouleurs, les roues d'engrenages, les volants des machines à vapeur, sont des corps animés d'un mouvement de rotation.

Considérons deux points M et N d'un corps quelconque (*fig.* 200), mobile autour de l'axe xx', et supposons qu'au bout d'un certain temps, le point M se soit transporté en M' ; pendant ce même temps, le point N se sera transporté en N' de telle sorte que les angles au centre MOM', NON' seront égaux, mais les longueurs des arcs seront différentes. En remarquant que les arcs sont proportionnels à leurs rayons, on aura :

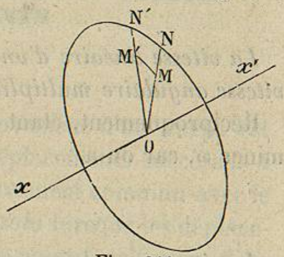

Fig. 200.

$$\frac{MM'}{NN'} = \frac{MO}{NO}$$

c'est-à-dire que *dans le mouvement de rotation, les arcs décrits par les différents points d'un corps sont proportionnels à leurs distances à l'axe.* Ainsi, un point étant situé à une distance de l'axe de rotation, double, triple, quadruple d'un autre point, le premier parcourra des arcs doubles, triples, quadruples du second.

Les arcs décrits par un même point étant toujours égaux pendant des intervalles de temps égaux, *le mouvement de rotation est uniforme.*

280. Vitesse linéaire. — La vitesse, dans le mouvement uniforme, étant l'espace parcouru pendant l'unité de temps et les arcs MM', NN', pouvant être considérés comme étant les chemins décrits pendant une seconde, on aura, en désignant par v et v' les vitesses respectives des points M et N,

$$\frac{v}{v'} = \frac{MM'}{NN'} \quad \text{et par suite} \quad \frac{v}{v'} = \frac{MO}{NO}$$

Ce qui montre que *les vitesses linéaires des différents points d'un corps animé d'un mouvement de rotation uniforme sont proportionnelles à leurs distances à l'axe.*

281. Vitesse angulaire. — D'après ce qui vient d'être exposé, la détermination de la vitesse en différents points d'un corps animé d'un mouvement de rotation uniforme peut se déduire de la connaissance de la vitesse en un seul point. Celui-ci est supposé à l'unité de distance de l'axe de rotation et le chemin qu'il parcourt pendant une seconde est appelé *vitesse angulaire* et se désigne par ω.

Dès lors, il nous sera facile de déterminer la vitesse v d'un point situé à une distance r de l'axe de rotation, car on a la relation :

$$\frac{v}{\omega}=\frac{r}{1} \quad \text{d'où } v=\omega r \qquad (1)$$

La vitesse linéaire d'un point quelconque est donc égale à la vitesse angulaire multipliée par la distance de ce point à l'axe.

Réciproquement, étant donnée la vitesse v, on peut déterminer ω, car on a :

$$\omega=\frac{v}{r} \qquad (2)$$

La vitesse angulaire est donc égale à la vitesse linéaire en un point quelconque divisée par la distance de ce point à l'axe.

Connaissant le nombre de tours n par minute du corps en mouvement, on peut en déduire la vitesse angulaire. En effet, l'arc décrit par un point situé à 1 mètre de l'axe a pour mesure 2π pour chaque tour, et pour n tours, il a pour valeur $2\pi n$; l'espace parcouru par seconde ou la vitesse angulaire est donc :

$$\omega=\frac{2\pi n}{60}=\frac{\pi n}{30} \qquad (3)$$

Réciproquement, la vitesse angulaire étant donnée, le nombre de tours par minute sera exprimé par :

$$n=\frac{30\omega}{\pi} \qquad (4)$$

La vitesse angulaire peut encore s'exprimer en fonction du nombre de degrés dont le corps a tourné ; si n' représente ce nombre de degrés, on aura :

$$\omega=\frac{2\pi n'}{360}=\frac{\pi n'}{180} \qquad (5)$$

CHAPITRE IV

MOUVEMENTS SIMULTANÉS — COMPOSITION DES MOUVEMENTS

282. Nous savons (5) que le mouvement d'un corps est *relatif* lorsqu'on rapporte tous ses déplacements successifs à des corps animés eux-mêmes d'un mouvement commun avec le corps que l'on observe, et il est dit *absolu* lorsque les déplacements de ce corps sont rapportés à des points réellement fixes dans l'espace. Les différents mouvements que nous avons étudiés jusqu'ici ont été supposés absolus ; nous nous occuperons maintenant des corps animés de deux ou plusieurs mouvements simultanés.

283. Mouvements simultanés d'un point matériel. — Considérons un mobile A (*fig.* 201) parcourant la trajectoire AC sur le pont d'un bateau animé lui-même d'un mouvement tel que tous ses points décrivent des lignes parallèles à AB. Pour un observateur situé sur le bateau et qui se déplace avec celui-ci, le mobile A est animé d'un mouvement suivant la trajectoire AC ; pour un autre observateur placé en un point fixe sur le rivage, le mobile A décrira une trajectoire AN représentant le mouvement réel du point dans l'espace. Ce mouvement réel ou absolu provient de la combinaison de deux mouvements dont l'un est le mouvement relatif du point lui-même, et l'autre, celui du bateau. On dit alors *que le mobile est animé de deux mouvements simultanés ;* en réalité, un point ne peut jamais avoir qu'un seul mouvement ; on doit entendre par mouvements simultanés, le mouvement relatif du point A et celui du bateau, dont la connaissance permet de déterminer le mouvement réel du point dans l'espace.

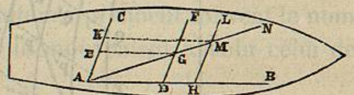

Fig. 201.

Les lignes AC, AB et AN prennent respectivement les noms