et le chemin qu'il parcourt pendant une seconde est appelé *vitesse angulaire* et se désigne par ω.

Dès lors, il nous sera facile de déterminer la vitesse v d'un point situé à une distance r de l'axe de rotation, car on a la relation :

$$\frac{v}{\omega}=\frac{r}{1} \quad \text{d'où } v=\omega r \qquad (1)$$

La vitesse linéaire d'un point quelconque est donc égale à la vitesse angulaire multipliée par la distance de ce point à l'axe.

Réciproquement, étant donnée la vitesse v, on peut déterminer ω, car on a :

$$\omega=\frac{v}{r} \qquad (2)$$

La vitesse angulaire est donc égale à la vitesse linéaire en un point quelconque divisée par la distance de ce point à l'axe.

Connaissant le nombre de tours n par minute du corps en mouvement, on peut en déduire la vitesse angulaire. En effet, l'arc décrit par un point situé à 1 mètre de l'axe a pour mesure 2π pour chaque tour, et pour n tours, il a pour valeur $2\pi n$; l'espace parcouru par seconde ou la vitesse angulaire est donc :

$$\omega=\frac{2\pi n}{60}=\frac{\pi n}{30} \qquad (3)$$

Réciproquement, la vitesse angulaire étant donnée, le nombre de tours par minute sera exprimé par :

$$n=\frac{30\omega}{\pi} \qquad (4)$$

La vitesse angulaire peut encore s'exprimer en fonction du nombre de degrés dont le corps a tourné ; si n' représente ce nombre de degrés, on aura :

$$\omega=\frac{2\pi n'}{360}=\frac{\pi n'}{180} \qquad (5)$$

CHAPITRE IV

MOUVEMENTS SIMULTANÉS — COMPOSITION DES MOUVEMENTS

282. Nous savons (**5**) que le mouvement d'un corps est *relatif* lorsqu'on rapporte tous ses déplacements successifs à des corps animés eux-mêmes d'un mouvement commun avec le corps que l'on observe, et il est dit *absolu* lorsque les déplacements de ce corps sont rapportés à des points réellement fixes dans l'espace. Les différents mouvements que nous avons étudiés jusqu'ici ont été supposés absolus ; nous nous occuperons maintenant des corps animés de deux ou plusieurs mouvements simultanés.

283. Mouvements simultanés d'un point matériel. — Considérons un mobile A (*fig.* 201) parcourant la trajectoire AC sur le pont d'un bateau animé lui-même d'un mouvement tel que tous ses points décrivent des lignes parallèles à AB. Pour un observateur situé sur le bateau et qui se déplace avec celui-ci, le mobile A est animé d'un mouvement suivant la trajectoire AC ; pour un autre observateur placé en un point fixe sur le rivage, le mobile A décrira une trajectoire AN représentant le mouvement réel du point dans l'espace. Ce mouvement réel ou absolu provient de la combinaison de deux mouvements dont l'un est le mouvement relatif du point lui-même, et l'autre, celui du bateau. On dit alors *que le mobile est animé de deux mouvements simultanés ;* en réalité, un point ne peut jamais avoir qu'un seul mouvement ; on doit entendre par mouvements simultanés, le mouvement relatif du point A et celui du bateau, dont la connaissance permet de déterminer le mouvement réel du point dans l'espace.

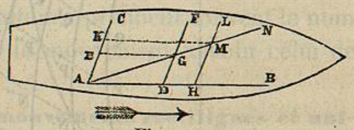

Fig. 201.

Les lignes AC, AB et AN prennent respectivement les noms de *trajectoire relative, trajectoire d'entraînement, trajectoire absolue*, et les mouvements correspondants, *mouvement relatif, mouvement d'entraînement et mouvement absolu.*

284. Principe de l'indépendance des mouvements simultanés. — Le principe de l'indépendance des mouvements simultanés consiste en ce que, si un mobile est animé de plusieurs mouvements simultanés, ceux-ci se produisent indépendamment les uns des autres sans se modifier.

Ce principe nous est démontré par l'observation des faits ; ainsi, le mouvement du mobile sur le bateau est le même que si celui-ci était au repos ; il en est de même pour une personne qui se transporterait de l'avant à l'arrière et réciproquement. Si un enfant, assis dans un wagon de chemin de fer, lance verticalement une orange, celle-ci retombera dans ses mains malgré le chemin horizontal parcouru par le wagon pendant l'ascension et la descente de l'orange.

Les divers mouvements simultanés se produisant indépendamment les uns des autres, on pourra déterminer le mouvement absolu d'un point connaissant les mouvements simultanés auxquels il est soumis. Nous déterminerons d'abord la trajectoire absolue.

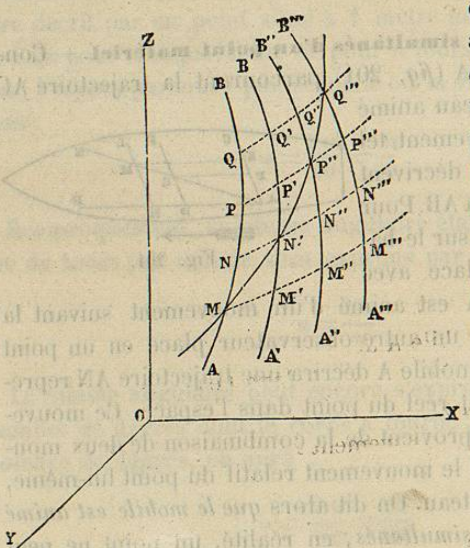

Fig. 202.

285. Détermination de la trajectoire absolue. — Imaginons qu'un mobile rapporté à un système d'axes mobiles OX, OY, OZ (*fig.* 202), décrive une trajectoire relative AB, pendant que ce système est entraîné d'un mouvement tel que la ligne AB occupe successivement les diverses positions A'B', A''B'', A'''B'''. Étant donnés la trajectoire relative et le mouvement

dont sont animés les axes mobiles, il est facile de trouver la trajectoire absolue décrite par le mobile. En effet, supposons qu'aux temps t, t', t'', le mobile occupe, sur sa trajectoire relative, les positions successives M, N, P, Q, et que, pendant ces mêmes temps, AB se soit transportée en A'B', A''B'', A'''B'''. Au commencement du temps t, le mobile est en M ; au bout de ce temps t, il se trouve situé en N sur la ligne AB qui, pendant ce temps, s'est transportée en A'B' ; la position réelle du mobile au bout du temps t, est donc en N' sur A'B'. Au bout du temps t', le mobile occupera la position P sur sa trajectoire relative, qui, pendant ce temps, se sera transportée en A''B'' ; la position réelle du mobile au bout du temps t' est donc en P'' sur A''B''. On verrait de même qu'au bout du temps t'' le mobile occuperait la position Q''' sur A'''A'''. En unissant tous les points M, N', P'', Q''', par un trait continu, on obtiendra la trajectoire réelle ou absolue du mobile dans l'espace.

286. Composition des mouvements. — Le problème de la composition des mouvements peut s'énoncer ainsi : *un mobile étant animé de plusieurs mouvements simultanés connus, déterminer son mouvement absolu.*

Les divers mouvements simultanés prennent souvent le nom de *mouvements composants*, et le mouvement absolu celui de *mouvement résultant*.

287. Composition de deux mouvements rectilignes et uniformes. — Supposons qu'au bout d'un temps t, un mobile ait parcouru la longeur AE sur la droite AC (*fig.* 201) d'un mouvement rectiligne et uniforme pendant que la ligne AC est elle-même entraînée d'un mouvement rectiligne et uniforme tel que, au bout du temps t, elle occupe la position DF. Chacun des mouvements simultanés se produisant indépendamment l'un de l'autre, le mobile se trouvera au bout du temps t, sur la droite DF en un point G, obtenu en portant DG = AE. En considérant le mobile à un autre instant t', on verrait de même qu'il se trouve en M. Joignons le point A aux points G et M. La trajectoire relative AC se transportant parallèlement à elle-même d'un mouvement uniforme, on aura :

$$\frac{AD}{AH}=\frac{t}{t'}=\frac{EG}{KM}$$

Le mobile étant de même animé d'un mouvement uniforme, on a :

$$\frac{AE}{AK}=\frac{t}{t'}$$

A cause du rapport commun il vient :

$$\frac{EG}{KM}=\frac{AE}{AK}$$

Les deux triangles AKM et AEG ayant un angle égal AEG = AKM comme correspondants, et les côtés proportionnels, sont semblables et donnent :

$$\text{angle KAM} = \text{angle EAG}$$

Par conséquent, les points G et H se trouvent sur une même ligne droite qui est la diagonale du parallélogramme construit sur les chemins composants. De plus, le mouvement du mobile sur cette diagonale est uniforme, car de la similitude des triangles AKM et AEG, on tire :

$$\frac{AE}{AK}=\frac{AG}{AM};\quad \text{mais } \frac{AE}{AK}=\frac{t}{t'},\quad \text{donc : } \frac{AG}{AM}=\frac{t}{t'}$$

Les espaces parcourus suivant le chemin résultant étant proportionnels aux temps employés à les parcourir, il en résulte que le mobile est animé d'un mouvement uniforme suivant la diagonale.

288. Composition des vitesses. — Connaissant la composition des chemins, on en déduit la composition des vitesses.

Les vitesses des mouvements relatifs et d'entraînement prennent les noms de *vitesse relative* et *vitesse d'entraînement ;* on les désigne souvent sous le nom collectif de *vitesses composantes ;* la *vitesse absolue* ou *résultante* est celle du mouvement absolu ou résultant.

On admet que, *si un corps est animé de plusieurs vitesses simultanées, la vitesse résultante est la même que si les vitesses composantes agissaient les unes indépendamment des autres sur le corps.*

289. Parallélogramme des vitesses. — *La vitesse résultante de deux vitesses simultanées est représentée en grandeur et en direction par la diagonale du parallélogramme dont les côtés représentent en grandeur et en direction les vitesses composantes.* En effet, la vitesse, dans le mouvement uniforme, étant égale à l'espace parcouru divisé par le temps, on a, sur la figure 201,

$$\frac{AE}{t}=\frac{AD}{t}=\frac{AG}{t}$$

On conclut de là que si AE et AD représentent en grandeur et en direction les vitesses composantes, AG, ou la diagonale du parallélogramme construit sur ces deux droites, représentera en grandeur et en direction la vitesse résultante.

Remarque I. — *La vitesse résultante de deux vitesses composantes de même sens et de même direction est égale à la somme de ces vitesses.* Si elles sont de sens contraire *la vitesse résultante est égale à la différence des vitesses composantes.*

Remarque II. — *La vitesse résultante de plusieurs vitesses composantes de sens contraire et de même direction est égale à la somme algébrique des vitesses composantes.*

Nous traiterons rapidement la composition et la décomposition des vitesses, car tout ce qui a été dit relativement aux forces s'applique, sans restriction, aux vitesses ; nous énoncerons seulement les principaux théorèmes.

290. Polygone des vitesses. — *Lorsqu'un mobile est animé de plusieurs vitesses simultanées, la vitesse résultante est représentée en grandeur et en direction par le côté qui ferme le polygone dont les autres côtés sont respectivement égaux et parallèles aux droites qui représentent en grandeur et en direction les vitesses composantes.*

291. Cas particulier. Parallélipipède des vitesses. — *Si un mobile est animé de trois vitesses simultanées, non situées dans un même plan, la vitesse résultante est représentée en grandeur et en direction par la diagonale du parallélipipède dont les trois arêtes, issues du même sommet, représentent en grandeur et en direction les trois vitesses composantes.*

292. Décomposition des vitesses. — De même qu'une force, une vitesse quelconque peut être considérée comme la résultante de plusieurs vitesses, et, à ce titre, elle peut être décomposée en deux ou plusieurs vitesses composantes.

293. Décomposition d'une vitesse en deux autres vitesses simultanées. — Ce problème peut présenter 4 cas différents, comme il a été dit dans la décomposition des forces. On peut se donner :

1° La direction des vitesses composantes ;

2° L'intensité des vitesses composantes ;

3° L'une des composantes en grandeur et en direction ;

4° L'une des vitesses composantes en grandeur et l'autre en direction.

294. Décomposition d'une vitesse en trois autres vitesses simultanées. — Une vitesse donnée peut également être considérée comme la résultante de trois vitesses dont les directions ne sont pas dans un même plan. Donc, *les vitesses composantes sont données en grandeur et en direction par les trois arêtes issues du même sommet d'un parallélipipède dont la diagonale représenterait la vitesse donnée en grandeur et en direction.*

Remarque. — Dans tout ce qui précède, nous avons supposé que le mobile était animé d'un mouvement uniforme. Si le mouvement était varié d'une manière quelconque, les mêmes théorèmes s'appliqueraient à la composition et à la décomposition des vitesses simultanées. En effet, la vitesse d'un mouvement, à un instant quelconque, étant la vitesse du mouvement uniforme qui succéderait au mouvement varié à l'instant considéré, on peut admettre que les vitesses relatives et d'entraînement du mouvement varié sont sensiblement constantes à cet instant, et la vitesse absolue se déterminera comme on l'a fait pour le mouvement uniforme.

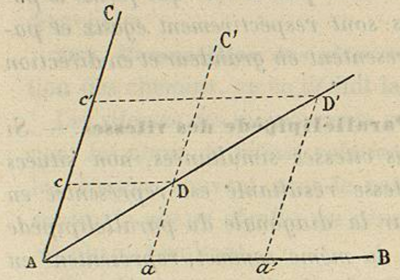

Fig. 203.

295. Composition de deux mouvements rectilignes uniformément accélérés sans vitesse initiale. — Soit j l'accélération du mouvement uniformément accéléré que possède un mobile sur sa trajectoire AC (*fig.* 203), pendant que cette trajectoire se meut parallèlement à elle-même d'un mouvement uniformément accéléré dont l'accélération est j'. Supposons qu'au bout d'un temps quelconque t, le mobile soit venu en c sur sa trajectoire et que celle-ci ait pris la position aC'. Chacun

des mouvements simultanés se produisant indépendamment l'un de l'autre, l'espace Ac parcouru par le mobile sur sa trajectoire sera :

$$\mathrm{A}c = \frac{1}{2}jt^2 \qquad (1)$$

et l'espace Aa parcouru par la trajectoire sera :

$$\mathrm{A}a = \frac{1}{2}j't^2 \qquad (2)$$

La position réelle du mobile dans l'espace s'obtiendra en portant sur aC' une longueur $a\mathrm{D} = \mathrm{A}c = \frac{1}{2}jt^2$.

De même au bout d'un autre temps quelconque t', les chemins respectivement parcourus par le mobile et par la trajectoire seront :

$$\mathrm{A}c' = \frac{1}{2}jt'^2 \quad (3) \qquad \text{et } \mathrm{A}a' = \frac{1}{2}j't'^2 \qquad (4)$$

et le mobile se trouvera réellement en un point D' tel que :

$$a'\mathrm{D}' = \mathrm{A}c' = \frac{1}{2}jt'^2$$

Les deux triangles AcD et Ac'D' sont semblables comme ayant un angle égal compris entre deux côtés proportionnels. En effet, des relations 1 et 3, 2 et 4 on tire ;

$$\frac{\mathrm{A}c}{\mathrm{A}c'} = \frac{t^2}{t'^2} \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{A}a}{\mathrm{A}a'} = \frac{t^2}{t'^2}$$

On a aussi : $\mathrm{A}a = c\mathrm{D}$ et $\mathrm{A}a' = c'\mathrm{D}'$ et par suite :

$$\frac{\mathrm{A}c}{\mathrm{A}c'} = \frac{c\mathrm{D}}{c'\mathrm{D}'}$$

Par conséquent, les points D et D' se trouvent sur une même ligne droite qui est la diagonale du parallélogramme construit sur les chemins composants. De plus, le mouvement du mobile, sur cette trajectoire absolue, est uniformément accéléré, car les mêmes triangles donnent :

$$\frac{\mathrm{A}c}{\mathrm{A}c'} = \frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{AD}'} \quad \text{et par suite} \quad \frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{AD}'} = \frac{t^2}{t'^2}$$

Ayant supposé les mouvements sans vitesse initiale, l'espace parcouru pendant une seconde est égal à l'accélération, et en faisant $t=1''$ on a :

$$Ac=j;\quad Aa=j'\quad \text{et } AD=J$$

Donc, *l'accélération du mouvement absolu est égale à la diagonale du parallélogramme construit sur les accélérations relative et d'entraînement.*

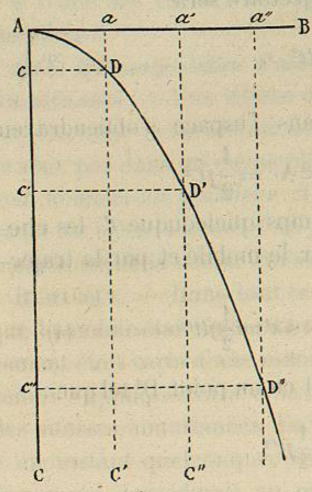

Fig. 204.

296. Composition de deux mouvements rectilignes dont l'un est uniforme et l'autre uniformément accéléré.

Considérons un mobile parcourant la trajectoire AC (*fig.* 204), d'un mouvement uniformément accéléré dont l'accélération est j, pendant que cette trajectoire se déplace, parallèlement à elle-même, d'un mouvement uniforme avec une vitesse v. Au bout d'un temps quelconque t, l'espace Ac parcouru par le mobile sur sa trajectoire est :

$$Ac=\frac{1}{2}jt^2$$

et l'espace parcouru par la trajectoire est :

$$Aa=vt$$

La position réelle du mobile dans l'espace sera le point D, sommet du parallélogramme construit sur les chemins composants Ac et Aa.

De même, au bout d'un autre temps quelconque t', les espaces parcourus par le mobile et par sa trajectoire seront respectivement :

$$Ac'=\frac{1}{2}jt'^2\quad \text{et}\quad Aa'=vt'$$

et le mobile se trouvera au sommet D' du parallélogramme construit sur ces deux chemins. En déterminant ainsi plusieurs

positions du mobile et en les joignant par un trait continu, on obtient la trajectoire absolue du mobile. Cette trajectoire est une parabole : en effet, nous avons :

$$\frac{Ac}{Ac'}=\frac{aD}{a'D'}=\frac{t^2}{t'^2}$$

et

$$\frac{cD}{c'D'}=\frac{Aa}{Aa'}=\frac{vt}{vt'}=\frac{t}{t'}$$

d'où :

$$\frac{\overline{cD}^2}{\overline{c'D'}^2}=\frac{\overline{Aa}^2}{\overline{Aa'}^2}=\frac{t^2}{t'^2}$$

et par suite :

$$\frac{aD}{a'D'}=\frac{\overline{Aa}^2}{\overline{Aa'}^2}$$

Donc, la courbe ADD', dont les ordonnées sont proportionnelles aux carrés des abscisses, est une parabole. CQFD.

297. Application de la composition des mouvements. Méthode de Roberval pour mener des tangentes aux courbes. — A la fin du dix-septième siècle, Roberval, célèbre géomètre, imagina une remarquable application de la composition des mouvements pour mener les tangentes à certaines courbes.

Toutes les fois qu'une courbe pourra être assimilée à la trajectoire d'un mouvement résultant, décrite par un mobile dont on connaît les mouvements composants, si l'on peut déterminer les vitesses de ces divers mouvements, ou simplement les rapports qui les lient entre elles, on obtiendra, par la composition de ces vitesses, la direction de la vitesse résultante. Or, si un mobile décrit une courbe quelconque, la direction de sa vitesse en un point est évidemment la tangente en ce point; donc, la direction de la vitesse résultante, obtenue par la composition des vitesses simultanées, donnera la direction de la tangente.

298. Tangente à l'ellipse. — L'ellipse est, comme on le sait, une courbe plane telle que la somme des distances d'un point quelconque à deux points fixes, appelés foyers, est constante.

La courbe peut être considérée, relativement au rayon vecteur AF (*fig.* 205), comme étant décrite par le point A glissant avec une vitesse V suivant la ligne AF, pendant que celle-ci tourne autour du point F avec une vitesse d'entraînement V'. La direction de la vitesse absolue étant celle de la tangente à la courbe, composons les deux vitesses simultanées V et V′. Soit AB la vitesse de glissement du point A sur le rayon vecteur AF ; si l'on connaissait la vitesse d'entraînement, en la portant sur la perpendiculaire BC élevée en B sur BF, et joignant le point ainsi obtenu au point A, on aurait, en grandeur et en direction, la vitesse résultante du point A, et par suite la tangente à l'ellipse en ce point.

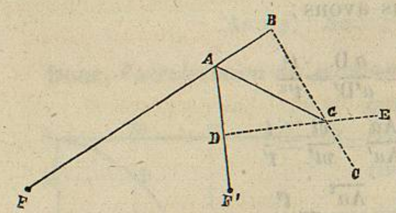

Fig. 205.

De même, la courbe peut être considérée, relativement au rayon vecteur AF′, comme étant décrite par le point A, glissant avec une vitesse V′ suivant la ligne AF′, pendant que celle-ci tourne autour du point F′ avec une vitesse d'entraînement V. La direction de la vitesse absolue étant celle de la tangente à la courbe, composons les deux vitesses simultanées V et V′. Soit $AD = AB$ (la somme des rayons vecteurs $AF + AF'$ étant constante) la vitesse de glissement du point A sur le rayon vecteur AF′ ; si l'on connaissait la vitesse d'entraînement autour du point A, en la portant sur la perpendiculaire DE élevée en D sur AF′ et joignant le point ainsi obtenu au point A, on aurait, en grandeur et en direction, la vitesse résultante de ce point A et par suite la tangente à l'ellipse en ce point. Mais la direction de cette vitesse devant se trouver à la fois sur les deux perpendiculaires BC et DE, se trouve à leur intersection G, et en joignant AG on aura la tangente à l'ellipse au point A.

Les triangles ADG et ABG étant égaux comme rectangles, l'un en B, l'autre en D, et ayant l'hypoténuse commune et un côté égal, il s'ensuit que l'angle $GAD = GAB$, ce qui montre que la ligne AG divise en deux parties égales l'angle formé par l'un des rayons vecteurs et le prolongement de l'autre, caractère distinctif de la tangente à l'ellipse.

299. Théorème. — *La vitesse de la projection d'un mobile est égale à la projection de la vitesse de ce mobile.* Supposons que l'on projette, sur un axe fixe donné, toutes les positions successives d'un mobile M animé d'une vitesse V, et imaginons un autre mobile fictif qui, se mouvant suivant cet axe, occuperait à chaque instant une position déterminée par la projection de M. La vitesse réelle V est liée à la vitesse de sa projection par une relation très simple ; en effet, la vitesse V peut être considérée comme étant la résultante de deux vitesses composantes, dont l'une serait perpendiculaire à l'axe, et dont l'autre serait parallèle à cet axe ; cette dernière est précisément la vitesse du mobile fictif ou la projection de la vitesse réelle V.

En désignant par α l'angle que fait l'axe avec la direction de V, on aura, pour l'expression de la vitesse projetée V′ :

$$V' = V \cos \alpha$$

Donc, *la vitesse de la projection est égale à la projection de la vitesse.*