toujours en croissant, les dents tendent au contraire à se dégager et cet inconvénient n'existe plus.

L'arc-boutement serait évité en supprimant le contact avant la ligne des centres, comme dans l'engrenage à lanterne, mais alors l'engrenage ne serait pas réciproque. Dans la construction actuelle, on fait généralement conduire d'une quantité égale au pas avant et après la ligne des centres, en donnant peu d'épaisseur aux dents et en augmentant leur largeur ; l'engrenage étant bien exécuté, les dangers de l'arc-boutement sont peu à craindre.

374. Coinçage. — On appelle *coinçage* l'effet qui se produit lorsque, dans un engrenage, les arbres conducteur et conduit ne sont pas exactement parallèles, ou que les plans des roues ne sont pas perpendiculaires aux axes des arbres ; dans ces deux cas, le contact n'a plus lieu suivant une génératrice, et du côté où les plans des roues forment un angle aigu, la surface limitant extérieurement la dent vient s'appliquer fortement contre la surface limitant intérieurement le creux correspondant ; il en résulte un frottement considérable qui peut même arrêter le mouvement. Pour éviter le coinçage, il suffit d'opérer convenablement le montage des arbres et des roues.

375. Axes concourants. — Cônes de friction. — Lorsque les axes se rencontrent sous un certain angle, si l'effort à transmettre n'est pas considérable, on peut opérer la transmission par simple adhérence. Soient O et O′ (*fig.* 248) les axes qui se rencontrent au point S ; menons, dans l'angle OSO′, une droite quelconque SA ; cette droite, entraînée par la rotation de l'axe O, engendre un cône droit SAB à base circulaire, et la même droite, en tournant autour de l'axe O′, engendre le cône SAB′. Ces deux cônes se touchent suivant la génératrice SA, et s'ils sont suffisamment pressés l'un contre l'autre, le cône moteur fera tourner le cône conduit sans qu'il y ait le moindre glissement. Appelons ω et ω′ les vitesses angulaires des axes O et O′, R et R′

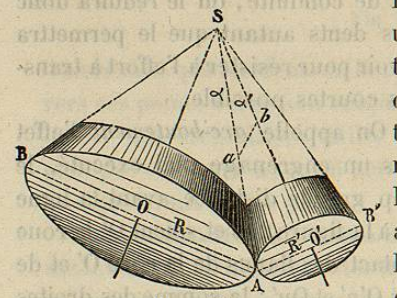

Fig. 248.

les rayons des circonférences de base des cônes respectifs ; la vitesse linéaire au point A sera ωR sur la circonférence O, et ω′R′ sur la circonférence O′. Le glissement étant supposé nul, ces deux vitesses linéaires sont égales, et l'on a :

$$\omega R = \omega' R' \quad \text{d'où} \quad \frac{\omega}{\omega'} = \frac{R'}{R} \qquad (1)$$

ce qui montre que les vitesses angulaires des axes sont en raison inverse des rayons des sections droites des cônes, faites par un même point de la génératrice de contact, ou, en d'autres termes, *que le mouvement est transmis avec rapport constant de vitesses angulaires.*

Les triangles SOA, SO′A sont rectangles et donnent :

$$R = SA \sin\alpha \quad \text{et} \quad R' = SA \sin\alpha'$$

d'où :
$$\frac{R}{R'} = \frac{SA \sin\alpha}{SA \sin\alpha'} = \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'}$$

Remplaçant dans la relation (1) il vient :

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{\sin\alpha'}{\sin\alpha}$$

Cette relation permet de trouver la direction de la droite SA lorsqu'on connaît le rapport des vitesses angulaires. En effet, par un point quelconque b de l'axe O′ menons ba parallèle à l'axe O ; dans le triangle Sab, les côtés étant proportionnels aux sinus des angles opposés, on a :

$$\frac{ab}{\sin\alpha'} = \frac{Sb}{\sin\alpha} \quad \text{d'où} \quad \frac{ab}{Sb} = \frac{\sin\alpha'}{\sin\alpha} = \frac{\omega}{\omega'}$$

Donc, si l'on prend sur l'axe O′ une longueur Sb représentant la vitesse angulaire ω′ et si par le point b on mène à l'axe O une parallèle ba représentant la vitesse ω, la droite SaA sera la génératrice de contact des deux cônes qui se conduiront dans le rapport donné de vitesses angulaires.

Dans la pratique, on n'emploie jamais les cônes entiers, et l'on se contente de deux troncs de cône de faible hauteur.

376. Engrenages coniques. — Les cônes de friction sont très peu employés, car il arrive rarement que la simple adhérence suffise pour transmettre et assurer le mouvement. On les remplace par des troncs de cône dont les surfaces en contact sont armées de saillies et de creux, comme on remplace les cylindres de friction par des roues dentées. On constitue ains les *engrenages coniques* nommés aussi *roues d'angles.*

Le problème qu'on se propose ici est le même que pour les engrenages cylindriques, c'est-à-dire de trouver quelle est la forme à donner aux dents pour que le mouvement ait lieu comme si les cônes se conduisaient par simple contact. La solution théorique de ce problème rentre dans le domaine de la géométrie de la sphère, et n'est jamais employée dans la pratique à cause de la difficulté qu'offre le tracé des courbes sphériques. On leur substitue la méthode approximative due à Tredgold, et qui repose sur ce que les dents étant toujours petites, le contact s'éloigne peu du plan des axes et des cônes primitifs, et l'on peut remplacer les lignes sphériques par des courbes tracées sur des surfaces coniques qui, comme on le sait, jouissent de la propriété d'être développables sur un plan.

377. Tracé pratique des engrenages coniques. — Soient SO et SO′ (*fig.* 249) les axes, et SAA_1, SAA'_1 les deux cônes se conduisant dans le rapport donné de vitesses angulaires et se touchant suivant la génératrice SA. Portons, sur cette génératrice, une longueur Aa', égale à la largeur des dents dans le sens des cônes ; les troncs de cône $Aa'a_1A_1$ et $Aa'aA'_1$ ainsi obtenus constitueront les cônes primitifs servant de base au tracé des engrenages coniques. Menons, par le point A et dans le plan de la figure, une perpendiculaire OO′ à la génératrice de contact ; cette droite rencontrera les axes aux points O et O′. Cela fait, prenons les points O et O′ pour sommets de deux nouveaux cônes OAA_1, $O'AA'_1$, respectivement opposés par la base aux cônes primitifs ; ces nouveaux cônes s'appellent les *cônes de tête extérieurs.* Dans la rotation du système autour des axes SO et SO′, les circonférences de base AA_1, AA'_1 sont toujours tangentes au point A, et les cônes OAA_1, $O'AA'_1$ ne cessent pas d'avoir une génératrice commune suivant OO′ ; ces cônes ont donc un plan tangent passant par OO′ et perpendiculaire au plan de la figure. Si on admet que les surfaces des deux cônes de tête aient une petite étendue commune de chaque côté de la génératrice de contact OO′, et si les courbes des dents qui viennent successivement passer dans le plan tangent sont assez petites pour être

comprises dans cette étendue commune, on voit que ces deux cônes se transmettront le mouvement comme si les cercles de base, tangents en A, étaient armés d'un engrenage plan. Donc, en développant, dans le plan tangent, les surfaces coniques des deux cônes OAA_1, $O'AA'_1$, qui se transforment en deux secteurs circulaires tangents en A, et en déterminant, sur ces secteurs, un engrenage plan par l'un quelconque des tracés que nous avons étudiés, on obtiendra les patrons qui, appliqués sur les cônes respectifs, fourniront les profils des dents des roues

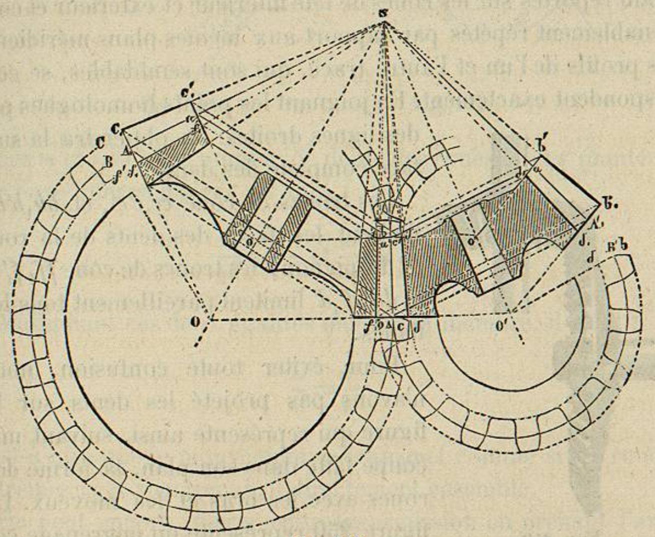

Fig. 249.

d'angles, du côté opposé au sommet, ou ce qu'on appelle *la directrice de la surface des dents.*

Rabattons maintenant, dans le plan de la figure, les surfaces coniques développées dans le plan tangent. Pour obtenir les secteurs circulaires correspondants, des points O et O′ avec des rayons OA et O′A, décrivons des arcs que l'on prendra égaux aux longueurs des circonférences de base AA_1, AA'_1 développées. Sur ces arcs AB, AB′, considérés comme des circonférences primitives, traçons un engrenage plan quelconque, à flancs, par exemple, en remarquant que le pas doit diviser exactement les arcs AB et AB′. Ces engrenages plans ayant été tracés sur des feuilles minces de tôle ou de carton, appliquons ces feuilles sur leurs cônes de tête respectifs. Une droite, passant constamment par le sommet S et assujettie à se mouvoir sur le profil des dents comme directrice, engendrera la surface conique des dents et le tracé sera terminé.

En pratique, le sommet S n'existe pas pour aider à l'exécution des dents ; on le remplace par une seconde directrice tracée sur une autre surface conique oaa_1, $o'aa'$, parallèle à la surface conique qui contient la première directrice ; cette nouvelle surface porte le nom de *cône de tête intérieur*. Les deux tracés étant reportés sur les cônes de tête intérieur et extérieur et convenablement répétés par rapport aux mêmes plans méridiens, les profils de l'un et l'autre tracé, qui sont semblables, se correspondent exactement. En joignant les points homologues par des lignes droites, on obtiendra la surface complète des dents.

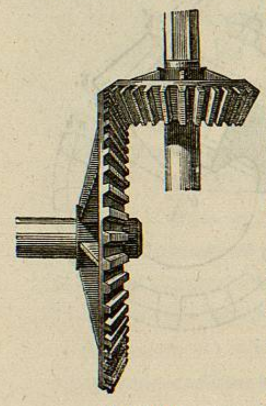

Fig. 250.

Les troncs de cône $cc_1c'c'_1$ et $bb_1b'b'_1$ limitent les faces des dents de la roue et du pignon ; les troncs de cône $ff_1f'_1f'$ et $dd_1d'_1d'$ limitent pareillement tous les flancs.

Pour éviter toute confusion, nous n'avons pas projeté les dents sur la figure qui représente ainsi, suivant une coupe faite dans son plan, la forme des roues avec les bras et les moyeux. La figure 250 représente un engrenage conique monté sur deux axes se rencontrant à angle droit.

Remarque. — Les engrenages coniques peuvent être aussi à alluchons, et la construction de ces roues est analogue à celle des engrenages cylindriques à alluchons décrite (**361**).

378. Axes dirigés d'une manière quelconque. — Soient O et O' (*fig.* 251) des axes non concourants et non parallèles, entre lesquels on veut établir une transmission avec rapport constant de vitesses vulgaires. Prenons un axe intermédiaire AB rencontrant les axes donnés aux points A et B ; on peut toujours, pour simplifier, faire l'un des angles OAB ou O'BA droit. Montons, sur ces trois axes, deux engrenages coniques, l'un ayant son sommet en A et l'autre en B. La transmission entre les axes O et O' sera assurée et, de plus, elle aura lieu avec rapport constant de vitesses angulaires. Ordinairement, on donne aux deux roues auxiliaires m' et s' un même nombre de dents et alors ce nombre est indifférent. En effet, soient ω, ω', ω'' les vitesses angulaires des axes O, O' et AB, n et n' les nombres de dents des

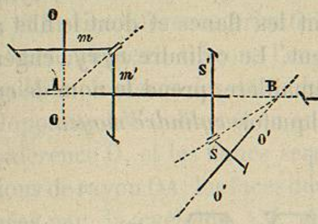

Fig. 251.

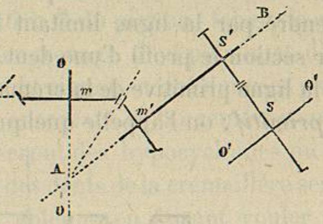

Fig. 252.

roues m et s, et n'' le nombre de dents des roues m' et s' montées sur l'axe intermédiaire ; on aura :

$$\frac{\omega}{\omega''}=\frac{n''}{n} \quad \text{et} \quad \frac{\omega''}{\omega'}=\frac{n'}{n''}$$

Multipliant ces deux égalités membre à membre, il vient :

$$\frac{\omega}{\omega'}=\frac{n'}{n}$$

c'est-à-dire que le mouvement se transmet comme si les roues extrêmes m et s engrenaient directement ensemble.

On peut encore opérer cette transmission en prenant l'axe intermédiaire AB (*fig.* 252), parallèle à l'un des axes donnés, et le deuxième engrenage serait cylindrique. En adoptant les mêmes notations que ci-dessus, on verrait que ce nouveau système jouit des mêmes propriétés que le premier.

379. Cas particulier. — Vis sans fin. — Dans le cas particulier où les axes sont situés dans des plans perpendiculaires, on emploie une vis, appelée *vis sans fin*, formée de quelques filets, engrenant avec un pignon qui généralement est conduit par la vis.

380. Principe. — Imaginons que l'on ait tracé (*fig.* 253) l'engrenage d'un pignon et d'une crémaillère, dans le plan passant par l'axe moteur O'O' perpendiculaire à l'axe O, de telle sorte que la ligne primitive xy de la crémaillère soit parallèle à O′O′. Si l'on fait tourner le profil de la crémaillère jusqu'à ce que celle-ci ait accompli une révolution entière pendant qu'elle s'est déplacée, de droite à gauche, d'une quantité égale au pas, les profils des dents décriront, dans ce mouvement de rotation, des surfaces héliçoïdales et la crémaillère sera transformée en une vis de même pas, dont le noyau sera le cylindre engendré par la ligne limitant les flancs et dont le filet aura pour section le profil d'une dent. Le cylindre $xyxy$, engendré par la ligne primitive de la crémaillère, prend le nom de *cylindre primitif;* on l'appelle quelquefois *cylindre moyen.*

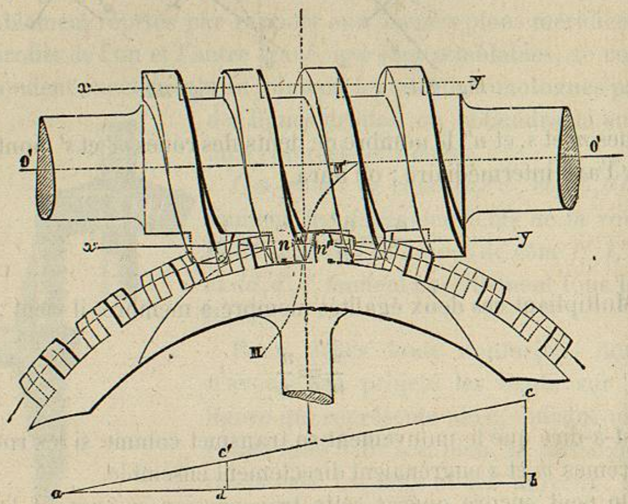

Fig. 253.

Supposons maintenant que le pignon soit sans épaisseur dans le sens de son axe O, et que la vis, maintenue latéralement, ne puisse prendre qu'un mouvement de rotation. Dans ce mouvement, les sections du filet qui viennent successivement se mettre en contact avec les dents du pignon, c'est-à-dire qui passent dans le plan de la figure, sont toujours égales et ont même profil, mais elles se déplacent graduellement et parallèlement à elles-mêmes dans le sens de l'axe O′O′ ; ces sections joueront donc, par rapport à la roue, le rôle des dents d'une crémaillère sans fin se mouvant en translation. Il résulte de là que les dents du pignon sont poussées et forcées de se déplacer ; or la roue ne pouvant se mouvoir qu'autour de son axe, celui-ci prendra

un mouvement de rotation. Tel est le principe de la vis sans fin.

381. Tracé pratique. — Le pas de la vis ayant été déterminé par la résistance des matériaux, d'après l'effort à transmettre, et le rayon du pignon, d'après le rapport des vitesses angulaires, on obtiendra la génératrice xy du cylindre primitif de la vis et la circonférence primitive O du pignon, tangente en A à xy. Actuellement, traçons l'engrenage d'un pignon et d'une crémaillère ; les faces des dents du pignon seront données par la développante AM′, obtenue en enroulant la tangente Ay sur la circonférence O, et les flancs seront des hypocycloïdes ou des portions de rayon OA; les faces des dents de la crémaillère seront données par la cycloïde AM, obtenue en faisant rouler une circonférence de rayon $\frac{OA}{2}$ sur la droite xy, et les flancs seront des droites perpendiculaires à xy. Les faces et les flancs seront limités à la manière ordinaire.

Ceci posé, le filet de la vis s'obtiendra en enroulant la section plane d'une des dents de la crémaillère autour du cylindre primitif, ayant pour axe O′O′, de telle sorte que tous les points de cette section décriront des hélices de même pas égal au pas donné, et l'engrenage serait terminé si le pignon était sans épaisseur. Mais cette roue devant avoir, dans le sens de son axe O, une largeur égale à 4 ou 5 fois l'épaisseur de la dent, les faces latérales de cette dent, qui ont pour profils des développantes de cercle, doivent avoir, pour que la transmission soit possible, une certaine obliquité déterminée par l'inclinaison des filets de la vis. Pour obtenir cette obliquité, développons, sur un plan, la circonférence de base du cylindre primitif, en ba; en b élevons une perpendiculaire bc égale au pas, et joignons le point a au point c; portons sur ab une longueur ad égale à la largeur de la roue, et en d élevons la perpendiculaire dc'. Cette longueur dc' donne l'inclinaison totale des dents de la roue par rapport à son axe : si donc nous portons de chaque côté de la génératrice projetée en A, la moitié de dc', à gauche sur la face antérieure et à droite sur la face postérieure, la droite qui joindra les deux points n et n' ainsi obtenus donnera l'inclinaison des dents de la roue.

Dans la plupart des cas, l'inclinaison du filet de la vis n'est pas très grande et l'engrenage n'est pas réciproque ; cette propriété est utilisée, en pratique, dans les manœuvres de vannes et dans les appareils à élever les matériaux, car, si pour une cause quelconque la puissance devient trop faible, la résistance qui agit sur l'axe de la roue ne peut pas entraîner cette roue et le mouvement devient impossible. Il faut, pour qu'il y ait réciprocité, que l'inclinaison des filets de la vis soit au moins égale à 45°.

Les vis sans fin peuvent être à un, deux, trois..... filets ; dans tous les cas, le pas de la roue est égal au pas de la vis divisé par le nombre de filets.

Lorsque la vis est à un seul filet, pour un tour de la vis, le pignon tourne d'une dent ; on aura donc, en désignant par ω et ω' les vitesses angulaires du pignon et de la vis et par n le nombre de dents du pignon :

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{1}{n}$$

La vis étant à plusieurs filets, en désignant par n' ce nombre de filets, on aura :

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{n'}{n}$$

c'est-à-dire que *le rapport des vitesses angulaires du pignon et de la vis est égal au nombre de filets de la vis divisé par le nombre de dents du pignon.*

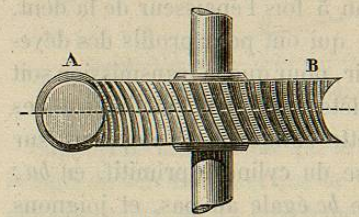

Fig. 254.

382. Vis tangente. — On appelle *vis tangente* (*fig.* 254) une vis sans fin A dans laquelle le pignon B est limité, extérieurement, sur son pourtour, par une surface courbe concentrique à la vis, au lieu d'affecter la forme ordinaire d'une surface cylindrique droite.

Si nous admettons que l'on mène une série de plans infiniment rapprochés, perpendiculairement à l'axe du pignon, ces plans couperont le filet de la vis suivant un profil représenté par une dent de crémaillère fictive, dont on pourra déterminer le profil correspondant sur le pignon. Une série de profils étant ainsi obtenus, par ces diverses sections planes, la réunion de

ces profils successifs fournira la surface gauche de la dent qui engrènera avec celle de la vis.

Les dents du pignon sont ainsi, sur toute leur longueur, en contact avec celles de la vis tangente ; aussi cette dernière est-elle employée dans les appareils de précision, car l'usure est beaucoup moins rapide que pour la vis sans fin ordinaire, où le contact n'a lieu qu'en un seul point. Pour la même raison, on doit l'adapter à certains appareils d'enlevage, pour assurer toute sécurité lorsque le fardeau reste suspendu, car l'engrenage d'une vis sans fin ordinaire et d'un pignon peut devenir réciproque, par suite d'un jeu trop grand et sous l'influence d'une charge, bien que l'inclinaison des filets soit moindre de 45°.

383. Engrenage héliçoïdal sans glissement. — Nous avons vu (**372**) que pour diminuer le glissement dans les engrenages il convient de diminuer le pas et la hauteur des dents. Or, dans les engrenages plans que nous avons examinés, la diminution est limitée par l'épaisseur que doivent avoir les dents pour résister à l'effort à transmettre; par suite aussi, on ne peut diminuer la hauteur des dents sans limiter l'arc de conduite.

Supposons maintenant que l'on ait divisé les roues, dans leur

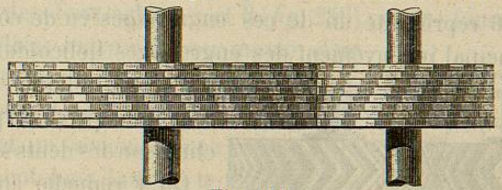
Fig. 255.

largeur, en plusieurs tranches par des plans équidistants perpendiculaires à l'axe et que l'on ait fait tourner ces tranches d'un certain angle à droite pour l'une, à gauche pour l'autre, de manière à ce que les dents s'échelonnent comme le montre la figure 255. On aura ainsi diminué le pas considérablement et la hauteur des dents pourra également être réduite sans diminuer la conduite, car lorsque deux roues ainsi disposées engrèneront, le contact aura lieu d'abord sur la première tranche; quand les roues auront tourné d'un certain angle le contact passera à la seconde tranche, puis à la troisième et ainsi de suite jusqu'à la dernière à mesure que les roues tourneront. En opérant ainsi nous avons augmenté le nombre des dents, nous avons réduit leur hauteur et par conséquent nous avons diminué le glissement. Si nous concevons les roues divisées en un nombre infini de tranches ayant tourné d'un angle infiniment petit les unes par rapport aux autres, les dents formeront une surface continue inclinée par rapport à l'axe; le contact aura lieu par un seul point qui passera d'un plan au suivant au moindre mouvement de rotation et ce contact aura constamment lieu sur la ligne primitive; dès lors le glissement sera complètement supprimé.

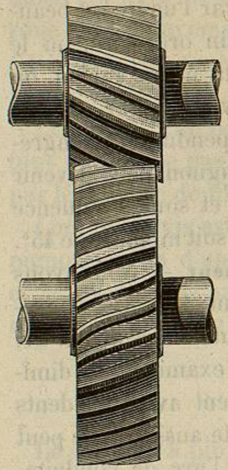

Fig. 256.

On construit ces engrenages en faisant la surface des dents hélicoïde. On trace l'hélice primitive sur le cylindre primitif de la roue et on donne aux dents une faible hauteur.

Ces engrenages, imaginés par Hooke vers 1670, et délaissés pendant longtemps, furent repris par White qui les réinventa pour ainsi dire en 1808. La figure 256 représente un de ces engrenages vu de côté.

Le principal inconvénient des engrenages hélicoïdaux est la pression oblique sur les tourillons produite par l'inclinaison des dents sur l'axe.

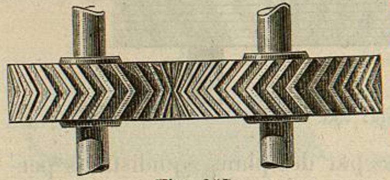

Fig. 257.

On y remédie en taillant les dents comme le représente la figure 257, c'est-à-dire comme si deux roues égales, taillées en sens inverse, étaient accolées l'une à l'autre.

On construit également des roues à dents quatre fois inclinées (*fig.* 258) que l'on appelle *roues à chevron*.

Les engrenages hélicoïdaux sont en grande faveur dans un certain nombre de machines fonctionnant à grande vitesse; la transmission est mieux assurée, fonctionne sans bruit et l'usure des dents est plus régulière.

Si l'effort à transmettre est assez considérable, on garnit les jantes des roues de couronnes en acier doux dans lesquelles on taille les dents; ces couronnes sont rapportées à chaud et fixées

avec des goujons sur la jante en fonte préalablement tournée

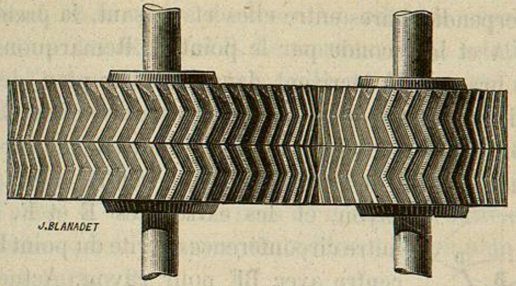

Fig. 258.

à un diamètre légèrement supérieur au diamètre intérieur de la couronne.

§ 5. — JOINTS.

384. Joint de Oldham. — Pour établir une transmission directe entre deux arbres parallèles situés à une faible distance, on peut employer, outre les engrenages cylindriques, un organe connu sous le nom de *joint de Oldham*.

On réalise cette transformation de mouvement en terminant les bouts des deux arbres A et B (*fig.* 259) par les fourchettes F et F′, reliées entre elles au moyen d'un croisillon formé de deux tiges cylindriques *aa*, *bb*, dont les axes sont perpendiculaires et qui peuvent s'engager et glisser à frottement doux dans les trous *a*, *a*, *b*, *b*, appelés *œilletons*, pratiqués aux extrémités des branches des fourches F et F′. Ce croisillon peut ainsi glisser dans le sens des bras *aa*, *bb*, en restant dans un même plan perpendiculaire aux arbres. En communiquant le mouvement à l'arbre A, la fourche F sera entraînée, et par suite, la fourche F′ et l'axe B entreront en mouvement et les deux arbres seront rendus complètement solidaires si, comme nous l'avons supposé, les extrémités des croisillons glissent dans les œilletons des fourches des arbres.

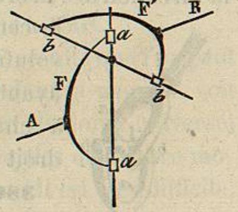

Fig. 259.

385. Rapport des vitesses angulaires. — Soient A et B (*fig.* 260) les projections des axes sur un plan vertical; les projections des fourches se confondront avec les projections