

## § 9. — PARALLÉLOGRAMMES ARTICULÉS

**416. Parallélogramme de Watt.** — Dans les machines à vapeur à axe vertical, dites *machines à balancier*, le mouvement rectiligne alternatif du piston n'est pas communiqué directement à l'arbre moteur au moyen d'une bielle et d'une manivelle. La tige du piston, après sa sortie du cylindre, vient s'articuler à un organe spécial lié lui-même à l'une des extrémités d'un levier du premier genre, appelé *balancier*, mobile autour d'un axe horizontal passant en son milieu; à son autre extrémité est articulée une bielle qui, par l'intermédiaire d'une manivelle, transmet le mouvement à l'arbre moteur. Le mouvement rectiligne alternatif de la tige du piston est donc transformé d'abord en un mouvement circulaire alternatif du balancier, et ce mouvement circulaire alternatif est, à son tour, transformé en un mouvement circulaire continu par bielle et manivelle.

Si la tige du piston était articulée directement au balancier, pendant chaque oscillation de celui-ci, elle serait sollicitée à décrire un arc de cercle, et, par suite, elle serait soumise à des efforts obliques qui tendraient à la briser et à produire des fuites de vapeur. Pour remédier à cet inconvénient, le célèbre James Watt imagina d'interposer, entre le balancier et la tige du piston, un parallélogramme articulé portant le nom de son inventeur et qui transforme, sans effort pour la tige, le mouvement de celle-ci en un mouvement circulaire alternatif du balancier.

**417. Principe du parallélogramme de Watt.** — Soient OA (fig. 285) un demi-balancier mobile autour d'un axe horizontal projeté en O, et AB une bielle ou *bride*, reliant le point A à l'extrémité B d'une barre O'B appelée *contre-balancier*, pouvant osciller librement autour d'un axe horizontal projeté en O'. Dans le mouvement que prendront ces trois tiges de longueur constante, les points A et B décriront des arcs de cercle dont les centres sont respectivement situés en O et O', et le point C, milieu de la bride dont les extrémités A et B sont assujetties à se mouvoir sur les arcs de cercle OA, O'B, décrira une courbe que nous allons déterminer. Pour cela, considérons deux positions différentes *a* et *a'* de l'extrémité du balancier, situées sur la circonférence de centre O; les positions correspondantes du

point B, appartenant au contre-balancier O'B, s'obtiendront en décrivant des points *a* et *a'* comme centres, avec la longueur invariable de la bride pour rayon, des arcs de cercle qui couperont la circonférence de centre O' en des points *b* et *b'* tels qu'en les joignant aux points *a* et *a'*, les droites *ab*, *a'b'*, seront les positions correspondantes de la bride. En prenant le milieu de chacune de ces droites, on obtiendra deux points *c* et *c'* de la courbe cherchée, et en opérant de la même manière pour un nombre suffisant de positions différentes du système, on obtiendra des points qui, en les joignant par un trait continu, fourniront le lieu géométrique du point C.

**418.** Les sommets de la courbe se détermineront de la manière suivante : du point C, milieu de la bride correspondant à la position horizontale du balancier, décrivons avec un rayon égal à la demi-longueur de cette bride, une circonférence qui coupe la ligne OO' en deux points D et E; en chacun de ces points élevons deux perpendiculaires à OO' limitées en F, F', G, G', intersections de ces droites avec les trajectoires décrites par les points A et B. En joignant les points F et G, F' et G', puis prenant les milieux H et H' de ces droites, on obtiendra les sommets H et H' de la courbe, qui ont pour tangentes les droites FG et F'G' parallèles à OO'. Les positions extrêmes du balancier et du contre-balancier seront données par la position de l'un ou de l'autre levier placé dans le prolongement de la bride. Si du point O' avec un rayon O'B + BA nous décrivons un arc de cercle coupant la circonférence OA en K, la bride et le contre-balancier se trouveront en ligne droite. La position OK du ba-

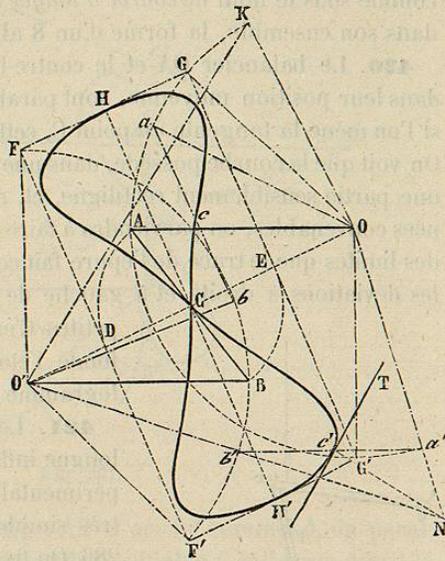


Fig. 285.

lancier est sa position extrême supérieure, et il y en a une autre inférieure; il en est de même pour le contre-balancier.

**419.** Pour mener la tangente en un point quelconque  $c'$  de la courbe, considérons la position  $Oa'b'O'$  du système, qui détermine ce point, et prolongeons les directions  $Oa', O'b'$  jusqu'à leur point de rencontre  $N$ . Ce point sera un centre instantané de rotation, et la droite  $Nc'$  sera la normale à la courbe en  $c'$ ; par suite, la tangente s'obtiendra en élevant la perpendiculaire  $Tc'$  à cette normale.

La courbe décrite par le point  $C$ , milieu de la bride, est connue sous le nom de *courbe à longue inflexion*; elle présente, dans son ensemble, la forme d'un 8 allongé.

**420.** Le balancier  $OA$  et le contre-balancier  $O'B$  étant pris dans leur position moyenne, sont parallèles et horizontaux, et si l'on mène la tangente au point  $C$ , cette tangente est verticale. On voit que la courbe possède, dans une portion de son étendue, une partie sensiblement rectiligne, et, en choisissant des données convenables, on parviendra à faire décrire au point  $C$ , dans des limites que le tracé de l'épure fait connaître, une ligne dont les déviations à droite et à gauche de la verticale seront très petites. C'est sur ce principe qu'est fondé l'établissement du parallélogramme articulé de Watt.

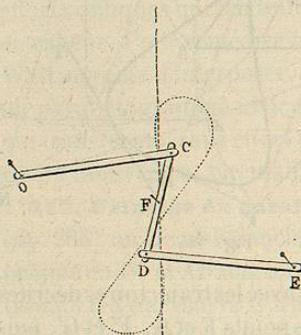


Fig. 286.

ou un morceau de craie. Si l'on fait osciller l'un des leviers  $OC$  autour de son axe  $O$ , le levier  $ED$  tournera autour du point  $E$ , et le crayon ou le morceau de craie tracera, sur le tableau noir, la courbe cherchée.

**422. Disposition du parallélogramme de Watt.** — En

s'appuyant sur le principe précédent et dans le but de diminuer la place occupée par le contre-balancier, Watt réalisa son ingénieuse idée en imaginant la disposition suivante (*fig. 287*); prolongeons le balancier  $OA$  d'une longueur quelconque  $Aa$ ; par le point  $a$  menons la droite  $ab$  parallèle à la bride  $AB$ , et achevons le parallélogramme  $AabB$ ; celui-ci étant supposé articulé à ses quatre sommets et le balancier  $OA$  oscillant autour du point  $O$ , le système mobile se déformera à chaque instant et les points  $b, C, O$  resteront toujours en ligne droite à cause du

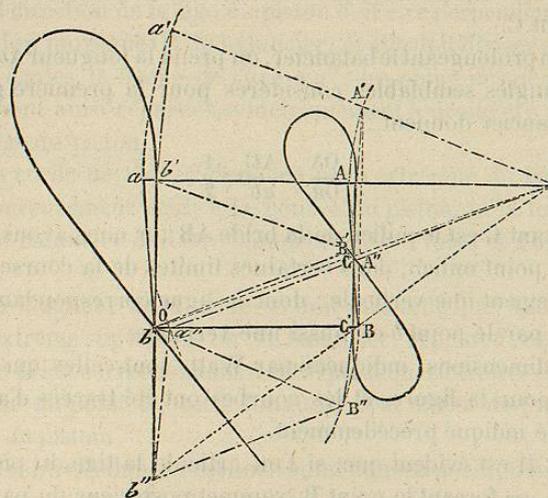


Fig. 287.

parallélisme forcé des brides  $AB$  et  $ab$ . Le sommet  $b$ , du parallélogramme, décrira une courbe semblable à celle que décrit le point  $C$ ; en effet, les brides étant toujours parallèles, les triangles tels que  $OAC$ ,  $Oab$  restent semblables entre eux dans toutes les positions que prend le balancier. Soit  $Oa''$  une autre position du balancier déterminant la position  $A''a''b''B''$  du parallélogramme articulé, et joignons  $Ob''$ ; le point  $C$  sera venu en  $C'$ , intersection de  $Ob''$  avec  $A''B''$ . Les triangles semblables  $OAC$  et  $Oab$  donnent, pour la première position du balancier :

$$\frac{OA}{Oa} = \frac{OC}{Ob} \quad (1)$$

Dans la deuxième position, on a les triangles  $OA''C'$  et  $Oa''b''$ ,

qui donnent également, en remarquant que les longueurs  $OA$  et  $Oa$  restent constantes,

$$\frac{OA}{Oa} = \frac{OC'}{Ob''}; \text{ et par suite on a : } \frac{OC}{Ob} = \frac{OC'}{Ob''}.$$

Joignons maintenant le point  $C$  au point  $C'$  et le point  $b$  au point  $b''$ ; les triangles  $OCC'$  et  $Obb''$  sont semblables, puisqu'ils fournissent la relation ci-dessus, et les droites  $CC'$  et  $bb''$  sont parallèles. Il résulte de là que la trajectoire décrite par le sommet antérieur  $b$  du parallélogramme est semblable à la trajectoire du point  $C$ .

Si, en prolongeant le balancier, on prend la longueur  $Aa = OA$ , les triangles semblables considérés pour la première position du balancier donnent :

$$\frac{OA}{Oa} = \frac{AC}{ab} = \frac{1}{2}$$

et le point  $C$  est le milieu de la bride  $AB$ ; or nous avons prouvé que ce point milieu, dans certaines limites de la course, décrit sensiblement une verticale; donc la ligne correspondante parcourue par le point  $b$  est aussi une verticale.

Ces dimensions, indiquées par Watt, sont celles qui ont été prises pour la figure, et les courbes ont été tracées d'après le procédé indiqué précédemment.

**423.** Il est évident que, si l'on articule la tige du piston au point  $b$ , en forçant le point  $B$ , sommet postérieur du parallélogramme, à décrire un arc de cercle, cette tige sera guidée verticalement; déterminons donc le centre de cet arc de cercle, point d'articulation du contre-balancier. Soit  $b'b''$  la ligne verticale à faire parcourir, d'un mouvement rectiligne alternatif, au point  $b$ , sommet antérieur du parallélogramme. Traçons les parallélogrammes articulés correspondant aux trois positions moyenne et extrêmes du balancier, sachant que le sommet antérieur doit constamment s'appuyer sur la verticale  $b'b''$ ; nous obtiendrons ainsi les positions  $B, B', B''$  du sommet postérieur. En faisant passer une circonférence par ces trois points, on aura le point  $O'$  articulation du contre-balancier et la longueur  $O'B$  de celui-ci. Dans la position moyenne du balancier, le centre  $O'$  se confond, en projection verticale, avec le sommet  $b$  du parallélogramme.

**424. Proportions données par Watt.** — Afin de réduire au minimum les déviations de la tige du piston sur la verticale, voici les données que Watt employait pour la construction de son parallélogramme et qui sont sanctionnées par l'expérience; elles nous ont servi dans le tracé de la figure précédente :

1° L'horizontale  $Oa$  doit partager en deux parties égales l'arc  $a'a''$  décrit par l'extrémité du balancier, et l'angle  $a'Oa'' = aOa''$ , qui ne doit pas être supérieur à  $30^\circ$ , est pris ordinairement égal à  $19^\circ$  environ.

2° La direction de la tige du piston doit être perpendiculaire à la position moyenne  $Oa$  du balancier, et elle doit diviser en deux parties égales la flèche de l'arc  $a'a''$ ; les obliquités des brides se trouvent ainsi réparties symétriquement à droite et à gauche de la tige du piston.

3° La corde de l'arc  $a'a''$  décrit par l'extrémité du balancier est rigoureusement égale à la course du piston, et la longueur du demi-balancier doit être comprise entre 1 fois  $\frac{1}{2}$  et 2 fois cette course.

4° La longueur de la bride  $ab$  doit être telle que, dans la position extrême supérieure  $Oa'$  du balancier, le point  $b'$ , extrémité de cette bride correspondant à cette position, se trouve sur l'horizontale du point  $O$ ; cette longueur peut varier de  $\frac{1}{2}$  à  $\frac{3}{4}$  de la course du piston.

5° Le contre-balancier est horizontal dans sa position moyenne  $O'B$ , et son extrémité  $B$  se trouve sur le prolongement de la corde  $A'A''$ .

**425. Établissement du parallélogramme de Watt.** — La réalisation matérielle du parallélogramme de Watt est représentée figure 288. Le balancier  $OA$ , mobile autour de l'axe horizontal  $O$ , est à section rectangulaire renforcée par des nervures, et il a la forme parabolique ou d'égale résistance. Le système mobile qui doit relier l'extrémité  $A$  du levier  $OA$  à la tige du piston est double, les deux parallélogrammes étant placés de chaque côté du balancier. Aux tourillons  $A$  sont suspendues deux bielles projetées en  $AB$ , reliées entre elles par un axe horizontal  $B$  au milieu duquel est articulée la tige du piston; le tourillon  $C$ , placé au milieu de  $OA$ , porte également deux bielles  $CD = AB$ , reliées aux premières par deux barres  $BD$ . Les points milieux projetés en  $F$ , des bielles  $CD$ , décrivent une ligne paral-



placer le système de Watt par d'autres dispositions plus parfaites, et M. Peaucellier, actuellement général du génie, imagina, en 1864, une combinaison de leviers articulés qui résout mathématiquement et rigoureusement le problème.

**429. Principe du losange de Peaucellier.** — Si l'on prend trois points E, B, D (fig. 290) en ligne droite et qu'on les jointe à deux autres points A, C, situés à des distances égales des points B et D, par des bielles ou brides, le système articulé ainsi formé jouit des propriétés suivantes :

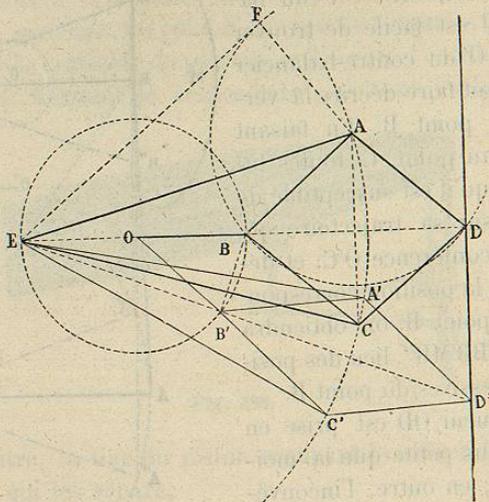


Fig. 290.

1° Quelles que soient les déformations de l'appareil, les trois points EBD restent toujours en ligne droite.

2° Le produit des distances des points B et D au point E est constant.

La simple inspection de la figure montre la première de ces propriétés; en effet, le triangle AEC étant isocèle, la perpendiculaire abaissée du sommet E divisera la base AC en deux parties égales et se confondra, par suite, avec la diagonale BD du losange ABCD.

Pour démontrer la seconde propriété de ce système, du point A comme centre, avec  $AB = AD$  comme rayon, décrivons la circonférence DBF et menons la tangente EF. La

droite ED est une sécante, et la tangente étant, comme on le sait, une moyenne proportionnelle entre la sécante entière et sa partie extérieure, on a :

$$ED \times EB = EF^2$$

Or, le triangle rectangle AFE donne :

$$EA^2 - AF^2 = EF^2$$

et, en remplaçant AF par son égale AD, on en déduit :

$$ED \times EB = EA^2 - AD^2$$

Les longueurs EA et AD étant invariables, le produit  $ED \times EB$  est constant.

**430. Premier cas.** — Si dans un pareil système on fixe le point E et qu'on relie, par une bielle, le sommet B, dans la position moyenne du losange, au point O situé au milieu de EB, de manière à faire décrire à ce sommet B une circonférence passant par le point E, le sommet D, dans ses différentes positions, décrira une ligne droite perpendiculaire à la direction EO.

En effet, considérons le losange dans une autre position quelconque A'B'C'D'; nous aurons, comme précédemment :

$$ED' \times EB' = EA'^2 - A'D'^2 = EA^2 - AD^2$$

et par suite :

$$ED' \times EB' = ED \times EB$$

d'où l'on tire :

$$\frac{ED'}{ED} = \frac{EB}{EB'}$$

En appliquant cette relation aux deux triangles EDD' et EB'B, on voit qu'ils sont semblables comme ayant un angle commun compris entre deux côtés homologues proportionnels. L'angle EB'B étant droit comme inscrit dans une demi-circonférence, l'angle EDD' est pareillement droit, et le lieu du sommet D est la droite DD' perpendiculaire à la direction EOD.

**431. Tracé graphique.** — On peut vérifier facilement cette proposition à l'aide d'une construction graphique. Traçons le système des sept leviers, dans sa position moyenne (fig. 291),

et des points E et O décrivons les circonférences A''C' et B''B', sur lesquelles doivent se mouvoir les sommets A, C et B du losange.

Prenons sur la courbe B''B', des points B'', B'... et de ces points comme centres, avec un rayon égal à AB, coupons la circonférence A''C' aux points A'', C''; A', C'; de ces nouveaux points comme centres et avec le même rayon, décrivons des petits arcs qui se couperont deux à deux en D'' et D'. En menant des droites par tous les points d'intersection, on obtient la forme du losange dans deux autres positions diffé-

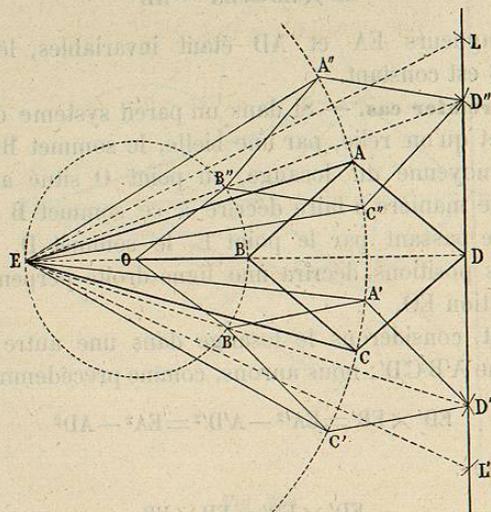


Fig. 291.

rentes, et on voit que les sommets D'', D, D' se trouvent sur une même ligne droite perpendiculaire à la direction EOD.

On détermine les deux positions théoriques extrêmes du sommet D en décrivant, du point E, avec un rayon égal à EA + AD, un arc qui coupe la ligne D''D' aux points L et L'.

En adaptant cet appareil à un balancier de rayon EA (fig. 290) et articulant la tige du piston au sommet D, on transformera le mouvement rectiligne alternatif de la tige en un mouvement circulaire alternatif du balancier.

**432. Deuxième cas.** — M. Peaucellier a encore imaginé une autre disposition de son appareil, dans laquelle le losange lui-

même est le balancier (fig. 292). Les côtés du losange sont très longs par rapport aux brides AE, CE, et celles-ci, au lieu de se trouver à l'extérieur, comme dans le premier cas, sont placées à l'intérieur et articulées au pivot E. En faisant décrire au sommet B une circonférence passant par le point E, le sommet libre D parcourt la droite DD' perpendiculaire à la ligne OE.

En effet, comme dans le premier cas, pour toutes les positions que peut prendre le losange, le produit des distances des sommets B et D au pivot E est constant, et l'on a, en considérant deux positions distinctes de l'appareil :

$$ED \times EB = ED' \times EB' \text{ et } \frac{ED}{ED'} = \frac{EB'}{EB}$$

Les deux triangles EB'B et EDD' sont dès lors semblables

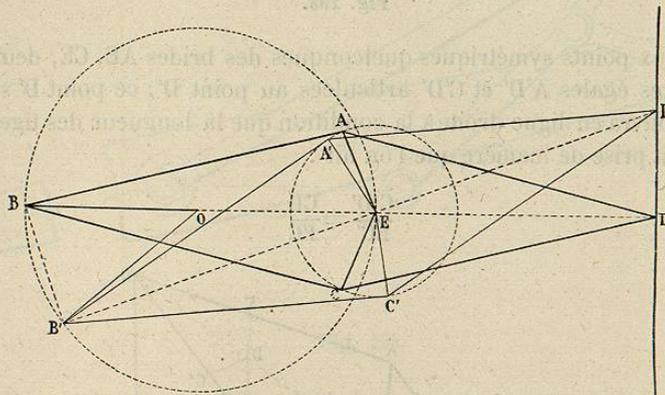


Fig. 292.

comme ayant un angle égal compris entre deux côtés homologues proportionnels. L'angle EB'B étant droit, l'angle EDD' l'est aussi, et par suite la ligne DD' est perpendiculaire à la droite OE qui joint les deux axes de rotation.

**433. Tracé graphique.** — En suivant le même procédé que nous avons exposé pour le premier cas, on tracerait l'épure de ce nouveau dispositif et on reconnaîtrait que le lieu du sommet D est la perpendiculaire DD' à la droite OE.

Les positions théoriques extrêmes se détermineront aussi de la même manière.

**434.** Le losange de Peaucellier a encore un autre avantage

sur le parallélogramme de Watt: celui-ci, en effet, ne possède que deux points animés d'un mouvement sensiblement rectiligne, tandis que le losange en fournit autant qu'on en désire.

Ainsi, dans le premier dispositif (*fig. 293*) on articulera, en

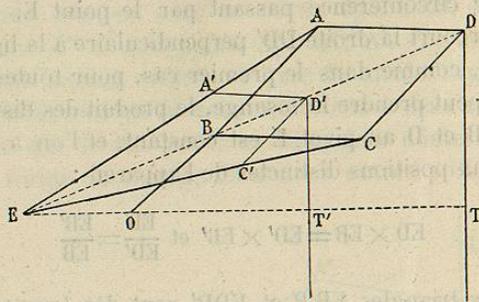


Fig. 293.

deux points symétriques quelconques des brides AE, CE, deux tiges égales A'D' et C'D' articulées au point D'; ce point D' se mouvra en ligne droite à la condition que la longueur des tiges soit prise de manière que l'on ait :

$$\frac{C'D'}{EC'} = \frac{CD}{EC}$$

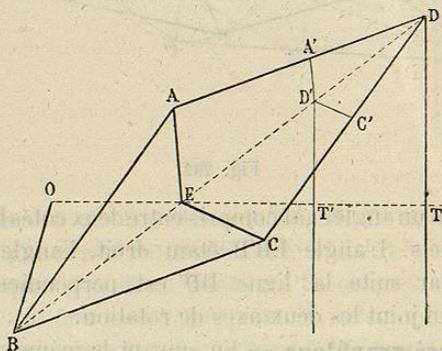


Fig. 294.

En remarquant que l'on a également :

$$\frac{C'D'}{CD} = \frac{ED'}{ED} = \frac{ET'}{ET}$$

on pourra déterminer les deux points A', C', ainsi que la lon-

gueur des barres, lorsque la distance TT' des deux tiges à guider sera donnée ou connue.

Dans le second dispositif (*fig. 294*), en considérant les triangles semblables DC'D' et DCE; DET et D'ET', on tire les égalités :

$$\frac{C'D'}{DC'} = \frac{CE}{DC} = \frac{DD'}{DE} = \frac{TT'}{ET}$$

qui permettent de déterminer la longueur des brides A'D', C'D' connaissant la distance TT' des tiges à guider.

Industriellement, on réalise les deux dispositifs comme l'in-

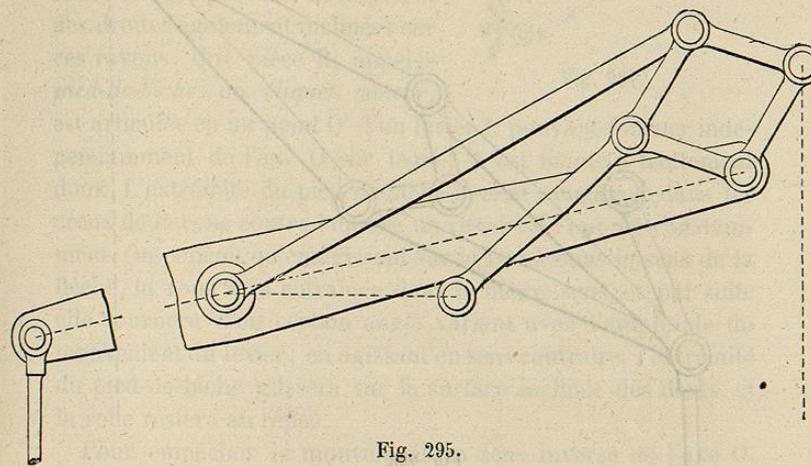


Fig. 295.

diquent les figures 295 et 296. La première montre le losange adapté au balancier d'une machine à vapeur; la seconde fait voir le losange lui-même constituant un balancier évidé.

435. Dans ce qui précède, nous avons pris le rayon OB égal à la moitié de BE (*fig. 290*). Si ce rayon est plus grand ou plus petit, la circonférence décrite par le sommet B ne passe plus par le point E, et le lieu du sommet D cesse d'être une ligne droite.

Si l'on prend  $OB < \frac{EB}{2}$ , le sommet D décrit une circonférence tournant sa convexité du côté de OE; et si l'on prend  $OB > \frac{EB}{2}$ , la circonférence décrite par D tourne sa concavité vers OE.