Ce mouvement est uniformément retardé tant que l'on a $gt < v_0 \sin\alpha$, et le corps s'élève ; mais, à partir de l'instant où $gt = v_0 \sin\alpha$, la vitesse change de sens et le mouvement devient uniformément accéléré.

481. Vitesse en un point quelconque. — La vitesse en un point quelconque a' s'obtiendra en construisant un parallélogramme sur les droites $a'k' = v_0 \cos\alpha$ et $a'k = v_0 \sin\alpha - gt$; la diagonale $a's$ représentera, en grandeur et en direction, la vitesse du mobile au point a', et cette droite $a's$ sera tangente à la trajectoire en ce point. Au sommet S de la courbe, la vitesse verticale est nulle et la tangente est horizontale ; à partir de ce point, le mobile peut être considéré comme étant lancé horizontalement avec la vitesse constante $v_0 \cos\alpha$, et, par suite, pour obtenir la vitesse en un point quelconque de la courbe, situé sur la branche SF, il suffira de composer cette vitesse horizontale constante avec la vitesse verticale gt due à la pesanteur.

Remarque. — En remarquant que la vitesse verticale diminue de la quantité g par seconde, pendant que le mobile parcourt la branche OS, et que, au contraire, elle augmente à partir du point S, de la même quantité, dans le même temps, pendant que le mobile parcourt la branche SF, on voit que les deux branches de la courbe sont symétriques par rapport à l'axe RS. La trajectoire parabolique a donc pour sommet le point S, pour axe la verticale RS, et pour tangente au point O la direction de la vitesse initiale v_0.

482. Hauteur du jet. — La valeur maximum RS s'appelle la *hauteur du jet*. Le mobile se trouvera au sommet de la courbe lorsque la vitesse verticale $v_0 \sin\alpha$ sera complètement détruite par l'action de la pesanteur et l'on aura :

$$v_0 \sin\alpha = gt; \quad \text{d'où } t = \frac{v_0 \sin\alpha}{g} \qquad (3)$$

En remplaçant dans les valeurs de x et y, elles deviennent :

$$x = \frac{v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g}$$

$$y = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{g} - \frac{g v_0^2 \sin^2\alpha}{2g^2} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$$

Si le mobile était lancé verticalement avec la vitesse initiale $v_0 \sin\alpha$, il s'élèverait, pour arriver à une vitesse nulle (**275**), à une hauteur $h = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$; cette valeur de h est précisément égale à celle que nous avons trouvée pour la valeur maximum de y.

Donc, *la hauteur du jet est la même que la hauteur à laquelle s'élèverait le mobile s'il était lancé verticalement avec une vitesse initiale égale à la composante verticale* $v_0 \sin\alpha$.

483. Amplitude du jet. — On appelle *amplitude du jet*, la longueur OF, comptée sur l'axe OX, depuis l'origine O jusqu'au point où le mobile coupe l'horizontale OX. A cet instant, y est nulle et l'équation (2) devient :

$$v_0 t \sin\alpha = \frac{1}{2} g t^2; \quad \text{d'où } t = \frac{2 v_0 \sin\alpha}{g}$$

En comparant cette valeur de t à celle de l'équation (3), on voit que le mobile emploie, pour parcourir le chemin OF, un temps double de celui qu'il emploie pour arriver au sommet S.

Introduisant cette nouvelle valeur de t dans l'équation (1), il vient :

$$x = v_0 \cos\alpha \times \frac{2 v_0 \sin\alpha}{g} = \frac{2 v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g}$$

Or on sait que $2 \sin\alpha \cos\alpha = \sin 2\alpha$; donc :

$$x = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

Cette valeur de x sera maximum lorsque $\sin 2\alpha$ sera égal à l'unité, et, dans ce cas, $2\alpha = 90°$ et $\alpha = 45°$.

Ainsi, la plus grande amplitude du jet, pour une même vitesse initiale, sera obtenue en lançant le mobile sous un angle de 45°. Si le corps était lancé verticalement avec la même vitesse initiale v_0, nous savons que la hauteur h à laquelle il s'élèverait serait exprimée par $\frac{v_0^2}{2g}$. Cette valeur étant moitié moindre que celle que nous venons de trouver pour l'amplitude du jet, dans l'hypothèse de l'angle $\alpha = 45°$, on en conclut que l'*amplitude maximum du jet est double du chemin que parcourrait le mobile s'il était lancé verticalement avec la même vitesse initiale.*

484. Cas particulier où le corps est lancé horizontalement. — Lorsqu'un corps est lancé avec une vitesse initiale dirigée horizontalement, on peut démontrer expérimentalement que la trajectoire qu'il décrit est une parabole. Imaginons qu'on ait placé, contre un tableau noir, une pièce de bois B (*fig.* 334) dans laquelle on a pratiqué une rainure circulaire dont le dernier élément est dirigé horizontalement, et supposons qu'on ait tracé, sur ce tableau, différentes paraboles ayant le point A pour sommet commun. Si l'on place une bille en un point quelconque de la rainure, cette bille, en arrivant au point A, sera lancée avec une vitesse horizontale qui, se composant avec la vitesse verticale due à la pesanteur, fera décrire une parabole au mobile, et en plaçant celui-ci à une hauteur convenable, on le verra décrire l'une des courbes précédemment tracées. Pour rendre l'expérience plus convaincante, on dispose, en différents points de la parabole, des anneaux à vis que la bille peut traverser librement; celle-ci décrit sa trajectoire en passant dans tous les anneaux.

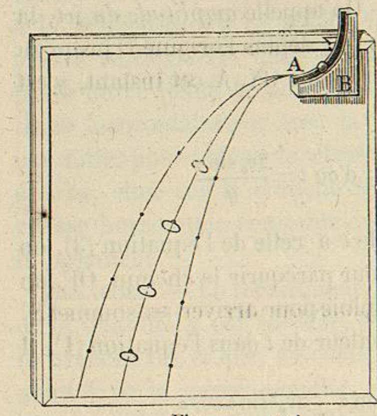

Fig. 334.

485. Application au mouvement des projectiles. — Les considérations qui viennent d'être exposées sur le mouvement des corps dans le vide sont applicables au mouvement des projectiles dans l'air, sauf les modifications apportées dans la trajectoire par la résistance des milieux.

Un projectile lancé par une arme à feu décrit une parabole, et la vitesse initiale qui lui est communiquée est dirigée suivant l'axe du canon. Il résulte de là que, pour atteindre un point déterminé dans l'espace, le projectile ne doit pas être lancé suivant la droite idéale qui joindrait le point de départ au point d'arrivée; la direction de sa vitesse initiale doit faire, avec cette ligne, un certain angle de telle sorte que, décrivant une parabole, le projectile atteigne le point considéré. On conçoit donc qu'il est important de connaître l'inclinaison à donner aux

armes à feu à longue portée, pour tirer avec précision; à cet effet, on dispose à la base du canon une hausse mobile graduée, et suivant la distance du but, on abaisse plus ou moins la culasse. En menant un rayon visuel passant sur le point de mire B (*fig.* 335), par le point A de la hausse mobile, correspondant à ce but, et par celui-ci, le projectile décrira une parabole pour aller tomber au point déterminé. La difficulté ne réside donc

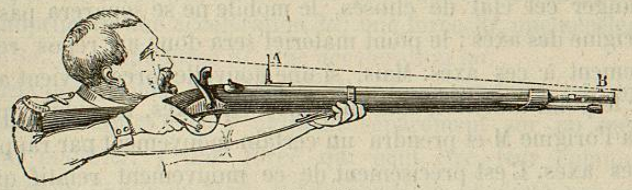

Fig. 335.

plus que dans l'appréciation de la distance du point où l'on se trouve à celui que l'on veut atteindre.

La résistance de l'air, ainsi que le vent, jouent un rôle assez important dans le mouvement des projectiles lancés par les bouches à feu à longue portée; l'amplitude du jet se trouve diminuée.

Il résulte de l'expérience que la portée maximum a lieu lorsque le projectile est lancé sous un angle compris entre 43° et 44°.

486. Quatrième principe. — *Indépendance des effets des forces simultanées.* — Ce principe se rapporte à l'effet produit par une force sur un point matériel en mouvement, c'est-à-dire déjà soumis à l'action d'une ou plusieurs autres forces. On l'énonce ainsi :

L'effet produit par une force sur un point matériel en mouvement et soumis à l'action de forces quelconques est le même que si cette force agissait seule et que si le point était au repos.

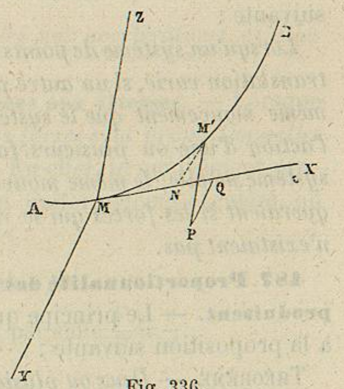

Fig. 336.

Pour bien établir ce qu'il faut entendre par ce principe qui ne s'impose pas à la raison d'une manière évidente, nous allons l'expliquer par un exemple.

Soient AB (*fig.* 336) la trajectoire décrite par un point matériel M soumis à l'action d'un système quelconque de forces F, F′, F″...., et M une position quelconque du mobile sur sa trajectoire. Prenons ce point M pour origine de trois axes X, Y, Z, entraînés par le même système de forces, c'est-à-dire possédant un mouvement commun avec le mobile, et dont l'origine parcourt également la trajectoire AB. Si rien ne vient changer cet état de choses, le mobile ne se séparera pas de l'origine des axes ; le point matériel sera donc au repos relativement à ces axes. Mais, si une nouvelle force F_1 vient agir sur le point matériel, sans influencer les axes, le mobile quittera l'origine M et prendra un certain mouvement par rapport à ces axes. C'est précisément de ce mouvement relatif qu'il s'agit dans le principe. Il faut donc entendre que ce mouvement relatif est absolument indépendant du mouvement commun du mobile et des axes, et il est le même que si la force F_1 agissait seule sur le point matériel en repos.

Le mouvement des axes a été appelé (**283**) *mouvement d'entraînement*, et celui produit par la force F_1, *mouvement relatif*. Pour obtenir le mouvement absolu, il suffira de composer ces deux mouvements.

Cela posé, le 4e principe peut encore s'énoncer de la manière suivante :

Lorsqu'un système de points matériels possède un mouvement de translation varié, si un autre point, ayant à un certain instant le même mouvement que le système, reçoit à partir de cet instant l'action d'une ou plusieurs forces, il prend, relativement au système mobile, le même mouvement que ces forces lui communiqueraient si les forces qui se rapportent au mouvement commun n'existaient pas.

487. Proportionnalité des forces aux accélérations qu'elles produisent. — Le principe que nous venons de poser conduit à la proposition suivante :

Théorème. — *Deux ou plusieurs forces constantes en grandeur et en direction, appliquées successivement à un même point matériel partant du repos ou animé d'une vitesse initiale de même direction que celle des forces, sont entre elles comme les accélérations qu'elles produisent.*

Considérons d'abord deux forces constantes f et f' qui, agissant successivement sur un même point matériel, lui communiquent des accélérations a et a'. Si nous appliquons simultanément, et dans le même sens, ces deux forces f et f' sur le point matériel, leur résultante sera égale à $f+f'$, et en vertu du principe précédent, elles lui imprimeront une accélération égale à $a+a'$. Si nous prenons $f=f'$, nous aurons $a=a'$; $f+f'=2f$ et $a+a'=2a$; ce qui nous montre que si une force f imprime une accélération a à un point matériel, une force $2f$ lui imprimera une accélération $2a$; une force $3f$, une accélération $3a$...., et une force nf, une accélération na.

Cela posé, soient j et j' les accélérations produites par deux forces constantes F et F′ agissant séparément sur un même point matériel, f une force qui peut être leur commune mesure ou l'unité de force, a l'accélération produite par cette force, et supposons que l'on ait $F=nf$ et $F'=n'f$. D'après ce qui précède, n forces égales à f communiqueront au point matériel considéré une accélération na, et n' forces égales à f, une accélération égale à $n'a$, de sorte que :

$$na=j \quad \text{et} \quad n'a=j'; \quad \text{d'où} \quad \frac{j}{j'}=\frac{n}{n'}$$

$$\text{et comme } \frac{F}{F'}=\frac{n}{n'}, \text{ on en conclut } \frac{F}{F'}=\frac{j}{j'}. \qquad (1)$$

Les forces sont proportionnelles aux accélérations qu'elles produisent.

488. Proportionnalité des forces aux vitesses. — Lorsque le point matériel part du repos, *les forces sont proportionnelles aux vitesses qu'elles lui impriment*. En effet, le mouvement produit par une force constante étant uniformément accéléré, on a, au bout d'un temps quelconque t :

$$v=jt \quad \text{et} \quad v'=j't$$

$$\text{d'où l'on tire } \frac{v}{v'}=\frac{j}{j'} \text{ et par suite } \frac{F}{F'}=\frac{v}{v'}$$

Cette proposition peut se démontrer expérimentalement au moyen de la machine d'Atwood. On prend, par exemple, $p=10$ grammes, la somme $P+P'+p=360$ grammes, et on mesure la vitesse acquise au bout d'un certain temps t. On prend ensuite $p=20$ grammes et $P+P'+p=360$ grammes; en mesurant la vitesse acquise au bout du même temps t, on constate que cette vitesse est double de la précédente. En prenant $p=30$ grammes et en conservant à la somme $P+P'+p$ la même valeur, on verrait que la vitesse est triple de la première et ainsi de suite. Donc, des forces doubles, triples, impriment au même corps, de poids 360 grammes, des vitesses doubles, triples; par conséquent, *ces forces sont proportionnelles aux vitesses qu'elles produisent.*

489. Masse des corps. — De l'équation (1), du théorème ci-dessus, on déduit :

$$\frac{F}{j}=\frac{F'}{j'}=\frac{F''}{j''}=\ldots\ldots=M$$

ce qui s'exprime en disant que *le quotient du nombre qui représente la force par celui qui représente l'accélération correspondante est constant pour un même corps;* ce quotient constant a été appelé la masse du corps et on le désigne par M.

490. Les corps, lors même qu'on les considère comme étant réduits à de simples points matériels, ne sont pas identiques les uns aux autres par rapport aux effets qu'ils éprouvent de la part des forces qu'on leur applique. On observe qu'une même force, appliquée à des corps de même nature, leur communique des accélérations différentes qui varient en raison inverse des volumes. On voit encore que cette relation n'existe pas pour des corps de matière différente, c'est-à-dire que des corps ayant un volume beaucoup plus grand que d'autres acquièrent des accélérations plus grandes sous l'action de forces égales. L'effet des forces, sur les corps, ne dépend donc pas seulement du volume de ces derniers, et on dit qu'un corps a plus ou moins de masse suivant qu'il faut lui appliquer une force plus ou moins considérable pour lui communiquer une accélération déterminée.

Deux corps, quel que soit leur volume, ont la même masse lorsqu'ils prennent des accélérations égales sous l'action de forces égales.

Deux corps ont des masses doubles, triples... l'un de l'autre, lorsqu'ils exigent des forces doubles, triples... pour acquérir une même accélération.

Le poids d'un corps étant égal à la force qui le sollicite vers

le centre de la terre, et $g=9{,}8088$ l'accélération due à la pesanteur, on peut écrire, en vertu de la proportionnalité des forces aux accélérations,

$$\frac{F}{j}=\frac{F'}{j'}=\frac{P}{g}=M$$

Donc, *la masse d'un corps est égale à son poids divisé par la gravité.*

De cette égalité on tire :

$$j=g\times\frac{F}{P}$$

qui permet de trouver l'accélération que peut prendre un corps de poids connu sous l'action d'une force constante déterminée.

491. Unité de masse. — La masse d'un corps étant égale à son poids divisé par l'accélération due à la pesanteur, on voit que la masse d'un corps sera égale à l'unité lorsqu'on aura :

$$\frac{P}{g}=1$$

P étant exprimé en kilogrammes et g en mètres. Or, à Paris, on a $g=9^{m},8088$. Donc l'*unité de masse est la masse d'un corps dont le poids est de* $9^{kil},8088$. Le poids et la gravité varieront pour les divers lieux de la terre; mais leur rapport restant constant, la masse d'un corps est une quantité constante pour tous les points du globe.

492. Relations entre les forces, les masses et les accélérations. — 1° *Les forces sont proportionnelles aux produits des masses par les accélérations.* Soient F et F' deux forces quelconques appliquées à deux points matériels de masse M et M', et j, j' les accélérations communiquées à ces corps. La force F, imprimant une accélération j à un corps de masse M, donne :

$$\frac{F}{j}=M$$

De même, pour la force F', on aura :

$$\frac{F'}{j'}=M'$$

Divisant membre à membre il vient :

$$\frac{Fj'}{F'j}=\frac{M}{M'}\,;\ \text{d'où}\ \frac{F}{F'}=\frac{Mj}{M'j'} \qquad (1)$$

493. 2° *Les forces sont proportionnelles aux produits des masses par les vitesses.* Supposons que les deux mobiles de masse M et M′ partent du repos, et multiplions par t les deux termes du deuxième membre de l'équation (1), il vient :

$$\frac{F}{F'} = \frac{Mjt}{M'j't}$$

Or les quantités jt, $j't$ représentent les vitesses v, v' possédées par les mobiles de masse M et M′ au bout du temps t ; en remplaçant, il vient :

$$\frac{F}{F'} = \frac{Mv}{M'v'}$$

Les produits Mv, $M'v'$ des masses par les vitesses s'appellent *quantités de mouvement*. On peut donc dire que *les forces sont proportionnelles aux quantités de mouvement qu'elles produisent.*

494. 3° *Les accélérations produites par une force qui agit successivement sur deux points matériels de masse* M et M′ *sont en raison inverse de ces masses.* Reprenons l'équation :

$$\frac{F}{F'} = \frac{Mj}{M'j'}$$

et faisons $F' = F$; il vient successivement :

$$1 = \frac{Mj}{M'j'};\ Mj = M'j' \ \text{ et } \frac{j}{j'} = \frac{M'}{M}$$

Si les mobiles partent du repos, on aura, au bout d'un temps quelconque :

$$\frac{v}{v'} = \frac{M'}{M}$$

Les vitesses communiquées par une même force à deux corps de masse différente sont en raison inverse de ces masses. C'est sur ce principe qu'est fondée la machine d'Atwood.

§ 2. — THÉORÈMES RELATIFS AUX QUANTITÉS DE MOUVEMENT.

495. Impulsion d'une force. — Définition. — On appelle *impulsion d'une force* le produit Ft de l'intensité de la force par le temps pendant lequel elle agit.

496. Théorème. — *La variation de la quantité de mouvement*

est égale à l'impulsion de la force dans le même temps. Considérons un mobile de masse M soumis à l'action d'une force constante F ; si le mobile part du repos, sa vitesse au bout d'un temps t sera exprimée par :

$$v = jt$$

Nous avons trouvé (**490**) que $j = \frac{F}{M}$; en remplaçant il vient :

$$v = \frac{F}{M}t;\ \text{d'où l'on tire } Mv = Ft$$

La quantité de mouvement est numériquement égale à l'impulsion de la force.

497. Cette formule nous montre qu'il n'y a pas de forces instantanées, car si nous faisons $t = 0$, il vient $Mv = 0$. Donc il faut toujours un temps, quelque petit qu'il soit, pour qu'une force puisse produire un effet quelconque.

Si le point matériel possède une vitesse initiale v_0 au moment où la force F commence à agir, sa vitesse au bout du temps t sera :

$$v = v_0 + jt; \quad \text{ou} \quad v = v_0 + \frac{F}{M}t$$

d'où l'on tire :
$$Mv - Mv_0 = Ft \tag{1}$$

L'accroissement de la quantité de mouvement est égale à l'impulsion de la force.

498. Si la force agissait en sens contraire de la vitesse initiale, on aurait :

$$v = v_0 - \frac{F}{M}t \quad \text{et} \quad Mv_0 - Mv = Ft$$

La diminution de la quantité de mouvement est égale à l'impulsion de la force.

499. Si dans l'équation (1), on fait successivement $v_0 = 0$ et $v = 0$, on voit que : 1° *la quantité de mouvement possédée par un mobile est égale et de même sens que l'impulsion qu'il a reçue depuis qu'il est en mouvement.*

2° *La quantité de mouvement possédée par un mobile est égale et de sens contraire à l'impulsion qui est nécessaire pour le ramener au repos.*

500. Extension du théorème précédent au cas d'une force