493. 2° *Les forces sont proportionnelles aux produits des masses par les vitesses.* Supposons que les deux mobiles de masse M et M' partent du repos, et multiplions par t les deux termes du deuxième membre de l'équation (1), il vient :

$$\frac{F}{F'} = \frac{Mjt}{M'j't}$$

Or les quantités jt, $j't$ représentent les vitesses v, v' possédées par les mobiles de masse M et M' au bout du temps t ; en remplaçant, il vient :

$$\frac{F}{F'} = \frac{Mv}{M'v'}$$

Les produits Mv, $M'v'$ des masses par les vitesses s'appellent *quantités de mouvement.* On peut donc dire que *les forces sont proportionnelles aux quantités de mouvement qu'elles produisent.*

494. 3° *Les accélérations produites par une force qui agit successivement sur deux points matériels de masse* M et M' *sont en raison inverse de ces masses.* Reprenons l'équation :

$$\frac{F}{F'} = \frac{Mj}{M'j'}$$

et faisons $F' = F$; il vient successivement :

$$1 = \frac{Mj}{M'j'} ; \; Mj = M'j' \; \text{ et } \frac{j}{j'} = \frac{M'}{M}$$

Si les mobiles partent du repos, on aura, au bout d'un temps quelconque :

$$\frac{v}{v'} = \frac{M'}{M}$$

Les vitesses communiquées par une même force à deux corps de masse différente sont en raison inverse de ces masses. C'est sur ce principe qu'est fondée la machine d'Atwood.

§ 2. — THÉORÈMES RELATIFS AUX QUANTITÉS DE MOUVEMENT.

495. Impulsion d'une force. — Définition. — On appelle *impulsion d'une force* le produit Ft de l'intensité de la force par le temps pendant lequel elle agit.

496. Théorème. — *La variation de la quantité de mouvement*

est égale à l'impulsion de la force dans le même temps. Considérons un mobile de masse M soumis à l'action d'une force constante F ; si le mobile part du repos, sa vitesse au bout d'un temps t sera exprimée par :

$$v = jt$$

Nous avons trouvé (**490**) que $j = \frac{F}{M}$; en remplaçant il vient :

$$v = \frac{F}{M} t ; \text{ d'où l'on tire } Mv = Ft$$

La quantité de mouvement est numériquement égale à l'impulsion de la force.

497. Cette formule nous montre qu'il n'y a pas de forces instantanées, car si nous faisons $t = 0$, il vient $Mv = 0$. Donc il faut toujours un temps, quelque petit qu'il soit, pour qu'une force puisse produire un effet quelconque.

Si le point matériel possède une vitesse initiale v_0 au moment où la force F commence à agir, sa vitesse au bout du temps t sera :

$$v = v_0 + jt ; \quad \text{ou} \quad v = v_0 + \frac{F}{M} t$$

d'où l'on tire : $$Mv - Mv_0 = Ft \qquad (1)$$

L'accroissement de la quantité de mouvement est égale à l'impulsion de la force.

498. Si la force agissait en sens contraire de la vitesse initiale, on aurait :

$$v = v_0 - \frac{F}{M} t \quad \text{et} \quad Mv_0 - Mv = Ft$$

La diminution de la quantité de mouvement est égale à l'impulsion de la force.

499. Si dans l'équation (1), on fait successivement $v_0 = 0$ et $v = 0$, on voit que : 1° *la quantité de mouvement possédée par un mobile est égale et de même sens que l'impulsion qu'il a reçue depuis qu'il est en mouvement.*

2° *La quantité de mouvement possédée par un mobile est égale et de sens contraire à l'impulsion qui est nécessaire pour le ramener au repos.*

500. Extension du théorème précédent au cas d'une force

variable. — Le temps total t de l'action de la force peut être décomposé en éléments très petits $t_1,t_2,t_3,..,t_n$ pendant lesquels la force pourra être considérée comme constante ; soient $F_1,F_2,F_3,...,F_n$ les valeurs successives de la force et $v_1,v_2,v_3,...v_n$ les vitesses correspondant aux divers éléments du temps ; on aura :

Pendant le 1er élément t_1 $\quad Mv_1 - Mv_0 = F_1t_1$
— 2e — t_2 $\quad Mv_2 - Mv_1 = F_2t_2$
....
— ne — t_n $\quad Mv_n - Mv_{n-1} = F_nt_n$
d'où en ajoutant : $Mv - Mv_0 = F_1t_1 + F_2t_2 + \dots + F_nt_n$

Cette équation existant, quelque petits que soient les temps $t_1,t_2,...$, s'applique au cas d'une force F variable d'une manière continue, prenant les valeurs successives $F_1,F_2,F_3..,F_n$ et agissant pendant le temps $t = t_1 + t_2 + t_3 + ...t_n$. Donc *pour une force variable*, comme pour une force constante, *la variation de quantité de mouvement est égale à l'impulsion de la force pendant le même temps.*

501. Le théorème s'applique, sans modification, au cas où le mobile est soumis à l'action de plusieurs forces simultanées de même sens ou de sens contraire et agissant suivant la même droite. Dans ce cas, la force F considérée est la résultante de toutes ces forces, et *la variation de quantité de mouvement est égale à la somme algébrique des impulsions des composantes.*

502. Projection du mouvement d'un point matériel sur un axe. — 1° *La force constante agit dans la direction de la vitesse initiale.* Le mouvement est rectiligne et uniformément varié. Désignons par M la masse du mobile, par F la force qui le sollicite, par v_0 la vitesse initiale, par e,e' les espaces parcourus par le mobile et par sa projection pendant le temps t. Soient OB (*fig.* 337) la direction de la trajectoire du mobile, O sa position initiale, et A sa position au bout du temps t ; soient enfin O′ et A′ les projections des points O et A sur l'axe xx'. Nous aurons (**258**) :

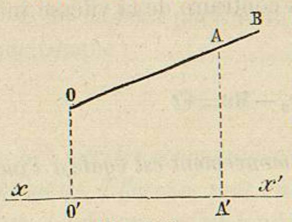

Fig. 337.

$$e = v_0t + \frac{1}{2}jt^2 \quad \text{ou} \quad e = v_0t + \frac{1}{2}\frac{F}{M}t^2$$

Multipliant les deux membres de cette dernière équation par le cosinus de l'angle α formé par la ligne OB avec l'axe, il vient :

$$e\cos\alpha = v_0t\cos\alpha + \frac{1}{2}\frac{F\cos\alpha}{M}t^2 = e'$$

Cette équation nous montre que *le mouvement de la projection du mobile est aussi uniformément varié ; c'est le mouvement que posséderait un point matériel de même masse* M *que le mobile considéré, qui aurait pour vitesse initiale la projection de la vitesse initiale de ce mobile, et qui serait sollicité par une force égale à la projection de la force* F *qui agit sur le mobile.*

503. 2° *La force constante n'agit pas dans la direction de la vitesse initiale du mobile.* Le mouvement est parabolique.

Soient OF (*fig.* 338) la direction de la force constante, OC la direction de la vitesse initiale, OD l'espace qui serait parcouru pendant le temps t, suivant la direction de la force, s'il n'y avait pas de vitesse initiale, OE le chemin qui serait parcouru pendant le même temps si la force n'agissait pas. Le mobile, en parcourant la parabole OB, sera arrivé, au bout du temps t, au sommet A du parallélogramme construit sur OD et OE. Projetons les points O,D,A en O′,D′,A′ sur l'axe xx'. Désignons par F la force constante, par M la masse du mobile, par v_0 la vitesse initiale, par e' l'espace parcouru pendant le temps t par la projection du mobile, et par α et β les angles que les droites OE et OD font avec l'axe xx'. Nous aurons :

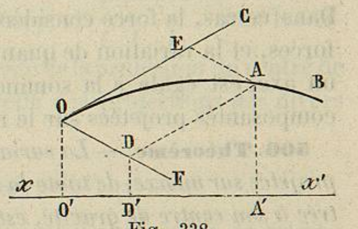

Fig. 338.

$$e' = A'D' + O'D'$$

Mais $A'D' = AD\cos\alpha$; $O'D' = OD\cos\beta$; $AD = OE = v_0t$; $OD = \frac{1}{2}\frac{F}{M}t^2$

donc, en remplaçant, $e' = v_0t\cos\alpha + \frac{1}{2}\frac{F\cos\beta}{M}t^2$

On voit, par cette équation, que *la projection du mobile considéré se meut d'un mouvement rectiligne uniformément varié ; c'est le mouvement que posséderait un point matériel de même masse* M *que le mobile considéré, qui aurait pour vitesse initiale* *la projection de la vitesse initiale de ce mobile, et qui serait sollicité par une force constante agissant dans la direction de la vitesse initiale et égale à la projection de la force qui sollicite le mobile.*

504. De ce qui vient d'être exposé, on en déduit par analogie

$$Mv \cos(vx) - Mv_0 \cos(v_0x) = Ft \cos(Fx)$$

ce qui s'énonce de la manière suivante :

Théorème. — *Lorsqu'un point matériel se meut d'une manière quelconque dans l'espace, la variation de sa quantité de mouvement, projetée sur un axe quelconque, est égale à l'impulsion de la force projetée sur le même axe.*

505. Ce théorème s'applique, sans modification, au cas où le mobile est soumis à l'action de plusieurs forces simultanées. Dans ce cas, la force considérée est la résultante de toutes les forces, et la variation de quantité de mouvement, projetée sur un axe, est égale à la somme algébrique des impulsions des composantes projetées sur le même axe.

506. Théorème. — *La variation de la quantité de mouvement, projetée sur un axe, de toute la masse d'un système solide concentrée à son centre de gravité, est égale à la somme des variations des quantités de mouvement de toutes les petites masses élémentaires projetées sur le même axe.*

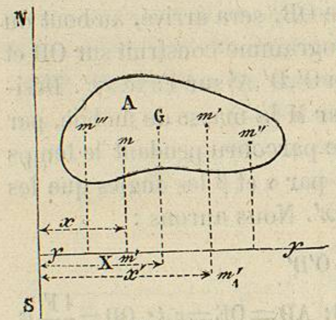

Fig. 339.

Soient A (*fig.* 339) le système solide et G son centre de gravité, point auquel nous supposerons concentrée toute la masse du corps. Projetons toutes les petites masses m, m', m''.... qui le composent, et soient x, x', x''.... X les distances de leurs projections et celle du centre de gravité à un plan des moments NS. Nous aurons, en vertu du théorème de Varignon :

$$(m + m' + m'' + \ldots\ldots) X = mx + m'x' + m''x'' + \ldots\ldots = MX$$

Supposons que le corps A se déplace pendant un temps très petit t, et soient e, e', e''.... e les déplacements correspondants des projections des points m, m', m''.... G; le même théorème de Varignon donne :

$$M(X + e) = m(x + e) + m'(x' + e') + \ldots\ldots$$

Retranchant l'égalité précédente de cette dernière, il vient :

$$Me = me + m'e' + m''e'' + \ldots\ldots$$

Divisons par le temps très petit t pendant lequel nous avons considéré le déplacement du système, il vient :

$$M\frac{e}{t} = m\frac{e}{t} + m'\frac{e'}{t} + m''\frac{e''}{t} + \ldots\ldots$$

Mais le temps t étant très petit, on peut considérer le mouvement comme uniforme et les rapports $\frac{e}{t}$, $\frac{e'}{t}$, $\frac{e''}{t}$.... sont les vitesses. Désignons par V_{ox}, la vitesse de la projection du centre de gravité et par v_{ox}, v'_{ox}, v''_{ox}.... celle des projections des divers points du système ; il vient :

$$MV_{ox} = mv_{ox} + m'v'_{ox} + m''v''_{ox} + \ldots\ldots$$

Pour un autre déplacement du système, on aurait de même :

$$MV_x = mv_x + m'v'_x + m''v''_x + \ldots\ldots$$

En retranchant l'égalité précédente de cette dernière, il vient :

$$MV_x - MV_{ox} = (mv_x - mv_{ox}) + (m'v'_x - m'v'_{ox}) + \ldots\ldots \quad (1)$$

ce qu'il fallait démontrer.

507. Théorème. — *La variation de la somme des quantités de mouvement de tous les points matériels qui composent un corps solide, projetée sur un axe quelconque, est égale à la somme des impulsions des forces projetées sur le même axe.*

Tous les différents points matériels qui composent le système peuvent être considérés comme entièrement libres et indépendants les uns des autres, à la condition d'avoir égard aux actions mutuelles que ces points matériels exercent les uns sur les autres. Le corps se trouve ainsi soumis à l'action de deux systèmes de forces : 1° les forces *intérieures* ou *mutuelles* et 2° les forces *extérieures* qui lui sont appliquées.

D'après le principe de la réaction égale et contraire à l'action, toutes les forces intérieures sont égales et opposées deux à deux, de sens contraire, et par suite elles s'annulent. On voit donc que les forces mutuelles n'influent nullement sur le mouvement que prend le corps, et qui n'est dû qu'aux forces extérieures. Donc, *la variation de la quantité de mouvement d'un corps est indépendante des forces intérieures.*

Chacun des points matériels m, m', m''.... du corps solide, considéré séparément, donnera, sous l'action des forces extérieures, les équations suivantes, déduites du théorème démontré (**504**).

$$mv_x - mv_{ox} = F_x t$$
$$m'v'_x - m'v'_{ox} = F'_x t$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots$$

En ajoutant toutes ces égalités membre à membre, il vient :

$$(mv_x + m'v'_x + \ldots.) - (mv_{ox} + m'v'_{ox} + \ldots.) = F_x t + F'_x t + \ldots. \quad (1)$$

ou bien $\Sigma mv_x - \Sigma mv_{ox} = \Sigma F_x t$, C.Q.F.D.

508. Mouvement du centre de gravité. — Théorème. — *Le centre de gravité d'un corps quelconque se meut comme un point matériel qui réunirait à lui seul toute la masse du corps considéré, et qui serait soumis à l'action de toutes les forces extérieures transportées en ce point parallèlement à elles-mêmes.*

La démonstration de ce théorème se déduit de la simple comparaison entre l'équation (1) ci-dessus :

$$(mv_x + m'v'_x + \ldots..) - (mv_{ox} + m'v'_{ox} + \ldots..) = F_x t + F'_x t + \ldots..$$

et l'équation (1) du théorème démontré (**506**)

$$MV_x - MV_{ox} = (mv_x - mv_{ox}) + (m'v'_x - m'v'_{ox}) + \ldots..$$

En effet, le premier membre de la première équation étant égal au deuxième membre de la seconde, il s'ensuit que :

$$MV_x - MV_{ox} = F_x t + F'_x t + \ldots..$$

équation qui montre que *la variation de la quantité de mouvement du centre de gravité d'un corps quelconque, projetée sur un axe, est égale à la somme des impulsions de toutes les forces qui agissent sur le corps, projetées sur le même axe.*

Ainsi, tout ce que nous avons dit relativement au mouvement

d'un point matériel s'applique directement à un solide quelconque lorsque, par la pensée, nous considérons toute sa masse concentrée à son centre de gravité et que nous transportons en ce point, parallèlement à elles-mêmes, toutes les forces extérieures qui agissent sur le corps.

509. Conséquences. — Ce théorème conduit aux conséquences suivantes :

Toutes les fois que les forces extérieures, transportées parallèlement à elles-mêmes, au centre de gravité d'un système quelconque, auront une résultante nulle, ce centre de gravité restera immobile ou sera animé d'un mouvement rectiligne et uniforme. Il en sera de même s'il n'y a pas de forces extérieures.

Un animal isolé dans l'espace et soustrait à l'action de toute force extérieure ne parviendrait pas à déplacer son centre de gravité malgré tous les efforts qu'il ferait pour cela, car le jeu de ses muscles ne peut développer que des forces intérieures qui n'ont aucune action sur le centre de gravité.

La faculté que possèdent les êtres animés de se mouvoir est déterminée par les réactions des corps sur lesquels ils s'appuient ; ces réactions sont des forces extérieures par rapport à leur corps, et, par suite, produisent le déplacement de leur centre de gravité dans tous les sens possibles.

Lorsqu'une bombe est lancée dans l'air, elle décrit une parabole ; si elle vient à éclater avant de toucher la terre, l'explosion n'étant déterminée que par les forces intérieures, le centre de gravité continue à décrire la même courbe que si les différentes parties du projectile n'étaient pas séparées. Les fragments de la bombe venant à rencontrer un obstacle, le mouvement du centre de gravité se trouvera modifié.