CHAPITRE II

§ 1. — TRAVAIL DES FORCES.

510. Définition du travail mécanique. — Lorsqu'une force, quelle qu'elle soit, est employée à vaincre une résistance, on dit qu'il y a *travail produit;* un cheval qui tire une voiture, un homme qui élève des fardeaux, exercent un certain travail. Le travail mécanique d'une force implique donc les deux idées de résistance vaincue et de chemin parcouru ; si l'un de ces facteurs est nul, il n'y a pas de travail mécanique produit. En outre, il est évident que si l'on élève une même charge à des hauteurs doubles, triples,.... le travail produit devient double, triple,.... et que si cette charge devient elle-même double, triple,.... pour un même chemin parcouru, le travail produit est encore doublé, triplé.... On peut donc dire que le travail mécanique varie proportionnellement à la résistance vaincue et au chemin parcouru. Il faut maintenant en déterminer la mesure, et pour cela, définir l'unité de travail mécanique adoptée.

511. Unité de travail mécanique. — L'unité de travail mécanique adoptée en France est le *kilogrammètre*, c'est-à-dire le travail développé en élevant à 1 mètre de hauteur un poids de 1 kilogramme. Cette unité se désigne par les lettres *kgm.*

512. Expression du travail d'une force constante. — *Le travail d'une force constante est égal au produit de l'intensité de la force, exprimée en kilogrammes, par le chemin parcouru suivant la direction de cette force, exprimé en mètres.* Ainsi, F étant l'effort moteur et *e* le chemin parcouru, le travail mécanique développé aura pour expression :

$$F \times e$$

513. Notation adoptée. — Le travail d'une force se désigne par la caractéristique $\mathcal{T}$; ainsi, pour désigner le travail d'une force quelconque F, on écrira :

$$\mathcal{T}F.$$

514. Travail d'une force oblique au chemin parcouru. — Lorsque le point d'application d'une force se meut suivant une direction autre que celle de la force, il faut, pour évaluer le travail de cette force, connaître le chemin parcouru par son point d'application suivant sa direction propre, et pour cela, il suffit de projeter le chemin réellement parcouru sur la direction de la force. Ainsi soient AB = F (*fig.* 340), la force et AA′ le chemin décrit par son point d'application. Le travail de la force F sera $AB \times Aa$. Si nous projetons la force F sur la direction AC du chemin parcouru, le travail pourra encore s'exprimer par $AA' \times AC$; en effet, les triangles AaA' et ABC sont semblables et donnent :

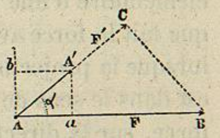

Fig. 340.

$$\frac{AB}{AA'} = \frac{AC}{Aa}, \text{ d'où } AB \times Aa = AA' \times AC$$

Le travail d'une force oblique au chemin parcouru est égal au produit de l'intensité de cette force par la projection du chemin sur sa direction, ou bien encore, *au chemin parcouru multiplié par la projection de la force sur la direction du chemin.*

En désignant AB par F ; AA′ par *e* et l'angle A′AB par α, on a :

$$AB \times Aa = F \times e \cos\alpha \quad \text{et} \quad AA' \times AC = e \times F \cos\alpha$$

Donc le travail de la force F peut encore s'exprimer par $F \times e \cos\alpha$, c'est-à-dire par le produit de la force, du chemin parcouru et du cosinus de l'angle formé. On voit que ce travail peut être nul de trois manières différentes, suivant que l'un quelconque des trois facteurs est nul.

515. Travail élémentaire d'une force variable. — Lorsque la force considérée est variable, et que son point d'application parcourt une trajectoire quelconque, on peut toujours décomposer cette trajectoire en parties assez petites pour être considérées comme rectilignes ; on peut aussi, sans erreur sensible, considérer la force comme constante en grandeur et en direction pendant les temps très petits employés à parcourir les divers éléments du chemin. Le travail correspondant à chacun de ces travaux s'appelle *travail élémentaire*, et pourra être évalué comme nous venons de l'indiquer ci-contre. La somme de tous les travaux élémentaires donne le travail total de la force variable.

516. Travail moteur. — Travail résistant. — Le travail élémentaire d'une force est un *travail moteur* lorsque l'angle que fait la force avec l'élément de chemin est aigu, c'est-à-dire lorsque la projection de l'élément, sur la direction de la force, est dans le sens de la force, ou bien lorsque la projection de la force, sur la direction de l'élément, est dans le sens de l'élément décrit. Ce même travail est un *travail résistant* lorsque l'angle que fait la force avec l'élément de chemin est obtus, c'est-à-dire lorsque la projection de l'élément, sur la direction de la force, est en sens contraire de la force, ou bien lorsque la projection de la force, sur la direction de l'élément, est en sens contraire de l'élément décrit.

517. Travail total d'une force variable. — Soient F, F′, F″.... les valeurs successives d'une force variable; e_1, e'_1, e''_1.... les projections, sur les directions de la force, des divers éléments e, e', e''.... des chemins parcourus. En considérant la force comme constante pendant qu'elle parcourt chacun des éléments de chemin, les travaux élémentaires sont :

$$t = \mathrm{F}e_1;\ t' = \mathrm{F}'e'_1;\ t'' = \mathrm{F}''e''_1;\ \ldots..$$

et le travail total est :

$$\mathfrak{T} = \Sigma t = \mathrm{F}e_1 + \mathrm{F}'e'_1 + \mathrm{F}''e''_1 + \ldots..$$

518. Représentation graphique. — Le travail total d'une force variable peut être évalué graphiquement en construisant une courbe A′E′ (*fig.* 341) ayant pour abscisses AB, BC, CD... ou les projections $e_1, e'_1\ e''_1$.... des éléments de chemin, et pour ordonnées les valeurs successives, F, F′, F″.... de la force. L'aire de la surface AA′E′E représente le travail cherché. En effet, les différents travaux élémentaires sont représentés par les aires de rectangles ABA′A″, BCB′B″....; si la force F ne restait constante que pendant que son point d'application parcourt des éléments quatre fois plus petits, les travaux élémentaires seraient représentés par les aires des rectangles $AmA'm''$, $mm'pp''$.... Or, il est évident que la somme des aires de tous ces rectangles a pour limite l'aire AA′C′E′E qui représente ainsi le travail total de la force variable. Nous avons vu (**85**) qu'une pareille surface peut être évaluée à l'aide de la formule de Thomas Simpson.

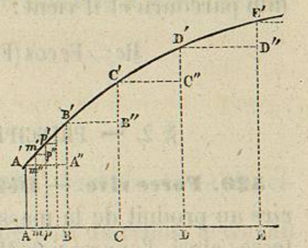

Fig. 341.

Remarque. — S'il entrait, dans le travail total d'une force, des travaux élémentaires moteurs et des travaux élémentaires résistants, on calculerait séparément la somme des travaux moteurs et la somme des travaux résistants; la différence entre ces deux sommes représenterait le travail total de la force variable.

519. Travail de plusieurs forces simultanées. — Théorème. *Le travail élémentaire de la résultante d'un nombre quelconque de forces est égal à la somme algébrique des travaux élémentaires des composantes.*

Pour démontrer ce théorème, rappelons (**46**) que la projection de la résultante, sur un axe quelconque, est égale à la somme algébrique des projections des composantes, et que la projection d'une force quelconque, F, sur un axe x, est exprimée par F cos (Fx), en désignant par Fx l'angle de la force avec l'axe x.

Soient maintenant F, F′, F″.... les forces proposées et R leur résultante; prenons pour axe des projections la direction de l'élément de chemin, nous aurons :

$$\mathrm{R}\cos(\mathrm{R}e) = \mathrm{F}\cos(\mathrm{F}e) + \mathrm{F}'\cos(\mathrm{F}'e) + \ldots..$$

Or le travail élémentaire d'une composante est égal à l'élément de chemin multiplié par la projection de la force sur la direction de l'élément, et il en est de même pour la résultante; en multipliant tous les termes de l'équation précédente par l'élément de chemin e, on a :

$$\mathrm{R}e\cos(\mathrm{R}e) = \mathrm{F}e\cos(\mathrm{F}e) + \mathrm{F}'e\cos(\mathrm{F}'e) + \ldots..$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

Remarque. — Si R représente la résultante de toutes les forces qui agissent sur le point matériel en mouvement, cette résultante se trouve évidemment dans la direction de l'élément de chemin ; elle est elle-même sa projection sur l'élément de chemin parcouru et il vient :

$$Re = Fe\cos(Fe) + F'e\cos(F'e) + \ldots\ldots$$

§ 2. — PRINCIPE DE L'EFFET DU TRAVAIL.

520. Force vive. — Définition. — On donne le nom de *force vive* au produit de la masse d'un mobile par le carré de sa vitesse ; ainsi, l'expression Mv^2 désigne la force vive possédée par un mobile de masse M, animé d'une vitesse v.

521. Puissance vive. — Dans les calculs, comme nous allons le voir, au lieu d'employer le produit Mv^2, on ne fait entrer que la moitié $\frac{Mv^2}{2}$ de ce produit. M. Bélanger a proposé de donner un nom propre à cette quantité, et on l'appelle *puissance vive*.

522. Énoncé du principe de l'effet du travail. — Le principe de l'effet du travail consiste en ce que, *dans tout système de points matériels, la variation de puissance vive entre deux instants quelconques est égale à la somme algébrique des travaux de toutes les forces intérieures et extérieures qui agissent sur le système.*

Nous allons démontrer ce principe dans les divers cas suivants :

523. 1° Cas d'une force constante agissant sur un point matériel qui part du repos. — Le mouvement sera uniformément accéléré et on aura les relations :

$$v = jt \quad \text{et} \quad e = \frac{1}{2}jt^2 \quad \text{ou} \quad v = \frac{F}{M}t \quad \text{et} \quad e = \frac{1}{2}\frac{F}{M}t^2$$

Élevant la première équation au carré et multipliant la deuxième par $2\frac{F}{M}$, il vient :

$$v^2 = \frac{F^2}{M^2}t^2 \quad \text{et} \quad 2\frac{F}{M}e = \frac{F^2}{M^2}t^2$$

d'où l'on déduit $v^2 = 2\frac{F}{M}e$, et par suite $\frac{1}{2}Mv^2 = Fe = \mathcal{T}F$ (1)

La puissance vive possédée par le mobile au bout d'un temps quelconque t *est égale au travail de la force* F *pendant le même temps.*

Si, dans l'équation (1), on remplace la masse M par sa valeur $\frac{P}{g}$, il vient :

$$P\frac{v^2}{2g} = \mathcal{T}F$$

Or la quantité $\frac{v^2}{2g}$ a été appelée (**275**) *hauteur due à la vitesse* v. Donc, dans le cas où le mobile part du repos, le travail est égal au poids de ce mobile multiplié par la hauteur due à sa vitesse. On voit, d'après cela, que pour calculer le travail d'une force constante appliquée à un point matériel qui part du repos, il suffit de connaître le poids et la vitesse du mobile.

524. 2° Cas d'une force constante agissant sur un mobile en mouvement. — Nous diviserons ce cas en deux autres.

1° *La force a la même direction que la vitesse initiale.* Le mouvement sera encore rectiligne et uniformément varié et on aura :

$$v = v_0 + \frac{F}{M}t \quad \text{et} \quad e = v_0t + \frac{1}{2}\frac{F}{M}t^2$$

Élevant la première équation au carré et multipliant la deuxième par $2\frac{F}{M}$, il vient :

$$v^2 = v_0^2 + 2\frac{F}{M}\times v_0t + \frac{F^2}{M^2}t^2$$

$$\text{et} \quad 2\frac{F}{M}e = \quad 2\frac{F}{M}\times v_0t + \frac{F^2}{M^2}t^2$$

Retranchant membre à membre on aura :

$$v^2 - 2\frac{F}{M}e = v_0^2;\ \text{d'où}\ v^2 - v_0^2 = 2\frac{F}{M}e,\ \text{et}\ \frac{1}{2}Mv^2 - \frac{1}{2}Mv_0^2 = Fe = \mathcal{T}F$$

La variation de puissance vive est égale au travail de la force.

2° *La force constante agit dans une direction différente de celle de la vitesse initiale.*

Le mouvement est parabolique ; mais nous savons (**502**) que si l'on projette un tel mouvement sur un axe, la projection du mobile, supposée avoir même masse que lui, se mouvra d'un mouvement rectiligne uniformément varié, comme si elle était soumise à une force égale à la projection de la force qui agit sur le mobile, et avec une vitesse égale à la projection de la vitesse du mobile.

Projetons le mouvement parabolique sur 3 axes rectangulaires x, y, z ; on aura, d'après ce qui précède,

$$\frac{1}{2}Mv_x^2 - \frac{1}{2}Mv_{ox}^2 = \mathfrak{T}F_x \text{ pour l'axe } x$$

$$\frac{1}{2}Mv_y^2 - \frac{1}{2}Mv_{oy}^2 = \mathfrak{T}F_y \text{ pour l'axe } y$$

$$\frac{1}{2}Mv_z^2 - \frac{1}{2}Mv_{oz}^2 = \mathfrak{T}F_z \text{ pour l'axe } z$$

Ajoutant ces trois équations membre à membre, il vient :

$$\frac{1}{2}M(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) - \frac{1}{2}M(v_{ox}^2 + v_{oy}^2 + v_{oz}^2) = \mathfrak{T}F_x + \mathfrak{T}F_y + \mathfrak{T}F_z$$

Mais nous savons que si l'on décompose une force ou une vitesse en trois composantes rectangulaires, la somme des carrés des composantes est égale au carré de la résultante. On a donc :

$$v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = v^2;\ v_{ox}^2 + v_{oy}^2 + v_{oz}^2 = v_0^2;\ \text{et } \mathfrak{T}F_x + \mathfrak{T}F_y + \mathfrak{T}F_z = \mathfrak{T}F$$

En remplaçant, il vient :

$$\frac{1}{2}Mv^2 - \frac{1}{2}Mv_0^2 = \mathfrak{T}F$$

525. 3° **Cas d'une force variable.** — Pour étendre le principe de l'effet du travail au cas où la force est variable, décomposons le temps t de l'action de la force, en éléments $t_1, t_2, t_3 .. t_n$ assez petits pour que la force puisse être considérée comme constante pendant la durée de chacun d'eux ; soient $F_1, F_2, F_3 ..., F_n$ les valeurs successives que prend la force, v_0 la vitesse initiale et $v_1, v_2, v_3 .... v$ les vitesses correspondant à la fin des divers éléments du temps. La vitesse finale de chaque élément sera la vitesse initiale pour l'élément suivant et l'on aura :

Pour l'élément de temps t_1 $\frac{1}{2}Mv_1^2 - \frac{1}{2}Mv_0^2 = \mathfrak{T}F_1$

— — t_2 $\frac{1}{2}Mv_2^2 - \frac{1}{2}Mv_1^2 = \mathfrak{T}F_2$

. . . . = .

— — t_n $\frac{1}{2}Mv^2 - \frac{1}{2}Mv_{n-1}^2 = \mathfrak{T}F_n$

En ajoutant membre à membre, il vient :

$$\frac{1}{2}Mv^2 - \frac{1}{2}Mv_0^2 = \mathfrak{T}F_1 + \mathfrak{T}F_2 + \ldots\ldots + \mathfrak{T}F_n$$

Cette équation subsistant, quelque petits que soient les éléments en lesquels on divise le temps t, elle est par suite applicable au cas d'une force variant d'une manière continue. Donc, *pour une force variable*, comme pour une force constante, *la variation de puissance vive est égale au travail de la force dans le même temps.*

526. 4° **Cas de plusieurs forces simultanées.** — Nous savons que toutes les forces agissant sur un point matériel peuvent se composer en une résultante R dont le travail élémentaire est égal à la somme algébrique des travaux élémentaires des composantes. En posant comme ci-dessus les équations pour les différents éléments de temps et les additionnant membre à membre, on aura :

$$\frac{1}{2}Mv^2 - \frac{1}{2}Mv_0^2 = \mathfrak{T}R = \Sigma\mathfrak{T}F$$

La variation de puissance vive est égale à la somme algébrique des travaux de toutes les forces.

527. Cas général du principe de l'effet du travail. — Considérons enfin le cas général d'un système quelconque de points matériels se mouvant d'une manière quelconque dans l'espace et soumis à un nombre quelconque de forces. Nous avons déjà dit que chacun des points matériels composant le système peut être considéré comme entièrement libre si l'on a égard à toutes les forces intérieures et extérieures qui agissent sur lui. Soient R, R′, R″.... les résultantes des forces intérieures et extérieures qui agissent sur chacun des points matériels de masse $m, m', m''...$, v et v_0, v' et v'_0, v'' et v''_0.... les vitesses initiale et finale de chacun d'eux; nous aurons, pour ces différents points matériels :

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \mathfrak{T}R$$

$$\frac{1}{2}m'v'^2 - \frac{1}{2}m'v'_0{}^2 = \mathfrak{T}R'$$

. . . . = . .

Si l'on fait la somme de toutes ces équations, le premier membre représentera la somme de toutes les puissances vives finales, diminuée de toutes les puissances vives initiales, c'est-à-dire la variation de la force vive du système, et le deuxième membre représentera la somme des travaux de toutes les forces intérieures et extérieures qui agissent sur le système.

Pour exprimer facilement cette relation qui sert de base à la théorie des machines, on a adopté la notation suivante :

$$\Sigma\frac{1}{2}mv^2 - \Sigma\frac{1}{2}mv_0^2 = \Sigma\mathfrak{T}F + \Sigma\mathfrak{T}f$$

ce qui s'énonce en disant que *la somme algébrique des puissances vives finales, diminuée de la somme algébrique des puissances vives initiales, est égale à la somme algébrique des travaux des forces extérieures, augmentée de la somme algébrique des travaux des forces intérieures.*

§ 3. — PRINCIPE DE LA TRANSMISSION DU TRAVAIL DANS LES MACHINES.

528. Des machines. — Nous avons déjà défini en Statique ce que l'on entend par machine. Nous pouvons dire ici d'une manière plus générale qu'*une machine est un corps ou un assemblage de corps destinés à transmettre le travail des forces.* L'emploi d'une machine a donc pour but, non-seulement de vaincre des résistances ou de mettre des forces en équilibre, mais encore de faire parcourir un certain chemin au point d'application de ces forces.

Dans les machines, même dans celles qui nous paraissent le plus compliquées, tous les organes qui les composent peuvent se grouper en 5 classes différentes : 1° le *récepteur ;* cet organe principal de la machine reçoit directement l'action du moteur ; 2° les *organes de transmission* dont nous avons étudié les principaux en Cinématique, et qui servent à transformer le mouvement suivant les besoins ; 3° les *organes de communication* ou *d'arrêt* qui servent à établir et à interrompre le mouvement ; 4° les *régulateurs* ou *modérateurs* qui servent à maintenir la vitesse normale de la machine dans des limites qu'elle ne doit

pas dépasser, et 5° l'*opérateur* ou *outil* destiné à produire l'ouvrage qu'on se propose.

529. Application du principe de l'effet du travail aux machines. — Pour appliquer le principe de l'effet du travail, rappelons que les forces agissant sur une machine sont de deux sortes : 1° les *forces motrices* ou *puissances* dont le travail est positif, et 2° les *forces retardatrices* ou *résistances* dont le travail est négatif. La somme des travaux développés pendant un temps quelconque par toutes les forces motrices appliquées à la machine s'appelle le *travail moteur*, et la somme des travaux développés pendant le même temps par toutes les forces résistantes, prises avec leur valeur absolue, prend le nom de *travail résistant*.

Désignons par $\mathfrak{T}_m$ le travail moteur et par $\mathfrak{T}_r$ le travail résistant développés pendant le temps t. La somme des travaux dus à toutes les forces qui agissent sur la machine pendant le temps considéré sera $\mathfrak{T}_m - \mathfrak{T}_r$ et nous aurons, en appliquant le cas général du principe de l'effet du travail,

$$\Sigma\frac{1}{2}mv^2 - \Sigma\frac{1}{2}mv_0^2 = \mathfrak{T}_m - \mathfrak{T}_r \quad (1)$$

Cette équation nous montre que *la variation de puissance vive de la machine pendant un temps quelconque* t *est égale à la différence entre le travail moteur et le travail résistant développés pendant le même temps.*

530. Transmission du travail dans les machines. — 1° Machines à l'état de mouvement uniforme. — Lorsque le mouvement d'une machine est uniforme, les vitesses de toutes les pièces restent constantes quelle que soit la durée t du temps considéré, et la variation de puissance vive est nulle ; le premier membre de l'équation (1) est égal à 0 et il vient :

$$\mathfrak{T}_r = \mathfrak{T}_m$$

Le travail résistant est constamment égal au travail moteur.

531. 2° Machines à l'état de mouvement périodique. — Le mouvement d'une machine est rarement uniforme ; généralement, ce mouvement est uniformément périodique, c'est-à-dire tel que les vitesses des différentes pièces de la machine passent par les mêmes valeurs au bout de chacune des périodes d'égale durée. Si l'on prend pour le temps t considéré la durée d'une de ces périodes, il est évident que les vitesses étant égales au commencement et à la fin de chacune d'elles, la variation de puissance vive est nulle et l'équation (1) donne :

$$\mathfrak{T}_r = \mathfrak{T}_m$$

pour la durée d'une période, et, par conséquent, pour la durée de la marche de la machine, composée d'un nombre quelconque de périodes.

532. 3° **Machines à l'état de mouvement quelconque.** — Lorsque le mouvement de la machine est tout à fait quelconque, l'égalité entre le travail moteur et le travail résistant n'existe plus pour un temps quelconque, ni même pour des périodes déterminées. Mais si l'on considère le temps total de la marche de la machine, c'est-à-dire depuis l'instant où elle se met en mouvement jusqu'à l'instant où elle redevient au repos, la vitesse étant égale à 0 au commencement et à la fin de la marche, le premier membre de l'équation (1) est annulé, et on a encore :

$$\mathfrak{T}_r = \mathfrak{T}_m$$

Ainsi donc, *quel que soit le mouvement d'une machine, le travail moteur développé pendant tout le temps qu'elle est en marche est égal au travail résistant pendant le même temps.*

Remarque. — Reprenons le cas le plus général d'une machine à l'état de mouvement périodique. La marche de cette machine peut se diviser en trois périodes : 1° *mise en train de la machine;* 2° *marche normale* et 3° *arrêt de la machine.* Nous venons de démontrer que, pendant la deuxième période, il y a égalité entre le travail moteur et le travail résistant. Les équations de la transmission du travail qui correspondent aux première et troisième périodes sont :

$$\Sigma\frac{1}{2}mv^2 = \mathfrak{T}_m - \mathfrak{T}_r; \quad -\Sigma\frac{1}{2}mv_0{}^2 = -\mathfrak{T}_r$$

En effet, pour la première période, les vitesses initiales des différentes parties sont nulles ; et le terme $\Sigma\frac{1}{2}mv^2{}_0$ est égal à 0.

Pendant la troisième période, les forces motrices n'agissent plus sur la machine, et son mouvement se ralentit jusqu'à ce

que les vitesses finales soient nulles ; par suite, les termes $\Sigma\frac{1}{2}mv^2$ et $\mathfrak{T}_m$ sont égaux à 0.

On voit que, pendant la première période, la différence entre le travail moteur et le travail résistant est égale à la puissance vive acquise par la machine, et si nous remarquons que les vitesses initiales de la troisième période sont précisément égales aux vitesses finales de la première, on peut dire que l'*excès du travail moteur dépensé pour mettre la machine en train est juste égal au travail résistant que cette machine accomplit sans dépense de travail moteur pour revenir au repos*. C'est ce qui fait dire encore que la machine *emmagasine*, sous forme de puissance vive, l'exès du travail moteur, lorsqu'il se produit, pour le restituer ensuite lorsqu'il fait défaut.

533. Équation du travail. — Ce qui précède nous montre qu'une machine, quelle qu'elle soit, transmet intégralement la quantité de travail qui lui est appliquée ; mais il ne faut pas oublier que, pour arriver à ce résultat, on doit tenir compte, dans l'évaluation du travail résistant, de toutes les forces intérieures et extérieures qui tendent à s'opposer au mouvement de la machine. Or ces forces extérieures sont de deux sortes : 1° les *résistances utiles*, c'est-à-dire celles qu'on applique à la machine en vue de l'ouvrage qu'elle doit produire, et 2° les *résistances passives*, c'est-à-dire celles qui se développent entre les diverses parties de la machine, par suite de son mouvement, telles que les frottements, les chocs, les vibrations. Ces résistances, qui n'ont rien de commun avec le travail qu'on se propose de produire, outre qu'elles absorbent une partie parfois considérable du travail moteur, détériorent la machine et nuisent à sa marche, car cette partie du travail ne pouvant pas être perdue est uniquement employée à échauffer et user les organes et à produire des vibrations qui, se transmettant aux supports, gênent le travail de l'outil.

Soit $\mathfrak{T}_u$ le travail dû aux résistances utiles et $\mathfrak{T}_f$ le travail dû aux résistances passives, nous aurons :

$$\mathfrak{T}_r = \mathfrak{T}_u + \mathfrak{T}_f$$

Introduisant cette valeur de $\mathfrak{T}_r$ dans l'équation (1), il vient :

$$\Sigma\frac{1}{2}mv^2 - \Sigma\frac{1}{2}mv_0{}^2 = \mathfrak{T}_m - \mathfrak{T}_u - \mathfrak{T}_f\,\frac{1}{2}$$

d'où l'on tire :

$$\mathfrak{T}_u = \mathfrak{T}_m - \mathfrak{T}_f - \left(\Sigma \frac{1}{2} mv^2 - \Sigma \frac{1}{2} mv_0^2\right)$$

et comme nous avons vu qu'en considérant un intervalle de temps suffisamment grand, la variation de puissance vive est nulle dans tous les cas, cette équation devient :

$$\mathfrak{T}_u = \mathfrak{T}_m - \mathfrak{T}_f \qquad (2)$$

ce qui montre que *le travail utile est plus petit que le travail moteur*, puisque, quelque parfaite que soit la machine, le terme $\mathfrak{T}_f$ n'est jamais nul.

534. Rendement d'une machine. — On appelle *coefficient d'effet utile* ou *rendement d'une machine*, le rapport du travail utilisé par cette machine au travail moteur qui lui a été fourni ; ce rapport est toujours inférieur à l'unité. En effet, de l'équation (2) on tire, en divisant par $\mathfrak{T}_m$:

$$\frac{\mathfrak{T}_u}{\mathfrak{T}_m} = 1 - \frac{\mathfrak{T}_f}{\mathfrak{T}_m}$$

Le rendement d'une machine est d'autant plus grand que les résistances passives sont plus faibles ; il constitue la valeur industrielle d'une machine. Les meilleures machines donnent un rendement qui varie entre 0,60 et 0,90.

535. Impossibilité du mouvement perpétuel. — La recherche du mouvement perpétuel consiste à trouver une machine qui, une fois mise en mouvement, continuerait indéfiniment à se mouvoir en produisant constamment un travail utile. Pour se convaincre de l'impossibilité de la réalisation d'une pareille machine, il suffit de se rappeler l'équation :

$$\mathfrak{T}_u = \mathfrak{T}_m - \mathfrak{T}_f$$

qui prouve que le travail utile est toujours plus petit que le travail moteur, en raison des résistances passives qui se développent par suite du mouvement même de la machine. Quelque parfait que soit le mécanisme, on ne parviendra jamais à annuler le travail résistant, et le travail moteur étant nul, le mouvement ne pourra pas rester uniforme ; la machine finira donc par s'arrêter forcément au bout d'un temps plus ou moins long, lors même qu'on ne lui fera produire aucun travail utile.

CHAPITRE III

RÉSISTANCES PASSIVES.

536. On appelle *résistances passives* les réactions qui, s'opposant au mouvement des machines, absorbent une certaine quantité de force motrice. Ces réactions sont de quatre espèces différentes :

1° Résistances des corps rigides : frottements de glissement et de roulement ;

2° Résistances des cordes et courroies : frottement et roideur ;

3° Résistance des milieux ;

4° Choc des corps.

§ 1. — RÉSISTANCES DES CORPS RIGIDES.

537. Frottement de glissement. — Lorsqu'on veut faire glisser un corps sur une surface plane et horizontale, l'expérience prouve qu'il faut exercer un certain effort pour le mettre en mouvement, et que, pour entretenir ce mouvement, il faut qu'il soit constamment soumis à l'action d'une force. La résistance qu'oppose ainsi le corps au glissement s'appelle *frottement*, et la force employée à le vaincre mesure son intensité. Le frottement provient seul de la constitution physique des corps ; ceux-ci n'étant jamais parfaitement polis et indéformables, il s'ensuit que les aspérités de l'un des corps s'engagent dans les aspérités de l'autre et que le corps glissant produit, en vertu de la pression, une déformation de la surface sur laquelle il repose, variant avec le degré de compressibilité de cette dernière.

538. Énoncé et démonstration expérimentale des lois du frottement. — Les expériences sur le frottement ont été faites, pour la première fois, en 1699, par Amontons. Elles furent reprises en 1781 par Coulomb qui en posa les lois, et les résultats auxquels il est parvenu ont été vérifiés, de 1831 à 1834, par le général Morin. On a reconnu que :