diamètre, s'enroulant sur la gorge d'une poulie de 0,80 de diamètre, et devant supporter un poids de 540 kilogrammes.

Pour une corde goudronnée de $0^m,021$ de diamètre, la table ci-dessus donn :

$$a = 0,234276$$
$$\text{et } b = 0,010051968$$

Or, le diamètre réel d'enroulement de la corde est égal au diamètre de la poulie augmenté de celui de la corde; on aura donc :

$$D = 0,080 + 0,021 = 0^m,821.$$

Par suite la formule (1) donne :

$$R = \frac{0,234276 + 0,010051968 \times 540}{0,821} = 68^k,96$$

§ 3. — RÉSISTANCE DES MILIEUX.

550. La *résistance des milieux* est la résistance qu'éprouvent les corps en mouvement de la part des fluides dans lesquels ils se meuvent.

Lorsqu'un mobile se déplace dans un fluide, comme par exemple une locomotive dans l'air ou un navire dans l'eau, il est forcé, pour se frayer sa route, d'écarter les molécules fluides qui se trouvent sur son passage. Ce corps met le fluide en mouvement sur une certaine étendue et par suite lui communique une puissance vive aux dépens de celle qu'il possède.

Il en résulte que pour entretenir le mouvement uniforme, il faut appliquer au mobile une force dont l'intensité est égale à la résistance qu'oppose le milieu.

Cette résistance varie avec la forme du corps; elle est proportionnelle : 1° *au carré de la vitesse ;* 2° *à la plus grande section faite perpendiculairement à la direction du mouvement*, et 3° *au poids spécifique du fluide.*

La résistance opposée par l'eau, au mouvement des corps, est beaucoup plus grande que celle exercée par l'air; néanmoins, cette dernière devient assez forte lorsque le corps ou le fluide est animé d'une grande vitesse.

§ 4. — CHOC DES CORPS.

551. On appelle *choc* le phénomène qui se produit lorsque deux corps animés de mouvements différents viennent à se rencontrer brusquement.

Tous les corps possèdent, à divers degrés, les propriétés physiques d'élasticité et de compressibilité ; mais nous admettrons, dans l'étude du choc, deux hypothèses : 1° les corps sont complètement dénués d'élasticité ; 2° les corps sont complètement élastiques. Nous supposerons, en outre, que les corps sont de forme sphérique et qu'ils se meuvent d'un mouvement rectiligne et uniforme suivant la ligne droite qui unit leurs centres de figure.

552. Choc des corps mous. — Soient A et B (*fig.* 351) les deux solides considérés de masse M et M', se mouvant suivant la ligne des centres CD, v la vitesse du corps A, et v' plus petite que v, celle du corps B, dirigée dans le même sens. A l'instant où les deux solides arrivent en contact, le corps A tend à imprimer instantanément sa vitesse au corps B ; il y a donc compression des molécules voisines du point de contact, et par suite déformation des corps aux environs de ce point. Sous l'influence des forces moléculaires ainsi développées, la vitesse v diminue, la vitesse v' augmente et, au bout d'un temps très petit, les corps A et B cheminent en contact avec une vitesse commune u. Si les corps sont complètement dénués d'élasticité, comme nous l'avons supposé, la déformation ne cesse qu'au moment où les vitesses deviennent égales et ces corps ne reviennent point à leur forme primitive.

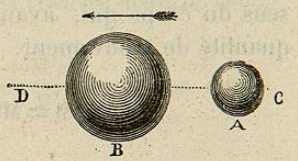

Fig. 351.

553. Détermination de la vitesse commune u. — 1° *Les corps vont dans le même sens.* Nous avons démontré (**507**) que les forces intérieures n'influent pas sur la variation de quantité de mouvement, et comme les corps ne se meuvent qu'en vertu de leurs vitesses initiales, c'est-à-dire sans être soumis à une force extérieure, il en résulte que la somme des quantités de mouvement avant et après le choc n'a pas changé ; on aura donc :

$$Mv + M'v' = (M + M')\,u$$

d'où :

$$u = \frac{Mv + M'v'}{M + M'}$$

$$\text{Si } M = M', \quad \text{il vient} \quad u = \frac{v + v'}{2}$$

La masse M étant infiniment grande par rapport à M′, on aura sensiblement $u = v$, et si le contraire a lieu, on aura $u = v'$.

554. 2° *Les corps vont en sens contraire.* — Il suffira, pour déterminer la vitesse commune, de prendre avec le signe — la vitesse v' dirigée en sens contraire des vitesses positives et l'on aura :

$$u = \frac{Mv - M'v'}{M + M'}$$

Le mouvement des corps aura lieu, après le choc, dans le sens du corps qui, avant le choc, possédait la plus grande quantité de mouvement.

$$\text{Si } M = M', \quad \text{il vient} \quad u = \frac{v - v'}{2}$$

La masse M étant infiniment grande par rapport à M′, on aura sensiblement $u = v$, et si le contraire a lieu, on aura $u = -v'$.

555. 3° *L'un des deux corps est au repos.* Le corps B étant au repos, on aura :

$$u = \frac{Mv}{M + M'}$$

$$\text{Si } M = M', \quad \text{il vient} \quad u = \frac{v}{2}$$

La masse M du corps choquant étant infiniment grande par rapport à M′, on aura $u = v$.

La masse M′ du corps choqué étant infiniment grande par rapport au corps choquant, on aura $u = o$. Exemple : Une balle de plomb tombant librement sur le sol.

556. Choc des corps élastiques. — Le choc des corps élastiques comporte deux périodes distinctes : 1° la période de *compression*, comme dans le choc des corps mous, et 2° la période pendant laquelle les corps, en raison de leur parfaite élasticité, reviennent à leur forme primitive. Au bout de la première période où les corps ont atteint leur maximum de compression, la vitesse du corps A a diminué de $v - u$ et celle du corps B a augmenté de $u - v'$; mais pendant la deuxième période, les réactions moléculaires qui ramènent les corps à leur forme primitive produisent des variations de vitesse égales aux précédentes, de sorte que les vitesses w et w' des corps A et B, après le choc, sont données par les formules :

$$w = v - 2(v - u) = 2u - v \qquad (1)$$

$$w' = v' + 2(u - v') = 2u - v' \qquad (2)$$

En retranchant membre à membre, il vient :

$$w - w' = -(v - v')$$

c'est-à-dire que *la vitesse relative des deux corps après le choc est égale, en grandeur absolue, à leur vitesse relative avant le choc, mais elle est de signe contraire.*

En remplaçant u par sa valeur $\dfrac{Mv + M'v'}{M + M'}$ dans les équations (1) et (2), on aura :

$$w = \frac{2(Mv + M'v')}{M + M'} - v = \frac{Mv + 2M'v' - M'v}{M + M'} \qquad (3)$$

$$w' = \frac{2(Mv + M'v')}{M + M'} - v' = \frac{2Mv + M'v' - Mv'}{M + M'} \qquad (4)$$

557. Détermination de la vitesse des corps après le choc. — 1° *Les corps vont dans le même sens.*

Les vitesses des corps A et B sont, comme nous venons de le prouver,

$$w = 2u - v \quad \text{et} \quad w' = 2u - v'$$

$$\text{Si } M = M', \quad \text{on a} \quad u = \frac{v + v'}{2}$$

et par suite $\quad w = v + v' - v = v' \;$ et $\; w' = v + v' - v' = v$

Les corps échangent leurs vitesses.

La masse M étant infiniment grande par rapport à M′, on a $u = v$, et par suite :

$$w = 2v - v = v \quad \text{et} \quad w' = 2v - v'$$

La vitesse du corps choquant n'est pas changée, tandis que le *corps choqué part avec une vitesse égale au double de celle du corps choquant, diminuée de sa vitesse primitive.*

La masse M′ étant infiniment grande par rapport à M, on a $u=v$, et par suite :

$$w=2v'-v \quad \text{et} \quad w'=v'$$

La vitesse du corps choqué n'est pas changée, tandis que le corps choquant part avec une vitesse égale au double de celle du corps choqué, diminuée de sa vitesse primitive; ce dernier continue son chemin dans le même sens, s'arrête ou revient en sens contraire, suivant que sa vitesse primitive est plus petite, égale ou plus grande que le double de celle du corps choquant.

558. 2° *Les corps vont en sens contraire.* Le corps B marchant en sens contraire du corps A, il suffira de changer le signe de la vitesse v' et l'on aura :

$$w=2u-v \quad \text{et} \quad w'=2u+v'$$

$$\text{Si } M=M', \quad \text{on a} \quad u=\frac{v-v'}{2}$$

et par suite : $w=v-v'-v=-v'$ et $w'=v-v'+v'=v$

Les corps retournent en arrière en échangeant leurs vitesses.

La masse M étant infiniment grande, par rapport à M′, on a $u=v$; par suite :

$$w=2v-v=v \quad \text{et} \quad w'=2v+v'$$

La vitesse du corps choquant n'est pas changée, tandis que le corps choqué retourne en arrière avec sa vitesse primitive augmentée du double de celle du corps choquant.

La masse M′ étant infiniment grande par rapport à M, on a $u=-v'$, et par suite :

$$w=-2v'-v=-(2v'+v) \quad \text{et} \quad w'=-v'$$

La vitesse du corps choqué n'est pas changée, tandis que le corps choquant retourne en arrière avec une vitesse égale à sa vitesse primitive augmentée du double de celle du corps choqué.

559. 3° *L'un des deux corps est au repos.* Si le corps B est au repos, la vitesse du corps A, après le choc, sera évidemment $2u-v$ et celle du corps choqué $2u$.

$$\text{Si } M=M', \quad \text{on a} \quad u=\frac{v}{2}$$

et par suite : $w=v-v=0$ et $w'=v$

Le corps choquant s'arrête et le corps choqué part avec la vitesse de la masse M. Exemple : Une bille de billard, lancée suivant la ligne des centres, contre une bille au repos.

La masse M étant infiniment grande par rapport à M′, on a $u=v$; par suite :

$$w=v \quad \text{et} \quad w'=2v$$

Le corps choqué part avec une vitesse double de celle du corps choquant.

La masse M′ étant infiniment grande par rapport à M, on a $u=o$, et par suite :

$$w=-v \quad \text{et} \quad w'=0$$

Le corps choquant revient en arrière avec sa propre vitesse. Exemple : Une bille d'ivoire tombant sur une table de marbre.

560. Vérification expérimentale. — Tout ce que nous venons d'exposer, relativement au choc des corps élastiques, peut se vérifier expérimentalement à l'aide de l'appareil représenté par la figure 352, auquel on peut suspendre deux ou plusieurs billes égales, en ivoire, de manière à ce qu'elles se touchent suivant la ligne des centres.

Suspendons, en premier lieu, deux billes A et B; écartons la bille A comme le montre la figure 353, et laissons retomber ensuite cette bille sous l'action de la pesanteur. La bille A, animée d'une certaine vitesse, venant choquer la bille B au repos, représente le cas que nous avons examiné (**559**) pour les corps élastiques de masse M = M′. On voit en effet qu'après le choc, la bille A reste immobile, et la bille B se met en mouvement, et s'élève, en décrivant un arc de cercle autour de son point de suspension comme centre, à une hauteur égale à celle dont on a laissé tomber la bille A.

La bille B redescend, vient choquer l'autre et s'arrête; la bille A repart à son tour, puis redescend et ainsi de suite jusqu'à ce que les résistances passives aient annulé le mouvement.

Si on écarte simultanément les deux billes, qu'on les élève à la même hauteur et qu'on les laisse tomber en même temps, elles viennent se choquer sur la verticale et on constate ce que nous avons démontré (**558**) pour les corps de même masse,

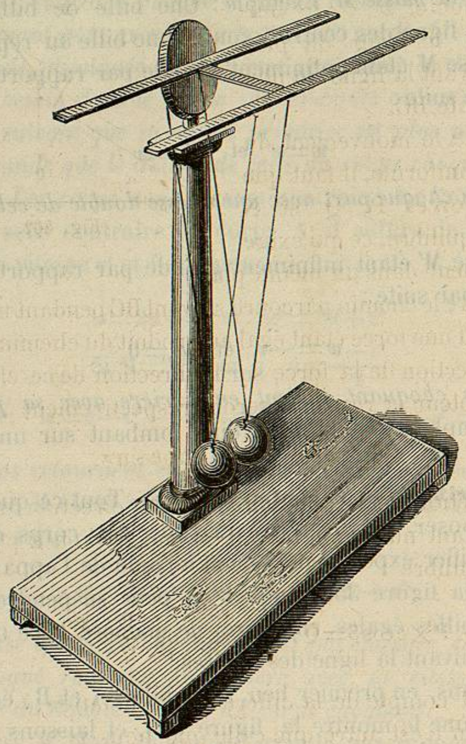

Fig. 352.

animés de vitesses égales et de sens contraire : après le choc, les deux billes repartent en s'éloignant avec la vitesse qu'elles possédaient au moment du choc, et s'élèvent à la hauteur dont elles sont descendues.

Si on laisse tomber les billes d'une hauteur différente, on voit qu'après le choc les billes retournent en arrière en échangeant leurs vitesses, ce que l'on constate en remarquant que chaque bille s'élève à la hauteur dont est descendue l'autre.

Suspendons, maintenant, un plus grand nombre de billes, sept par exemple (*fig.* 354). Nous allons constater un phénomène remarquable : c'est que le mouvement ne se communique pas instantanément à toute la masse ; il se propage, au contraire, de molécule à molécule, mais dans un temps infiniment court.

Écartons et laissons retomber la première bille comme dans la première expérience ; il est évident que si le mouvement se communiquait instantanément à toute la masse, c'est-à-dire aux six billes au repos, le corps choquant, au lieu de

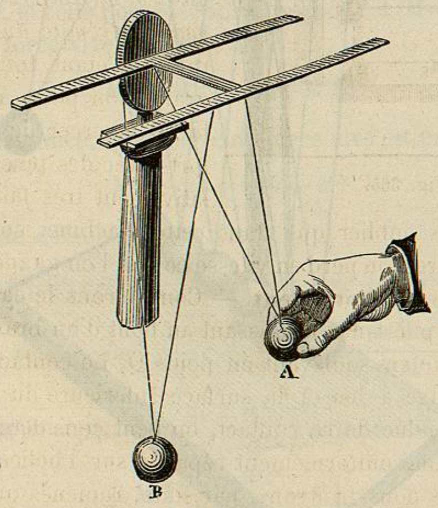

Fig. 353.

rester immobile, comme dans le premier cas, reviendrait en arrière après avoir choqué une masse six fois plus grande. Mais les choses ne se passent pas ainsi, et on voit la bille A rester au repos après le choc et la bille B partir aussitôt avec la vitesse que possédait la bille A, tandis que les cinq billes intermédiaires restent immobiles.

Ce phénomène s'explique, comme nous le disions plus haut, par la communication successive du mouvement. Au moment du choc de la bille A contre la bille C, les périodes de compression et de décompression sont terminées avant que le mouvement ait pu se communiquer à la troisième bille ; le choc a donc lieu comme si les deux billes A et C étaient absolument seules. Après ce choc, la bille C possède une vitesse égale à celle dont était animée la bille A, et communique intégralement cette vitesse à la troisième bille, laquelle la transmet à la quatrième et ainsi de suite. La dernière bille B, étant libre de se

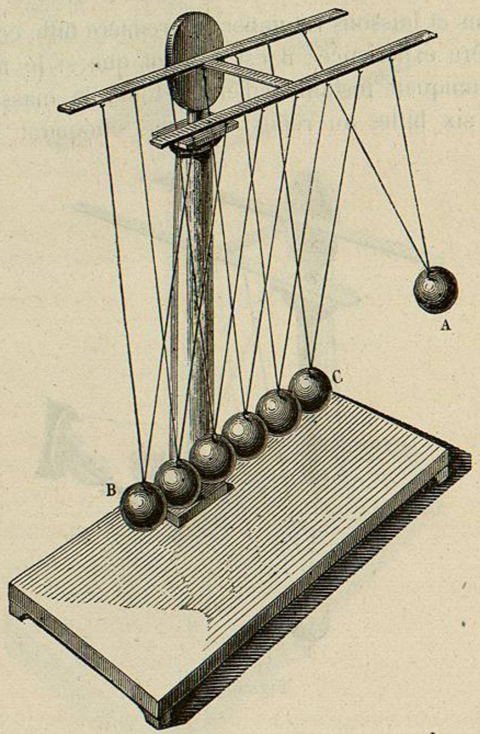

Fig. 354.

mouvoir, part et s'élève à la hauteur dont la première est descendue.

Enfin, en écartant à la fois les deux premières billes A et C et les laissant tomber ensemble, on voit les deux dernières se mettre en mouvement et les trois intermédiaires rester au repos; si on laisse retomber à la fois les trois premières billes, les trois dernières se mettent en mouvement; ce qui prouve que la masse qui se déplace est égale à la masse choquante.

561. Perte de travail dans le choc des corps. — 1° Cas des

corps mous. — La déformation produite dans le choc des corps mous détermine une perte de force vive qui est absorbée par les forces moléculaires; nous allons déterminer cette perte, dont la moitié, égale à la puissance vive, représentera le travail perdu.

Théorème de Carnot. — **La perte de force vive est égale à la somme des forces vives correspondant aux vitesses perdues ou gagnées par les deux corps.** — 1° *Les corps vont dans le même sens.*

La force vive possédée par les corps, avant le choc, est $Mv^2+M'v'^2$, et celle possédée après le choc est $(M+M')u^2$; donc la perte de force vive est égale à :

$$Mv^2+M'v'^2-(M+M')u^2$$

D'après l'énoncé, cette perte de force vive est exprimée par :

$$M(v-u)^2+M'(u-v')^2$$

Il s'agit de démontrer que l'on a :

$$Mv^2+M'v'^2-(M+M')u^2=M(v-u)^2+M(u'-v')^2$$

En effet, remplaçons u par sa valeur $\dfrac{Mv+M'v'}{M+M'}$; il vient :

$$Mv^2+M'v'^2-(M+M')\left(\frac{Mv+M'v'}{M+M'}\right)^2=M\left(v-\frac{Mv+M'v'}{M+M'}\right)^2$$
$$+M'\left(\frac{Mv+M'v'}{M+M'}-v'\right)^2$$

Pour simplifier cette équation et faire voir que les deux membres sont égaux, prenons séparément chacun d'eux; le premier devient, en réduisant au même dénominateur et mettant MM' en facteur commun :

$$\frac{MM'(v^2+v'^2-2vv')}{M+M'}=\frac{MM'(v-v')^2}{M+M'}$$

Le second membre devient successivement :

$$M\left(\frac{M'(v-v')}{M+M'}\right)^2+M'\left(\frac{M(v-v')}{M+M'}\right)^2=\frac{MM'^2(v-v')^2}{(M+M')^2}+\frac{M'M^2(v-v')^2}{(M+M')^2}$$
$$=\left(\frac{v-v'}{M+M'}\right)^2(MM'^2+M^2M')=\left(\frac{v-v'}{M+M'}\right)^2(M+M')(MM')=\frac{MM'(v-v')^2}{M+M'}$$

Donc, en définitive,

$$\frac{MM'(v+v')^2}{M+M'} - \frac{MM'(v-v')^2}{M+M'}$$

ce qu'il fallait démontrer.

2° *Les corps vont en sens contraire.* La perte de force vive sera exprimée, en opérant comme précédemment, par l'expression :

$$\frac{MM'(v+v')^2}{M+M'}$$

3° *L'un des corps est au repos.* Dans ce cas, l'expression de la force vive perdue est donnée par l'équation :

$$\frac{MM' \times v^2}{M+M'}$$

Remarque. — Quel que soit le cas considéré, il y a toujours une perte de travail dans le choc des corps mous, et toutes choses égales d'ailleurs, la perte maximum est relative au cas où les corps sont animés de vitesses de sens contraire.

562. Cas des corps élastiques. — Pendant la première période du choc des corps élastiques, ceux-ci absorbent, comme dans le choc des corps mous, une certaine quantité de force vive déterminée par leur déformation; mais, pendant la deuxième période, ils restituent intégralement, pour revenir à leur forme primitive, toute la force vive qu'ils avaient précédemment absorbée pour se comprimer. Ainsi, dans le choc des corps parfaitement élastiques, la force vive perdue est complètement nulle.

563. Conséquences. — Les corps qui sont employés dans l'industrie pour la construction des machines, n'étant pas d'une élasticité parfaite, ils se déforment lentement s'ils sont soumis à des chocs réitérés; par suite, leur élasticité s'altère et il y a une plus ou moins grande perte de travail. En outre, les chocs donnent naissance à des ébranlements, des vibrations qui, se transmettant aux pièces voisines, absorbent encore une perte de la force vive initiale, détériorent les organes et altèrent leur stabilité.

Les chocs doivent donc être évités avec soin dans les machines et, pour cela, les organes qui les composent doivent se communiquer le mouvement sans variation brusque de vitesse.

Si le choc ne peut être évité, on en diminue l'intensité par l'interposition de ressorts élastiques (ressorts de suspension, tampons de choc), comme dans les voitures et les wagons.

§ 5. — APPLICATIONS UTILES DES RÉSISTANCES PASSIVES.

Jusqu'ici, nous avons présenté les résistances passives comme ayant, dans les machines, une influence nuisible que l'on doit atténuer par tous les moyens possibles, pour obtenir le maximum d'effet utile. Mais ces résistances reçoivent aussi des applications très utiles que nous devons faire connaître.

564. Freins. — Les *freins* sont des appareils qui servent à

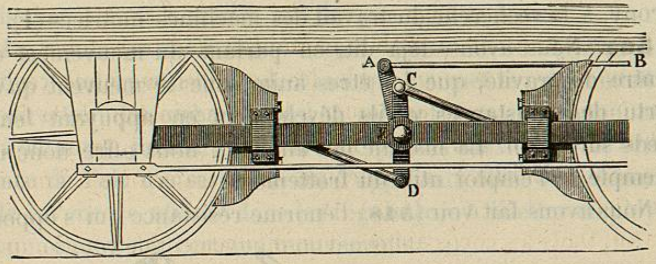

Fig. 355.

ralentir et même à arrêter le mouvement des voitures et des wagons, en augmentant le frottement. Ils se composent généralement de deux pièces de bois que l'on oblige à s'appuyer fortement entre les jantes des roues. La figure 355 représente le frein d'un wagon. Les deux pièces de bois qui embrassent une partie de la jante des roues sont fixées aux extrémités de deux barres articulées en C et D avec un levier CD calé sur l'axe E; celui-ci porte un autre bras de levier EA auquel est articulée une tringle AB. En agissant sur cette tringle pour l'amener vers la droite, le levier CD tournera dans le même sens, et, par suite, les morceaux de bois viendront presser fortement les roues.

Dans les machines destinées à l'élévation des matériaux, comme les grues, on emploie un frein, appelé *frein à ruban*, qui a pour but de ralentir le mouvement de l'appareil lorsqu'on fait descendre un fardeau. Il se compose d'une lame flexible de tôle entourant une poulie et dont les extrémités sont fixées à une pièce BC (*fig.* 356); cette pièce fait partie d'un levier AD mobile autour du point A. En soulevant l'extrémité D du levier, on applique fortement la lame contre la jante de la poulie et on détermine ainsi un frottement considérable qui ralentit la vitesse de l'appareil. Sur la figure 177, le frein est adapté à gauche de la roue F.

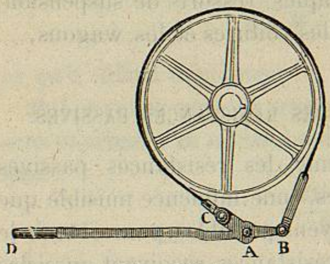

Fig. 356.

Le frottement est aussi employé utilement dans le frein de Prony, à la recherche du travail des machines motrices (1).

565. Nous avons déjà dit, en parlant du mouvement du centre de gravité, que les êtres animés ne se meuvent qu'en vertu des résistances qu'ils développent en appuyant leurs pieds sur le sol. La marche des animaux nous offre donc un exemple de l'emploi utile du frottement.

Nous avons fait voir (**548**) l'énorme résistance qui s'oppose

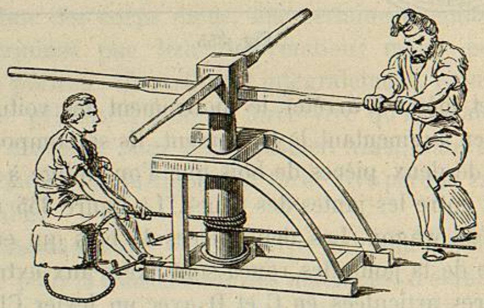
Fig. 357.

au glissement des cordes sur les tambours. Cette résistance est mise à profit dans le cabestan (*fig.* 357). La corde, au lieu d'être fixée au tambour, comme dans le treuil, y fait seulement deux ou trois tours et l'extrémité libre est maintenue par un manœuvre qui la tire au fur et à mesure que le cylindre tourne.

(1) Pour les différents freins perfectionnés, voir la seconde partie de ce Traité, pages 357 et suivantes.

Si nous voulons connaître l'effort que devra exercer le manœuvre pour empêcher le glissement d'une corde faisant deux tours sur un cabestan et dont l'autre brin supporte une tension de 400 kilog., nous n'avons qu'à appliquer la formule (3) et prendre la valeur de A dans le tableau; nous aurons :

$$Q = \frac{P}{A} = \frac{400}{63,23} = 6^{k},33$$

On applique le même principe pour arrêter court un bateau dont la marche est déjà ralentie. On jette à terre l'extrémité libre d'une corde dont l'autre extrémité est attachée au bateau; un homme ramasse cette corde et lui fait faire rapidement deux ou trois tours sur un poteau fixé verticalement sur la rive. Il suffit à cet homme d'exercer un faible effort pour empêcher le glissement de la corde et arrêter par suite le bateau.

La résistance des milieux reçoit également des applications utiles; c'est la résistance de l'eau qui permet le mouvement et la direction des embarcations en servant de point d'appui aux propulseurs, rames, roues et aux gouvernails. C'est la résistance de l'air qui sert de point d'appui aux ailes des oiseaux; elle est encore utilisée dans les régulateurs à ailettes employés pour régulariser certains mouvements.

Enfin, le choc est un moyen d'action employé pour exercer de grands efforts; ainsi, on agit par percussion dans le battage des pieux, dans les travaux de forge, etc.

Les corps destinés à recevoir l'action des chocs violents, tels que les enclumes ordinaires et celles des marteaux-pilons, ne reposent pas directement sur le sol : on les place sur de gros blocs de bois et sur des planchers très élastiques, afin de rendre presque insensible la vitesse qui leur est communiquée par l'effet du choc.