CHAPITRE IV

APPLICATION DU PRINCIPE DE LA TRANSMISSION DU TRAVAIL DANS LES MACHINES

Pour terminer la Dynamique, nous allons nous proposer d'appliquer le principe de la transmission du travail, à la recherche des conditions d'équilibre dans quelques machines simples.

566. 1° Levier. — Quel que soit le genre du levier que nous considérerons, il faut, pour que cette machine soit en équilibre, que la résultante de la puissance P, de la résistance Q et de la réaction R du point d'appui, soit nulle, ce qui exige que les forces P et Q se trouvent dans un même plan avec le point d'appui.

Supposons maintenant que le levier AB (*fig.* 358) tourne, pendant un temps très petit t, d'une très petite quantité autour du point C et dans le plan de la figure. Les bras de levier Ca, Cb devant constamment rester perpendiculaires à la direction des forces, tourneront du même angle que le levier, et les travaux moteur et résistant développés pendant le temps t seront égaux. Si nous appelons ω l'arc décrit pendant le temps t par le point situé à l'unité de distance du point d'appui, les arcs décrits par les points d'application des forces P et Q seront $\omega \times Ca$ et $\omega \times Cb$; et comme ces arcs sont très petits, leurs directions se confondront avec celles des forces P et Q ; par suite les travaux moteur et résistant développés pendant cette petite rotation

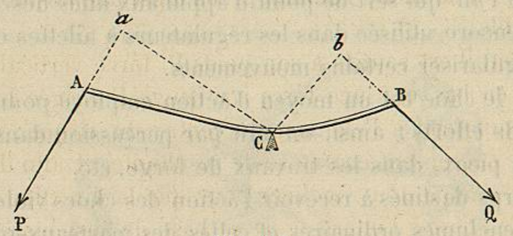

Fig. 358.

seront respectivement :

$$P \times \omega \times Ca \quad \text{et} \quad Q \times \omega \times Cb$$

Le travail développé par la réaction R étant nul à cause de la fixité du point C, on aura pour la relation d'équilibre :

$$P \times \omega \times Ca = Q \times \omega \times Cb$$

d'où l'on tire :

$$\frac{P}{Q} = \frac{Cb}{Ca}$$

La puissance et la résistance sont en raison inverse de leurs bras de levier. C'est la même relation que nous avons trouvée en statique (**171**).

Si le bras de levier de la puissance est 100 fois plus grand que le bras de levier de la résistance, celle-ci sera 100 fois plus grande que la puissance ; mais il faut remarquer que le point d'application de la puissance parcourra un chemin 100 fois plus grand que celui parcouru dans le même temps par le point d'application de la résistance. C'est ce qui a fait dire qu'*on perd en vitesse ce que l'on gagne en force et réciproquement*.

567. Levier en tenant compte du frottement. — Il arrive souvent que l'axe de rotation ne se confond pas avec l'arête d'appui comme, par exemple, lorsque le levier tourne autour d'un tourillon; dans ce cas, il n'est plus permis de négliger le travail du frottement. Pour évaluer ce travail, désignons par N la pression sur le tourillon et par r le rayon de ce tourillon; la valeur du frottement sera Nf et son travail pendant le temps très petit t sera :

$$Nf \times \omega r$$

et, en représentant par l et l' les bras de levier de la puissance et de la résistance, l'équation complète de l'équilibre s'exprimera ainsi :

$$Pl\omega = Ql'\omega + Nf\omega r$$

d'où, en divisant tous les termes par ω :

$$P = \frac{Ql' + Nfr}{l}$$

Telle est la valeur réelle qu'il faudra donner à la puissance P pour équilibrer la résistance Q.

Pour déterminer la pression normale N, il faut considérer deux cas :

1° Les forces P et Q sont parallèles, leur résultante est égale à leur somme et l'on a :

$$N = P + Q$$

2° Les directions des forces font entre elles un certain angle α; dans ce cas, comme nous l'avons vu (**172**), la pression sera donnée par la relation :

$$N = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha}$$

568. 2° **Poulie fixe.** — Soient A et B (*fig.* 359) les points d'application de la puissance P et de la résistance Q. Dans cette machine, le chemin parcouru par la puissance est égal au chemin parcouru pendant le même temps par la résistance; en l'appelant e, pour un temps quelconque t, les travaux moteur et résistant seront respectivement :

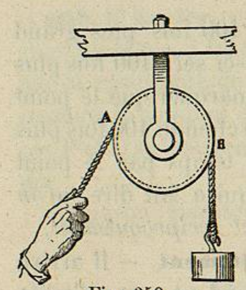

Fig. 359.

$$P \times e \quad \text{et} \quad Q \times e$$

Le travail de la réaction de l'axe étant nul à cause de la fixité de cet axe, on a pour la relation d'équilibre :

$$P \times e = Q \times e \quad \text{d'où} \quad P = Q$$

La puissance est égale à la résistance. — Cette même relation avait été trouvée en statique (**196**).

569. Poulie fixe en tenant compte du frottement et de la roideur de la corde. — Supposons que la poulie ait fait un tour et appelons N la pression supportée par le tourillon, r le rayon de la poulie augmenté de celui de la corde, et r' le rayon du tourillon.

En ne tenant compte que du frottement, l'équation du travail sera :

$$P \times 2\pi r = Q \times 2\pi r + Nf \times 2\pi r'$$

En divisant tous les membres par 2π et tirant la valeur de P nous aurons :

$$P = \frac{Qr + Nfr'}{r} = Q + \frac{Nfr'}{r}$$

Nous avons appris en statique (**197**) à déterminer la valeur de la pression supportée par l'axe.

Si nous voulons tenir compte de la roideur de la corde, en nous rappelant (**549**) que cette roideur est donnée par la formule $\frac{a + bQ}{2r}$, l'équation du travail s'écrira :

$$P \times 2\pi r = Q \times 2\pi r + Nf \times 2\pi r' + \frac{a + bQ}{2r} \times 2\pi r$$

ou, en divisant tous les membres par 2π :

$$Pr = Qr + Nfr' + \frac{a + bQ}{2r} r$$

ou bien encore :

$$Pr = Qr + Nfr' + \frac{1}{2}(a + bQ)$$

d'où l'on tire la valeur de la puissance P qui fait équilibre à la résistance Q :

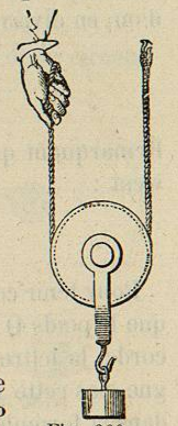
Fig. 360.

$$P = Q + \frac{Nfr'}{r} + \frac{a + bQ}{2r}$$

Si les deux brins sont parallèles, on a :

$$N = P + Q$$

et en remplaçant il vient :

$$P = \frac{Q(r + fr') + \frac{1}{2}(a + bQ)}{r - fr'}$$

570. 3° **Poulie mobile.** — Prenons le cas le plus fréquent dans la pratique, où les cordons AP et BC (*fig.* 360) sont parallèles. Dans ce cas, la portion de corde tirée se répartit également entre les deux brins, et le fardeau ne s'élève que de la moitié de cette portion; le chemin parcouru par la puissance pendant un temps quelconque t est double de celui que parcourt la résistance pendant le même temps. Si nous appelons e le chemin parcouru par la résistance Q, le chemin parcouru par la puissance P sera $2e$, et les travaux moteur et résistant seront respectivement :

$$P \times 2e \quad \text{et} \quad Q \times e$$

La réaction du point fixe C ne donnant lieu à aucun travail, la relation d'équilibre sera :

$$P \times 2e = Q \times e; \quad \text{d'où} \quad P = \frac{Q}{2}$$

La puissance est égale à la moitié de la résistance.

En remarquant que la résistance parcourt un chemin moitié de celui qui est parcouru par la puissance, on voit encore que l'on perd en vitesse ce que l'on gagne en force.

571. Poulie mobile en tenant compte du frottement et de la roideur de la corde. — Reprenons le cas où les cordons sont parallèles, et conservons la même notation que pour la poulie fixe. Si nous ne tenons compte que du frottement, l'équation du travail pour une révolution de la poulie sera exprimée par :

$$P \times 2\pi r = Q \times \pi r + Nf \times 2\pi r'$$

d'où, en divisant tous les membres par $2\pi r$:

$$P = \frac{Q}{2} + \frac{Nfr'}{r}$$

Remarquant que dans cet appareil $N = Q$, la valeur de P devient :

$$P = Q\left(\frac{1}{2} + \frac{fr'}{r}\right)$$

Pour tenir compte de la roideur de la corde, il faut observer que le poids Q à soulever n'étant pas directement attaché à la corde, la lettre Q de la formule exprimant la roideur ne désigne pas cette résistance ; la valeur qu'il convient d'introduire dans la formule est celle de la tension du cordon fixe, qui dans ce cas est égale à $\frac{Q}{2}$. Par suite nous aurons :

$$P \times 2\pi r = Q\pi r + Qf \times 2\pi r' + \frac{a + b\frac{Q}{2}}{2r} \times 2\pi r$$

et en divisant, comme précédemment, tous les termes par $2\pi r$:

$$P = \frac{Q}{2} + \frac{Qfr'}{r} + \frac{a + b\frac{Q}{2}}{2r}$$

ou encore, en mettant Q en facteur commun :

$$P = Q\left(\frac{1}{2} + \frac{fr'}{r} + \frac{b}{4r}\right) + \frac{a}{2r}$$

Lorsque les deux brins de la corde ne sont pas parallèles, on évalue la tension du cordon BC comme nous l'avons appris en statique.

La puissance ayant à vaincre non seulement la résistance utile, mais aussi le frottement et la roideur de la corde, l'angle que la direction de son brin fait avec la verticale est forcément plus petit que celui du cordon fixe. Il en résulte que pour avoir la théorie exacte, il faudrait faire intervenir la valeur de ces deux angles. Cependant, comme leur différence est toujours très petite, on ne s'en préoccupe pas dans la pratique et on admet, comme nous l'avons fait, que la verticale passant par l'axe de la poulie est la bissectrice de l'angle formé par les deux cordons.

572. 4° Treuil. — Soient R (*fig.* 361) le rayon de la circonférence décrite par l'extrémité du levier ou de la manivelle, r le rayon du tambour augmenté de celui de la corde, P la puissance agissant tangentiellement à la circonférence R, et Q la résistance agissant tangentiellement à la circonférence r.

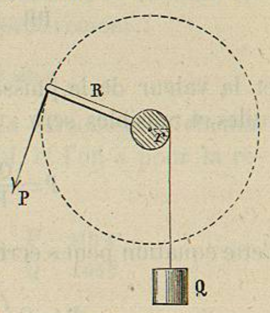

Fig. 361.

Supposons que la machine tourne pendant un temps infiniment petit t ; si nous appelons ω l'arc décrit par le point situé à l'unité de distance, les arcs décrits par les points d'application de la puissance et de la résistance seront $R\omega$ et $r\omega$, et comme ces arcs sont très petits, ils se confondront sensiblement avec leur tangente, c'est-à-dire avec les directions des forces P et Q. Les travaux moteur et résistant développés pendant le temps t seront respectivement :

$$P \times R\omega \quad \text{et} \quad Q \times r\omega$$

Si nous négligeons le frottement des tourillons sur leurs coussinets, les réactions des supports ne donnent lieu à aucun travail, car elles sont normales aux surfaces en contact et ont, par suite, des projections nulles sur la direction du chemin que parcourent leurs points d'application. La relation d'équilibre sera donc :

$$P \times R\omega = Q \times r\omega \quad \text{d'où} \quad \frac{P}{Q} = \frac{r}{R}$$

La puissance et la résistance sont inversement proportionnelles au rayon du tambour et à la longueur de la manivelle, ou encore *en raison inverse de leurs bras de levier,* relations que nous avions déjà trouvées (**207**).

573. Treuil avec frottement et roideur de la corde. — Avec la même notation que dans le cas précédent et en appelant r' le rayon des tourillons, l'équation du travail pour une révolution sera donnée par :

$$P \times 2\pi R = Q \times 2\pi r + Nf \times 2\pi r' + \frac{a + bQ}{2r} \times 2\pi r$$

d'où, en divisant tous les membres par 2π :

$$PR = Qr + Nfr' + \frac{a + bQ}{2}$$

et la valeur de la puissance qui fait équilibre aux résistances utiles et nuisibles sera :

$$P = \frac{Qr}{R} + \frac{Nfr'}{R} + \frac{a}{2R} + \frac{bQ}{2R}$$

Cette équation peut s'écrire plus simplement :

$$P = Q\left(\frac{r}{R} + \frac{b}{2R}\right) + \frac{Nfr'}{R} + \frac{a}{2R}$$

Ou bien encore :

$$P = Q\left(\frac{r}{R} + \frac{b}{2R}\right) + \frac{1}{R}\left(Nfr' + \frac{a}{2}\right)$$

Nous avons appris en statique (**208**) comment on calcule la pression supportée par des tourillons.

574. 5° Plan incliné. — Pour cette machine, nous examinerons également deux cas : le premier, celui où le plan et le corps sont complètement incompressibles et parfaitement polis, et le second, le cas général où le plan et le corps sont plus ou

moins compressibles et plus ou moins hérissés d'aspérités.

Premier cas. — Le plan et le corps étant parfaitement polis et indéformables, la réaction du plan est normale à sa surface, et dirigée suivant GN.

Soient ABC (*fig.* 362) le plan incliné, Q la résistance ou le poids du corps et P la puissance qui fait monter ce corps uniformément le long du plan incliné suivant la ligne de plus grande pente BC.

Pour que le mouvement du corps soit uniforme, il faut que les trois forces P, Q et N soient en équilibre, ce qui exige qu'elles soient dans un même plan.

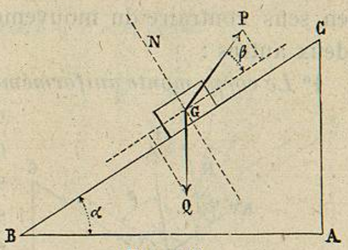

Fig. 362.

Appelons e le chemin parcouru suivant BC pendant un temps t. Le travail d'une force étant égal au produit du chemin parcouru par la projection de la force sur la direction de ce chemin, les travaux moteur et résistant seront respectivement :

$$P \times e \cos\beta \quad \text{et} \quad Q \times e \sin\alpha$$

La projection de la réaction N sur la direction du chemin parcouru étant nulle, son travail est nul, et l'on a pour la relation d'équilibre :

$$P \times e \cos\beta = Q \times e \sin\alpha; \quad \text{d'où} \quad \frac{P}{Q} = \frac{\sin\alpha}{\cos\beta}$$

En tenant compte de la différence de notation, on voit que cette relation n'est autre que celle que nous avons trouvée en statique (**224**).

Si l'on supposait le corps descendant uniformément le long du plan, on arriverait également à la même relation.

Il est facile de voir que si on examinait les cas particuliers où la puissance P est parallèle, soit à la longueur, soit à la base du plan incliné, on arriverait pareillement aux relations

$$\frac{P}{Q} = \frac{AC}{BC} \quad \text{et} \quad \frac{P}{Q} = \frac{AC}{AB}$$

trouvées précédemment.

DEUXIÈME CAS. — *Plan incliné avec frottement.* — Considérons maintenant le cas général d'un plan et d'un corps plus ou moins polis et plus ou moins déformables. La réaction R du plan, normale toujours à la surface réelle de contact, sera inclinée par rapport à la surface apparente et se trouvera dirigée en sens contraire du mouvement. Nous diviserons ce cas en deux autres :

1° *Le corps monte uniformément.* — La force P (*fig.* 363) agit comme puissance et le poids du corps Q et la réaction R agissent comme résistances. Supposons que le corps parcoure un chemin e pendant un temps t: le travail moteur dû à la force P sera $P \times e \cos\beta$; le travail résistant développé par le poids du corps Q sera $Q \times e \sin\alpha$, et le travail également résistant de la réaction R sera $R \times e \sin\varphi$, en appelant φ l'angle du frottement.

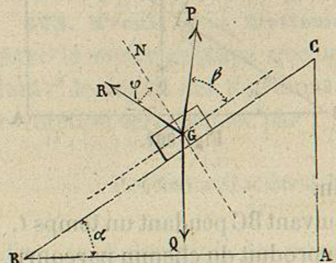

Fig. 363.

Pour l'équilibre, le travail moteur devant être égal à la somme des travaux résistants, nous aurons :

$$P \times e \cos\beta = Q \times e \sin\alpha + R \times e \sin\varphi$$

et en divisant tous les termes par e :

$$P \cos\beta = Q \sin\alpha + R \sin\varphi$$

Le terme $R \sin\varphi$ n'est autre chose que l'intensité du frottement; or, nous savons que cette intensité s'obtient en multipliant la pression normale $Q \cos\alpha$ par le coefficient de frottement f, c'est-à-dire que l'on a :

$$R \sin\varphi = Qf \cos\alpha$$

En remplaçant, il vient :

$$P \cos\beta = Q(\sin\alpha + f \cos\alpha)$$

2° *Le corps descend uniformément.* — Le poids P du corps (*fig.* 364) agit comme puissance, et la force Q ainsi que la réaction R agissent comme résistances. Pour un chemin parcouru e, le travail moteur dû à la puissance P sera $P \times e \sin\alpha$; le travail

résistant développé par la force Q sera $Q \times e \cos\beta$, et le travail également résistant de la réaction R sera $R \times e \sin\varphi$ ou, comme nous l'avons fait voir plus haut, $P \times ef \cos\alpha$.

Pour l'équilibre, le travail moteur devant être égal à la somme des travaux resistants, nous aurons :

$$P \times e \sin\alpha = Q \times e \cos\beta + P \times ef \cos\alpha.$$

et en divisant tous les termes par e :

$$P \sin\alpha = Q \cos\beta + Pf \cos\alpha$$

Si, dans cette équation, nous faisons $Q = o$, ce qui revient à considérer le corps comme équilibré par la seule action du frottement, nous aurons :

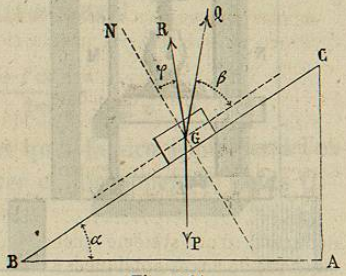

Fig. 364.

$$P \sin\alpha = Pf \cos\alpha$$

d'où l'on tire :

$$f = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \text{tang}\,\alpha$$

Or, nous savons (**541**) que $f = \text{tang}\,\varphi$, et par suite :

$$\text{tang}\,\alpha = \text{tang}\,\varphi$$

Donc, *pour qu'un corps abandonné à lui-même soit en équilibre sur un plan incliné, il faut que l'inclinaison du plan soit égale à l'angle du frottement.*

575. 6° Vis. — Considérons la vis de la presse représentée par la figure 365. Soient P la puissance qui agit à l'extrémité de la barre que l'on introduit dans le trou C pour faire tourner la vis, l la longueur de cette barre comptée à partir de l'axe de la vis, h le pas de la vis et Q la résistance qui agit sous le plateau D. Supposons que la vis ait fait un tour entier; la puissance aura parcouru un chemin $2\pi l$ et la vis se sera avancée d'une quantité égale à son pas h. Les travaux développés pendant cette rotation par la puissance et par la résistance seront respectivement :

$$P \times 2\pi l \quad \text{et} \quad Q \times h.$$

Si nous négligeons les frottements, les réactions de l'écrou sur les filets de la vis seront normales aux surfaces en contact et ne fourniront aucun travail; la réaction d'équilibre sera par suite :

$$P \times 2\pi l = Q \times h \quad \text{d'où} \quad \frac{P}{Q} = \frac{h}{2\pi l}$$

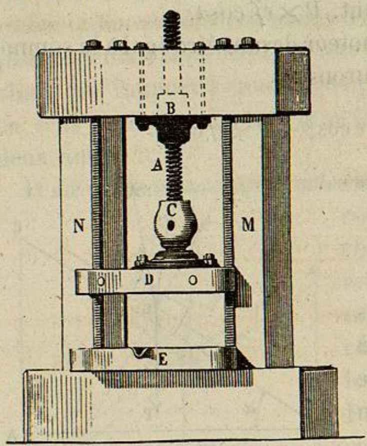

Fig. 365.

La puissance est à la résistance comme le pas de la vis est à la circonférence décrite par l'extrémité du levier. Ce rapport étant toujours très grand, on peut, à l'aide de la vis, exercer de grands efforts avec des puissances relativement très faibles ; mais il ne faut pas oublier que dans cette machine, comme dans toutes les autres, on perd en vitesse ce que l'on gagne en force.

576. Vis avec frottement. — Considérons le cas où, sous l'action de la puissance P agissant au bout d'un bras de levier l, la vis monte en soulevant un poids Q. Le contact de la vis avec l'écrou fixe a lieu à la surface inférieure du filet et, à cause de l'étendue de ce contact, on peut considérer la résistance Q comme uniformément répartie sur l'hélice moyenne du filet. Nous nous trouvons, par suite, ramenés au cas d'un corps s'élevant uniformément sur un plan incliné dont l'inclinaison serait égale à l'angle α que fait l'hélice avec la section droite du noyau.

Supposons que nous ayons fait un tour entier ; les chemins parcourus par la puissance, par la résistance et par le frottement seront respectivement : $2\pi l$, h et la longueur d'une spire. Or, nous savons que cette longueur est égale à l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont nous connaissons un côté h et l'angle α opposé à ce côté ; en l'appelant s, nous aurons :

$$s = \frac{h}{\sin\alpha}$$

L'équation du travail se posera donc comme suit :

$$P \times 2\pi l = Qh + Qf\cos\alpha \times \frac{h}{\sin\alpha}$$

et en mettant Qh en facteur commun dans le second membre, il vient :

$$P \times 2\pi l = Qh\left(1 + f\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)$$

ou bien :

$$P \times 2\pi l = Qh(1 + f\cot g\,\alpha)$$

d'où l'on tire :

$$P = Qh\frac{1 + f\cot g\,\alpha}{2\pi l}$$

Telle est la valeur de l'effort qu'il faudra appliquer à l'extrémité du levier l pour soulever uniformément le poids Q.