COMPLÉMENT

§ 1. — FORCE CENTRIFUGE.

577. La *force centrifuge* joue un rôle très important dans toutes les machines animées d'un mouvement de rotation ; c'est elle qui, parfois, fait éclater les meules et en projette au loin les débris ; c'est elle encore qui renverse les voitures au tournant des routes, etc. Pour bien définir cette force, considérons un mobile A (*fig.* 366) attaché à l'extrémité d'un fil inextensible, fixé lui-même au point B, et parcourant, d'un mouvement uniforme, une circonférence de rayon AB. Pour une position quelconque A du mobile, sur sa trajectoire, la direction de la vitesse en ce point étant celle de la tangente AC, si le mobile n'était soumis à l'action d'aucune force, il se mouvrait, en vertu du principe de l'inertie, d'un mouvement rectiligne et uniforme suivant cette tangente. Cette tendance du corps à se mouvoir en ligne droite produit une tension du fil qui, ne pouvant pas s'allonger, maintient le mobile à une distance constante du point B ; le fil joue donc, dans ce cas, le rôle d'une action ou force dirigée constamment vers le centre ; cette action a reçu le nom de *force centripète*. Toute action donnant inévitablement naissance à une réaction égale et contraire, il s'ensuit que le mobile réagit avec une force égale à la tension du fil et dirigée suivant le prolongement du rayon.

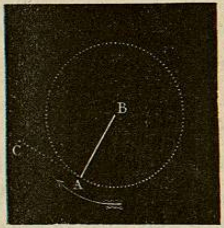

Fig. 366.

578. Définition de la force centrifuge. — On appelle *force centrifuge* la réaction dont nous venons de parler, exercée par tout corps assujetti à se mouvoir sur une trajectoire curviligne, et qui tend à l'éloigner du centre de courbure.

La force centrifuge est égale et directement opposée à la force centripète ; l'existence de l'une est forcément liée à celle

de l'autre, mais elles ne sont jamais appliquées au même point matériel. Ainsi, dans la fronde, que tout le monde connaît, la main exerce sur la pierre, par l'intermédiaire des cordons, un certain effort pour la faire tourner ; cette force, dirigée à chaque instant vers le centre de courbure de la trajectoire décrite, est la force centripète. La pierre, à son tour, réagit contre la fronde avec une force égale et contraire qui est la force centrifuge. La première, provenant de la main, est appliquée à la pierre par l'intermédiaire de la fronde, et la seconde, naissant de la pierre même, est appliquée à la fronde qui la retient.

579. Expression de la force centrifuge. — Pour exprimer la valeur de la force centrifuge, cherchons celle de la force centripète qui lui est égale. Soit O (*fig.* 367) une circonférence décrite d'un mouvement uniforme par le point matériel A, les positions du mobile au commencement et à la fin d'un temps très petit t, étant A et A'. Le chemin AA' peut être considéré comme le chemin résultant de deux chemins composants AT et AB dirigés, le premier suivant la tangente AT, et le second, AB, suivant le rayon OA. Ce dernier, AB, est le chemin que la force centripète F tend à faire décrire au mobile.

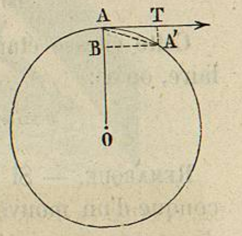

Fig. 367.

L'arc AA' étant très petit peut être considéré comme se confondant avec sa corde, et, en désignant par v la vitesse du mobile, on aura :

$$e = vt \qquad (1)$$

Dans un cercle, toute corde étant moyenne proportionnelle entre le diamètre qui passe par l'une de ses extrémités et sa projection sur ce diamètre, on aura :

$$\overline{A'A}^2 = 2r \times AB \qquad (1)$$

Des égalités (1) et (2) on tire :

$$v^2t^2 = 2r \times AB ; \quad \text{d'où} \quad AB = \frac{v^2t^2}{2r}$$

On voit donc que le mobile a parcouru le chemin AB d'un mouvement uniformément accéléré dont l'accélération est $\frac{v^2}{r}$; par suite, la force centripète F est constante. La masse du mobile étant m, on aura, pour l'expression de cette force :

$$F = \frac{mv^2}{r} = \frac{Pv^2}{gr}$$

Cette formule nous montre que *la force centrifuge est proportionnelle au carré de la vitesse, et en raison inverse du rayon.*

Si la vitesse est donnée en fonction du nombre de tours par minute, on a :

$$v = \frac{2\pi rn}{60}; \text{ par suite } F = \frac{m\pi^2 rn^2}{30^2} = \frac{P\pi^2 rn^2}{30^2 g}$$

Cette vitesse étant donnée en fonction de la vitesse angulaire, on a :

$$v = \omega r \text{ et par suite } F = m\omega^2 r = \frac{P\omega^2 r}{g}$$

Remarque. — Si le mobile parcourait une trajectoire quelconque d'un mouvement varié, les formules que nous venons de poser pourraient s'appliquer à la détermination de la force centrifuge à un instant quelconque, en prenant, pour la valeur de r, le rayon de courbure de la trajectoire à l'instant considéré.

580. Dans les corps animés d'un mouvement de rotation très rapide, la force centrifuge doit toujours être équilibrée par la force de cohésion des corps, c'est-à-dire que ceux-ci doivent résister aux réactions centrifuges déterminées par le mouvement qui leur est imprimé. Si cet équilibre cessait d'exister, les corps seraient projetés avec violence dans l'espace ; c'est ce qui arrive quelquefois dans les fabriques d'épingles et d'aiguilles où les meules destinées à user les pointes fonctionnent avec une très grande vitesse. Les volants des machines à vapeur, les roues, et en général les pièces d'un grand diamètre qui sont animées d'un mouvement de rotation très rapide, doivent donc être solidement reliées à leur arbre. En outre, le centre de gravité du système doit se trouver exactement sur l'axe de cet arbre, afin que celui-ci ne soit pas sollicité par des efforts tendant à le déplacer latéralement ; mais en pratique, la difficulté de distribuer uniformément la matière autour de l'axe de rotation fait que le centre de gravité se trouve toujours à une certaine distance de cet axe. Il faut donc maintenir solidement

les arbres pour qu'ils ne soient pas déplacés par les réactions centrifuges auxquelles ils sont soumis.

581. Lorsqu'un cheval tourne librement dans un manège (*fig.* 368) il incline instinctivement son corps vers le centre,

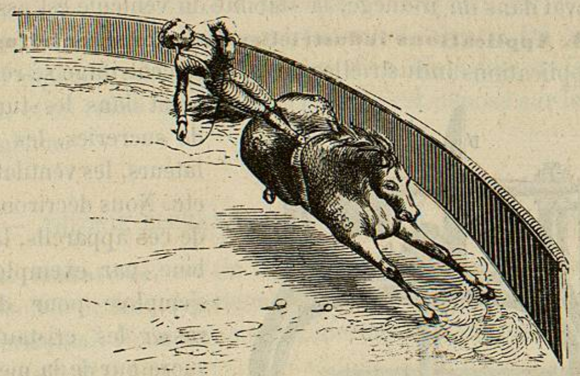

Fig. 368.

et cette inclinaison est d'autant plus marquée que sa vitesse devient plus grande ; l'animal prend ainsi une position d'équilibre stable.

En effet, il est soumis à son poids P, force verticale dirigée de haut en bas, et à une force centrifuge F dirigée horizontalement, qui tend à l'éloigner du centre du cirque ; ces deux forces se composent en une seule résultante, et afin de ne pas tomber, l'animal doit s'incliner pour que la direction de cette résultante passe à l'intérieur de sa base de sustentation.

L'écuyer, placé sur le cheval, s'incline également vers le centre du cirque pour se maintenir en équilibre.

582. La stabilité des voitures en mouvement sur les routes qui, dans leurs parcours, présentent des courbes, est soumise aux mêmes considérations que celles exposées précédemment. La force centrifuge étant proportionnelle au carré de la vitesse et inversement proportionnelle au rayon, on comprend que, dans les tournants de forte courbure, la vitesse des voitures doive être ralentie pour éviter le renversement qui arriverait lorsque la résultante du poids P et de la force centrifuge F ne percerait pas le sol entre la base d'appui. Sur les voies ferrées, où la vitesse des wagons est beaucoup plus grande, les règlements interdisent les courbes de faible rayon, et pour contre-balancer l'action de la force centrifuge, le rail extérieur est plus élevé que le rail intérieur. Le wagon étant ainsi incliné vers le centre de la courbe qu'il décrit, comme l'écuyer et le cheval dans un manège, la stabilité du véhicule est assurée.

583. Applications industrielles de la force centrifuge. — Les applications industrielles de la force centrifuge se rencontrent dans les turbines de sucreries, les régulateurs, les ventilateurs, etc. Nous décrirons l'un de ces appareils, la turbine, par exemple, qui s'emploie pour débarrasser les cristaux de sucre pur de la mélasse qui les recouvre au sortir des chaudières à cuir.

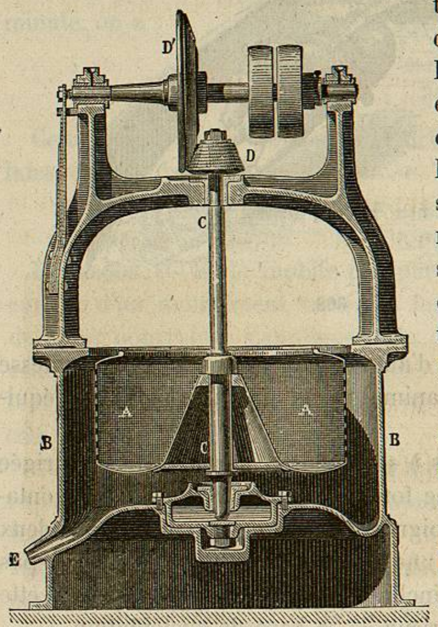

Fig. 369.

Cette turbine (*fig.* 369) se compose essentiellement d'un arbre vertical CC portant à sa partie inférieure un tambour en tôle AA de $0^m,80$ de diamètre, dont les parois verticales sont perforées; leur surface intérieure est recouverte par une toile métallique. Ce tambour peut tourner dans une cuve en fonte BB de $0^m,95$ de diamètre, munie d'une tubulure E. Un arbre horizontal transmet le mouvement de rotation à l'arbre vertical C au moyen de deux cônes de friction dont l'un D' est en fonte polie et l'autre D est formé de rondelles en cuir.

On verse, dans le tambour A, la masse cuite de sucre à turbiner et l'on imprime à l'arbre C un mouvement de 1200 à 1500 tours par minute; sous l'influence de la force centrifuge ainsi développée, la mélasse se sépare du sucre, passe à travers la toile métallique et vient couler par la tubulure E.

Quand les cristaux sont suffisamment desséchés, il faut verser dans le tambour de la *clairce* (sucre dissous dans l'eau, ou plus généralement mélasse étendue d'eau) en même temps que l'on y fait arriver un jet de vapeur. Au bout de quelques instants, la mélasse a entièrement disparu, et les cristaux de sucre apparaissent parfaitement blancs. On arrête alors l'appareil par l'intermédiaire d'un frein fixé à l'arbre vertical et on retire ensuite le sucre qui s'est déposé sur le fond du tambour.

§ 2. — THÉORIE ÉLÉMENTAIRE ET LOIS DU PENDULE SIMPLE.

584. Définition. — On appelle *pendule*, en général, un corps solide de forme quelconque pouvant osciller autour d'un axe horizontal. Nous ne nous occuperons que du pendule simple, c'est-à-dire du pendule formé d'un point matériel pesant A (*fig.* 370) suspendu à l'une des extrémités d'un fil très fin, inextensible et sans pesanteur, dont l'autre extrémité oscille sans frottement autour d'un point fixe B. Le pendule ainsi formé est idéal, mais on peut se le représenter en suspendant une balle de plomb à l'extrémité d'un fil très délié.

Fig. 370.

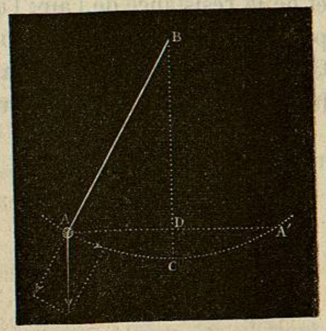

Fig. 371.

585. Pendule simple. — Considérons le pendule dans sa position d'équilibre stable BC (*fig.* 371); la direction verticale du fil passe par le point fixe B. Si on écarte l'appareil de sa position d'équilibre pour l'amener en A, et qu'ensuite on l'abandonne à lui-même, la composante du poids du point matériel, dirigée suivant la perpendiculaire à la direction AB, élevée en A, aura pour effet de ramener le pendule vers sa position d'équilibre stable, et le point A décrira un arc de cercle de rayon BA, contenu dans un plan vertical passant par le point fixe. En vertu de la vitesse acquise, le point matériel dépassera sa position initiale C, et la pesanteur qui précédemment agissait comme force accélératrice agira maintenant comme force retardatrice, et l'on démontre que le point A remontera jusqu'en A′, situé sur l'horizontale du point A; les arcs AC et A′C seront égaux, et la vitesse repassera par les mêmes valeurs pour des points de la trajectoire situés à la même hauteur. Arrivé en A′, le pendule redescendra en C pour remonter en A, et il opérera ainsi une suite non interrompue d'oscillations égales.

On appelle *amplitude* d'une oscillation, l'angle compris entre les positions extrêmes BA et BA′ du pendule, et la durée de l'oscillation est le temps employé par le point A pour aller de A en A′.

Remarque. — En réalité, le mouvement du pendule ne peut se continuer indéfiniment en raison du frottement au point fixe et de la résistance de l'air; l'amplitude des oscillations diminue progressivement pour devenir nulle au bout d'un certain temps. On observe, en outre, que la durée des oscillations varie avec leur amplitude; mais, lorsque ces amplitudes deviennent très faibles, c'est-à-dire ne dépassent pas 4 ou 5 degrés, la durée des oscillations varie d'une manière insensible, et peut être considérée comme constante.

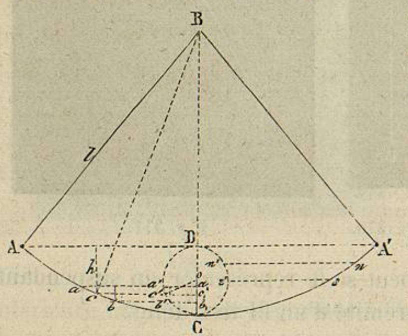

Fig. 372.

586. Détermination de la durée d'une oscillation. — Décomposons l'arc AA′ (*fig.* 372) en petits arcs élémentaires tels que $ab = a$; chacun de ces petits arcs pourra être considéré comme étant parcouru d'un mouvement uniforme, et l'on aura :

$$a = vt_1; \quad \text{d'où} \quad t_1 = \frac{a}{v} \qquad (1)$$

Or la vitesse de ce mouvement est la vitesse due à la hauteur moyenne h dont le pendule est descendu, c'est-à-dire que l'on a :

$$v = \sqrt{2gh}$$

En remplaçant dans (1) et élevant au carré, il vient :

$$t_1^2 = \frac{a^2}{2gh} \qquad (2)$$

Décrivons une circonférence sur la flèche DC comme diamètre, et projetons l'arc a sur la verticale BC; les triangles semblables donnent :

$$\frac{ab}{a_1b_1} = \frac{Bc}{cc_1} \quad \text{et} \quad \frac{a'b'}{a_1b_1} = \frac{oc'}{c'c_1}$$

ou en posant $a_1b_1 = a_1$; $a'b' = a'$; $cc_1 = x$; $c'c_1 = x'$ et $oc' = r$

on a encore $\dfrac{a}{a_1} = \dfrac{l}{x}$ (3) et $\dfrac{a'}{a_1} = \dfrac{r}{x'}$ (4)

Mais les perpendiculaires x et x' sont moyennes proportionnelles entre les deux segments de leurs diamètres respectifs, et l'on a :

$$x^2 = (2l - c_1C) \times c_1C = 2l \times c_1C - \overline{c_1C}^2 \quad \text{et} \quad x'^2 = h \times c_1C$$

Si l'on suppose l'arc ACA′ d'un petit nombre de degrés, le terme $\overline{c_1C}^2$ sera très petit par rapport à $2l \times c_1C$, et on pourra le négliger.

Divisons l'une par l'autre les équations (3) et (4), en les élevant au carré, et remplaçons x et x' par leurs valeurs; nous aurons :

$$\frac{a^2}{a'^2} = \frac{l^2 \times h \times c_1C}{r^2 \times 2l \times c_1C} = \frac{l \times h}{2r^2}; \text{ d'où l'on tire } a^2 = \frac{a'^2 lh}{2r^2}$$

Introduisant cette valeur de a^2 dans l'équation (2), il vient :

$$t_1^2 = \frac{a'^2 lh}{4ghr^2} = \frac{a'^2 l}{4gr^2}; \text{ d'où } t_1 = \frac{a'}{2r}\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Pour les autres arcs élémentaires, on aurait des expressions analogues dans lesquelles a' représenterait la projection de l'arc élémentaire sur la circonférence DC. En remarquant que la somme des projections, sur la circonférence DC, de tous les arcs élémentaires composant l'oscillation AA′, est égale à la longueur $2\pi r$ de cette circonférence, on aura, pour la durée totale de l'oscillation,

$$t = \frac{2\pi r}{2r}\sqrt{\frac{l}{g}} \quad \text{ou} \quad t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad (a)$$

587. Lois du pendule. — **1e Loi.** — *Les oscillations sont isochrones.* La durée d'une oscillation étant, d'après la formule (a), indépendante de son amplitude, on peut dire que, *dans un même lieu, la durée des petites oscillations d'un pendule est constante*, ou en d'autres termes, *que les oscillations sont isochrones.*

2e **Loi.** — *Les durées des oscillations de deux pendules de longueurs différentes oscillant dans un même lieu sont proportionnelles aux racines carrées des longueurs de ces pendules.*

Les durées t et t' des oscillations des pendules considérés seront données par les formules :

$$t=\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad \text{et} \quad t'=\pi\sqrt{\frac{l'}{g}}$$

En divisant ces deux égalités membre à membre, il vient :

$$\frac{t}{t'}=\frac{\sqrt{l}}{\sqrt{l'}}$$

3e **Loi.** — *Les durées des oscillations de deux pendules de même longueur, oscillant dans des lieux différents, sont inversement proportionnelles à la racine carrée de l'accélération due à la pesanteur en ces lieux.*

Les durées t et t' des oscillations des pendules considérés seront données par les formules :

$$t=\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad \text{et} \quad t'=\pi\sqrt{\frac{l}{g'}}$$

En divisant ces deux égalités membre à membre, il vient :

$$\frac{t}{t'}=\frac{\sqrt{g'}}{\sqrt{g}}$$

Cette loi peut être représentée sous une autre forme. En effet, soient n et n' les nombres d'oscillations exécutées par les pendules pendant un temps T ; on aura :

$$\frac{T}{n}=\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad \text{et} \quad \frac{T}{n'}=\pi\sqrt{\frac{l}{g'}}$$

d'où l'on tire : $$\frac{g}{g'}=\frac{n^2}{n'^2}.$$

ce qui s'exprime en disant que *les accélérations dues à la pesanteur en deux lieux différents, sont proportionnelles aux carrés des nombres d'oscillations qu'exécute le même pendule en ces lieux, pendant le même temps.*

588. Détermination du nombre g. — De l'équation (a) on tire $g=\frac{\pi^2 l}{t^2}$; cette formule fait connaître la valeur de l'accélération due à la pesanteur en un lieu quelconque, étant donnée la durée t de l'oscillation d'un pendule de longueur l, au lieu où l'on opère.

589. Détermination de la longueur du pendule qui bat la seconde. — La longueur du pendule qui bat la seconde se détermine au moyen de la formule (a), dans laquelle on fait $t=1''$, et il vient : $l=\frac{g}{\pi^2}$. Connaissant le nombre g, dont les valeurs aux différents points du globe sont renfermées dans le tableau (**274**), il sera facile d'évaluer l. Ainsi, à Paris, où $g=9{,}8088$, on trouve :

$$l=\frac{9{,}8088}{3{,}1416^2}=\frac{9{,}8088}{9.86965}\,0^{m},99384$$

Le tableau suivant renferme les longueurs du pendule simple battant la seconde en différents points du globe :

LIEUX.	LATITUDES.	VALEURS DE l.
Spitzberg................	79° 49′ 58″ N	996mm,03
Londres..................	51 31 8	994 ,12
Paris..	48 50 14	993 ,85
Barcelone................	41 23 15	993 ,23
Equateur.................	0	991 ,11
Ile-de-France............	20 9 40 S	991 ,77

590. Applications du pendule. — L'isochronisme des oscillations du pendule fit employer cet appareil pour la mesure du temps, et Huyghens l'appliqua, en 1657, pour régulariser la marche des horloges.

Une des plus belles applications du pendule a été faite en 1851, par M. Foucault, au Panthéon, pour démontrer le mouvement de rotation de la terre.