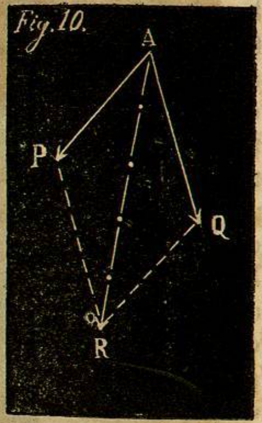
zo flojo cuyas extremidades se fijan de alguna manera; en su centro se une á un palo ó garrocha, mas ó menos largo y del mísmo punto otro hilo que forma con la garrocha ángulo agudo, y la otra extremidad se fija tambien; los tres hilos representan tres fuerzas angulares cuya resultante sigue la direccion de la garrocha; pero ésta, como cuerpo sólido apoyado contra el suelo, obra en sentido opuesto á la resultante y neutraliza su efecto.

16. Dos fuerzas angulares y su resultante están entre sí como los senos de los ángulos que forman con la resultante y el ángulo de las dos fuerzas.



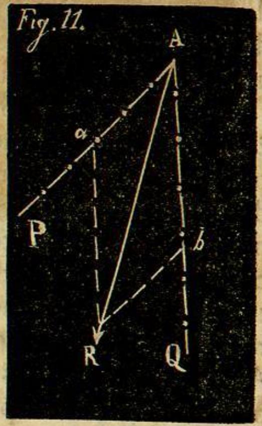
Sean AP y AQ (fig. 10) las dos fuerzas y AR su resultante, el triángulo APR dá AP: PR: AR:: sen PRA: sen PAR: sen APR; pero sen ARP = sen RAQ y sen APR = sen PAQ por suplementarios, PR = AQ: haciendo para simplificar AP = P, AQ = Q y AR = R y sustituyendo se tiene P:Q:R:: sen RAQ: sen PAR: sen PAQ. Esta fórmula puede darnos el valor de la resultante cuando se conozcan los ángulos que las fuerzas forman con ella y el que forman entre sí. En efecto tenemos: P:R:: sen QAR: sen PAQ y $R = \frac{P \text{ sen } PAQ}{\text{sen } QAR}$ Se la puede tambien determinar por la relación $R^2 = P^2 + Q^2 + 2\ PQ.\ \cos RPA$; pero cos RPA = cos PAQ por ser ángulos suplementarios; sustituyendo y extrayendo la raiz $R := \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ \cos PAQ}$.

Si las fuerzas forman entre sí un ángulo recto, el triángulo PAQ es rectángulo y dá: $R^2 = P^2 + Q^2$ y $R = \sqrt{P^2 + Q^2}$; ó también P = R cos PAR y Q = R cos RAQ: si se conocen los ángulos cualquiera de ellas nos dá el valor de la resultante; la primera dá $R = \frac{P}{\cos PAR}$, lo que nos dice que la resultante es igual á una de las fuerzas di-

vidida por el coseno del ángulo que forma con la resultante.

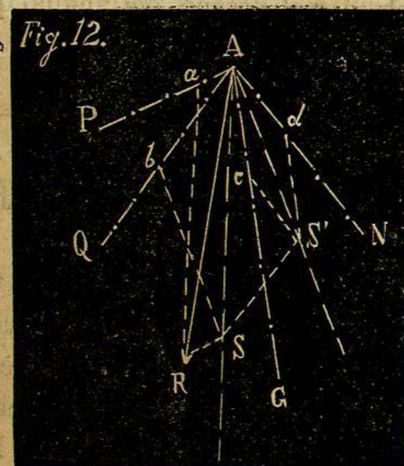
DESCOMPOSICION DE LAS FUERZAS ANGULARES.

17. En la composición hemos visto, que dadas varias fuerzas se busca el valor de una que las represente, que es la resultante; la descomposición es el problema inverso: dada una fuerza descomponerla en varias que produzcan juntas el mismo efecto que ella. El caso mas sencillo es aquel en que se trata de descomponer una fuerza dada en dos, cuyas direcciones, ó ángulos que deben formar con ella, son conocidos, pues de otro modo el problema es indeterminado.



Sea AR (fig. 11) la fuerza que se trata de descomponer en dos, cuyas direcciones sean AP y AQ; basta trazar por el punto R las líneas Rb y Ra paralelas á las fuerzas, y los puntos a y b en que las encuentran, determinan sus intensidades: $Aa = \frac{R \text{ sen } QAR,}{\text{sen } PAQ}$ y $Ab = \frac{R \text{ sen } RAP.}{\text{sen } PAQ}$

Si las fuerzas en que se quiere descomponer no son dos sino varias se procede de la manera siguiente: Sea AR (fig. 12) la fuerza que se quiere descomponer en cuatro: AP, AQ, AG y AN; se elije una auxiliar AS; y se descompone AR en dos. Aa y AS; luego se elige otra auxiliar que quede entre dos de las que faltan, tal como AS' y se descompone AS en Ab y AS' y por último la auxiliar AS' en Ac y Ad.



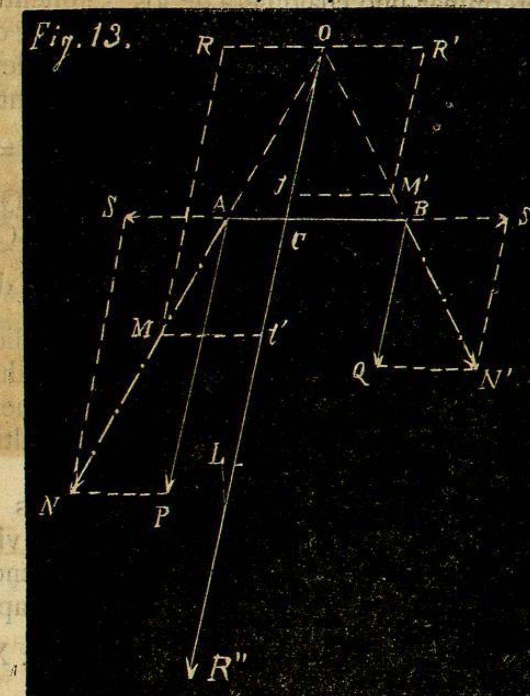
Esta solución como se vé no es determinada, pues basta cambiar el sentido de la construcción para tener valores diferentes de las componentes y sin embargo satisfacen el problema.

COMPOSICION DE LAS FUERZAS PARALELAS.

18. Teorema. La resultante de dos fuerzas paralelas, desiguales y del mismo sentido, aplicadas á las extremidades de una recta, es igual á su suma y su punto de aplicación divide á la línea en partes inversamente proporcionales á las intensidades de las fuerzas.

Demostración. Sean AP y BQ (fig. 13) las dos fuerzas y AB la línea que llamo línea de aplicación; si en los puntos A y B y siguiendo la línea de aplicación, aplicamos dos fuerzas AS y AS' iguales y de sentidos contrarios, en nada se altera el sistema en virtud del axioma: si á una cantidad se agrega y quita otra igual queda la misma cantidad. Si combinamos las fuerzas BQ y BS' tenemos la resultante BN'; haciendo lo mismo con AP y AS tenemos AN; prolongándolas se encuentran en el punto O; trasportándolas á este punto quedan: BN' de O á M' y AN de O á M; si descomponemos OM' en fuerzas paralelas á BQ y BS', éstas son OR' y Ot; descomponiendo OM en paralelas á AP y AS dá OR y Ot' pero OR y OR' se destruyen por ser iguales entre sí puesto que son iguales á BS'

y AS introducidas en el sistema; y Ot y Ot' obran sobre O sumando sus efectos, puesto que se sobreponen; luego si las aplicamos al punto C de la línea de aplicación poniéndolas en su verdadera magnitud, darán la línea CR'' = Ot + Ot' y como Ot = BQ y Ot' = AP; CR'' = BQ + AP; con lo que queda demostrada la primera parte del teorema, esto es: que la resultante de dos fuerzas paralelas y del mismo sentido es igual á su suma.



Para demostrar la segunda parte del teorema, que es: que en el punto C queda dividida la línea AB en partes inversamente proporcionales á las fuerzas AP y BQ, los triángulos semejantes BCO y M'Ot nos dán: $\frac{OC}{Ot} = \frac{CB}{tM'}$, y de la misma manera OAC y OMt' dán: $\frac{OC}{Ot'} = \frac{AC}{Mt'}$ dividiendo una por otra, teniendo presente que $Mt' = tM'$ resulta $\frac{Ot'}{Ot} = \frac{BC}{AC}$; pero $Ot' = AP$ y $Ot = BQ$ luego: $\frac{AP}{BQ} = \frac{BC}{AC}$; que es lo que se trataba de demostrar.

19. Corolario. La expresión anterior puede servir pa-

ra determinar uno cualquiera de los segmentos AC ó BC, en que queda dividida la línea de aplicación; cuando se conoce la longitud de ésta y la intensidad de las fuerzas. Supongamos que se desea conocer à AC; entonces $AC = X$ y $BC = AB - X$; la fórmula nos dá: $\frac{AP}{BQ} = \frac{AB - X}{X}$; quitando los denominadores: $AP \times X = AB \times BQ - BQ \times X$, sacando á X como factor común: $X\,(AP + BQ) = AB \times BQ$ y despejando: $X = \frac{AB \times BQ}{AP + BQ}$. Lo que quiere decir que para determinar uno de los segmentos; se multiplica una de las fuerzas por la línea de aplicación, y el producto se divide por la suma de las fuerzas; el cociente se cuenta del punto de aplicación, no de la fuerza porque se multiplica sino del de la otra.

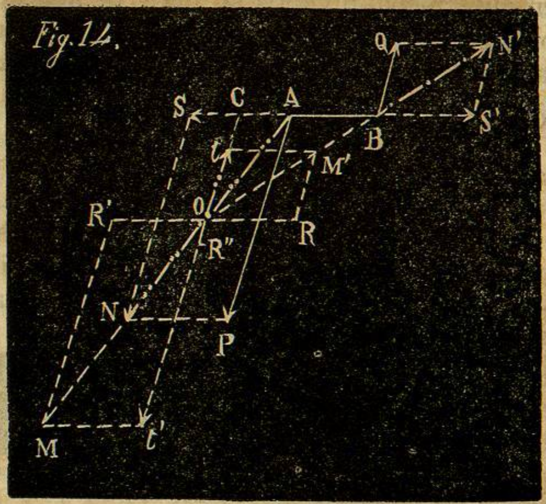
Ejemplo. Dos fuerzas, una de 30 Kilos y otra de 50, obran en las extremidades de un trozo de viga, que tiene de largo 10 Metros: se quiere saber la distancia del punto de aplicación de su resultante, al punto de aplicación de la fuerza de 30 Kilos. La fórmula anterior dá: $X = \frac{10 \times 50}{80} =$ $6^m\,25$: luego la fuerza, que produzca el mismo efecto que las dos, debe aplicarse á $6^m 25$, del punto de aplicación de la fuerza que vale 30 Kilos.

Obsèrvese tambien que la fórmula general indica que, cuando las fuerzas son iguales, el punto de aplicación de la resultante está á la mitad de la línea de aplicación. En efecto, si $AP = BQ$, la fórmula dá: $1 = \frac{BC}{AC}$, ó lo que es lo mismo $AC = CB$. El corolario dá tambien el mismo resultado: supongamos que dos caballos de igual fuerza tiran de un coche; la línea de aplicación es de dos metros, y la fuerza de los caballos es de 28 Kilos, (que es lo que vale poco mas ó menos la fuerza de un caballo, en buenas condiciones) tenemos: $X = \frac{28 \times 2}{28 + 28} = \frac{56}{56} = 1$, que es la mitad de la

línea de aplicación. En cuanto á su intensidad es igual á 56, suma de $28 + 28$.

20. Si las fuerzas paralelas en lugar de estar del mismo lado de la línea de aplicación, están una de un lado y la otra del otro, el teorema demostrado antes es cierto, en cuanto á dividir la línea de aplicación en partes inversamente proporcionales; pero la resultante queda fuera del sistema, y del lado de la fuerza mayor, y es igual á la diferencia de las fuerzas dadas.

Sean las fuerzas AP y BQ, aplicadas á la línea AB: haciendo las mismas consideraciones que en la figura 13, resulta la figura 14, en donde se vé, que las resultantes trasportadas á O, son OM' y OM, y descompuestas dán OR y OR', que se destruyen; y Ot y Ot', que por ser directamente opuestas, su resultante es igual á su diferencia, y vá á aplicarse al punto C, en la prolongación de la línea de aplicación, fuera del sistema y del lado de la mayor.



Respecto á la razon inversa entre los segmentos y las fuerzas: los triángulos BCO y M'tO dán: $\frac{BC}{CO} = \frac{M't}{Ot}$; y los triángulos ACO y Mt'O dàn: $\frac{AC}{CO} = \frac{Mt'}{Ot'}$, dividiendo y sustituyendo $\frac{BC}{AC} = \frac{AP}{BQ}$.

El corolario, es ahora, siendo BC la incógnita $\frac{X}{X-AB}=\frac{AP}{BQ}$, quitando denominadores y despejando $X=\frac{AB \times AP}{AP-BQ}$. Lo que quiere decir que en este caso, uno de los segmentos es igual al producto de la línea de aplicación por una de las fuerzas, dividido por su diferencia. Se distingue esta fórmula de la de las fuerzas en el mismo sentido solo en el denominador, que ahí es la suma y aquí la diferencia.

Generalizando el corolario será: Uno de los segmentos en que queda dividida la línea de aplicación, es igual al producto de esta línea por una de las fuerzas, dividido por la suma algebraica de las fuerzas; y su expresión general $X=\frac{P \times L}{P \pm Q}$, siendo P y Q las fuerzas y L la línea de aplicación.

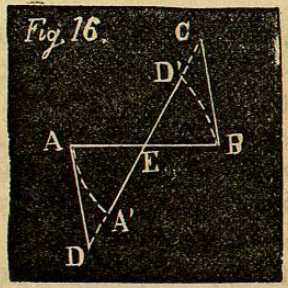
21. Se dice que dos fuerzas son directamente opuestas, cuando teniendo la misma dirección y el mismo punto de aplicación, una obra en sentido contrario de la otra. Por ejemplo: sea A un punto sobre el cual obran dos fuerzas $AB=3$ y $AC=6$, una tiende á llevarlo de A á B y la otra de A á C (fig. 15) es claro que su efecto es igual á su

diferencia $6-3=3$ y será llevado de A á C. Si las fuerzas son iguales, su diferencia es cero y se dice que tienen en equilibrio al punto sobre que obran.

22. Se dice que dos fuerzas son opuestas, cuando sus direcciones siendo paralelas, no tienen el mismo punto de aplicación; tales como AP y BQ (fig. 14.)

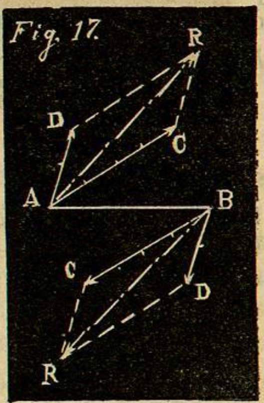
Cuando dos fuerzas opuestas son iguales tales como $AD=3$, $BC=3$ (fig. 16) el punto de aplicación de su resultante está situado al infinito: en efecto, aplicando el corolario, tenemos $X=\frac{AD \times AB}{AD-BC}$; pero AD es igual BC, luego $AD-BC=O$, y como toda cantidad dividida por O dá

por cociente el infinito, $X=\infty$. Sin embargo pueden considerarse dos casos: 1.° Si las fuerzas obrando sobre los puntos A y B, pueden formar distintos ángulos con AB girando sobre sus puntos D y C; al obrar sobre ella, le imprimen un movimiento de rotación al rededor de su



centro E, hasta llevarla en la dirección de sus puntos fijos D, E, C y en este momento la ponen en equilibrio destruyéndose. Este efecto se realiza, cuando á las extremidades de un cuerpo sólido, una viga, por ejemplo, se atan dos cordones paralelos y dos individuos jalan de ellos sin moverse. 2.° Si las fuerzas están sujetas á formar ángulos invariables con la línea de aplicación; pero capaces de moverse con ella, entonces hay movimiento circular cuyo centro es E y se dice, que las fuerzas constituyen un par. Este movimiento circular explica por qué el punto de aplicación de la resultante está situado al infinito.

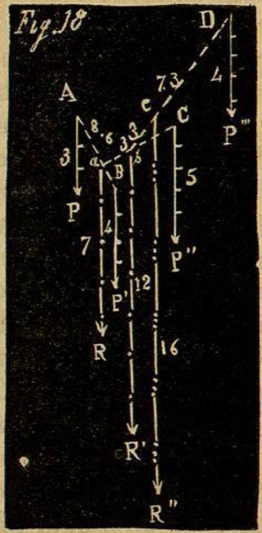
En lugar de un par, puede haber varios aplicados á las extremidades de una recta, por ejemplo: (AC, BC) (fig. 17) y (AD, BD); en este caso, puede determinarse el par resultante (AR, BR) por medio del paralelógramo de las fuerzas.



Aplicaciones. Los pares los vemos aplicados en varios movimientos circulares, desde los juegos de agua en las fuentes y las ruedas de los fuegos artificiales, hasta las grandes turbinas que mueven toda una maquinaria.

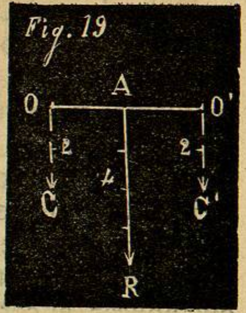
23. Cuando se trata de determinar la resultante de varias fuerzas paralelas, ya todas en el mismo sentido ó unas en un sentido y otras en sentido contrario, no se hace más que aplicar el corolario, á las fuerzas tomadas de dos en dos; sean (fig. 18), P, P', P," P'" y las fuerzas y A, B, C, y

D, sus puntos de aplicación: se comienza por determinar la resultante de dos cualesquiera de ellas, P y P'; para esto, se traza la línea de aplicación AB, se mide y se encuentra AB = 2. 8. Aplicando el corolario, se tiene: Ba = $\frac{3 \times 2,\ 8}{7}$ = 1.2, luego á 1.2 de B estará la resultante y será igual á 7. Se combina esta resultante con P," lo que dá: Cb = $\frac{7 \times 3.\ 4}{12}$ = 1. 983 y se obtiene la resultante R' = 12; por último, se combina R' con P''' y se tiene: Dc = $\frac{12 \times 3.\ 6}{16}$ = 2. 7, y la resultante final R", está aplicada al punto c y es igual á la suma de las componentes R" = 16. El punto c de aplicación de la resultante final, se llama *centro de las fuerzas paralelas.*



DESCOMPOSICION DE LAS FUERZAS PARALELAS.

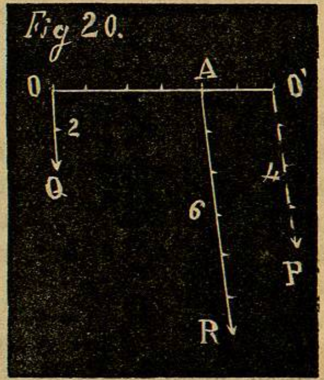
24. La descomposición de las fuerzas paralelas es más sencilla que la de las angulares y como en aquellas, el caso inverso de la composición. Sea: AR (fig. 19) la fuerza que se trata de descomponer en dos iguales; basta trazar por A, una recta cualquiera O O' y tomar á uno y otro lado de A, partes iguales AO, AO' y trazar OC y O'C' paralelas á A R é iguales á su mitad.



Si se trata de descomponer una fuerza dada en dos desiguales y paralelas, es necesario conocer la intensidad de una de ellas y la distancia á que está de la fuerza dada, ó bien la distancia que debe separar á aquellas en que se vá á descomponer y la intensidad de una.

Si se conoce una y su distancia á la fuerza dada, se aplica el teorema de las fuerzas paralelas para calcular la distancia á que se haya la otra fuerza; y si se conoce la distancia que las debe separar, se aplica el corolario para determinar cada una de las distancias de la fuerza dada á las en que se quiere descomponer.

1.° Dada una fuerza como 6 (fig. 20) y una componente igual á 2, que dista 4 de la fuerza dada, determinar á qué distancia está la otra que vale 4.



Sea AR = 6 la fuerza dada; tracemos por A la recta AO, tomemos sobre ella las cuatro unidades que dista la fuerza 2 y busquemos á qué distanc ia del otro lado de A, debe aplicarse la otra fuerza que vale 4. El teorema dá: $\frac{2}{4} = \frac{X}{4}$ ó X = 2; luego tomando 2 de A á O', este es el punto de aplicación de la otra fuerza, trazando por èl O'P = 4 queda resuelto el problema.

2.° Si se conoce la distancia que separa las fuerzas, sea por ejemplo 12; así como la fuerza dada, y sean las mismas que en el caso anterior, las en que se quiere descomponer, el corolario dá por distancia de A, á la fuerza Q: $X = \frac{4 \times 12}{6} = 8$, y para la fuerza 4, $X = \frac{2 \times 12}{6} = 4$, distancias de A á los puntos de aplicación de las fuerzas.

Aplicaciones. La descomposición de una fuerza en fuerzas paralelas iguales ó desiguales, la encontramos en los coches, carretas y tram-vias: en un coche, en la lanza ó en un punto de su dirección, está aplicado el peso del co-