che que es la fuerza que se descompone en dos que son las mulas; si jalan igual, el coche no se inclina á ningun lado; pero si desigual, se inclina del lado de la mula que jala más.

CAPITULO III.

Teoria general de los momentos.

25. Se dá el nombre de momento de una fuerza, al producto de su intensidad por la distancia á un punto, á una línea ó á un plano que se tomen como término de comparación. Si es con relación á un punto, este se llama centro de los momentos; si una línea, eje de los momentos; y si un plano, plano de los momentos.

Sea AB (fig. 21) una fuerza y O el centro de los momentos: el momento de esta fuerza es $AB \times OR$. Siendo el momento el producto de dos factores no puede ser nulo, sino cuando lo sea uno de ellos: luego si una fuerza que no puede ser nula, tiene su momento nulo, con relación á un punto, esto quiere decir que la fuerza pasa por este punto.

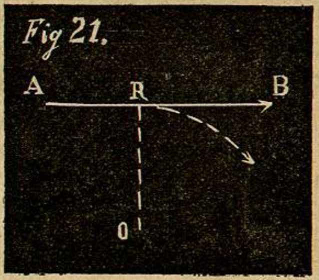


Fig 21.

La perpendicular bajada del centro de los momentos á la fuerza, se llama su brazo de palanca; de manera que OR, es el brazo de palanca de la fuerza AB.

Si suponemos que OR sea una barra rígida que pueda girar al rededor del punto O, y que la fuerza obre sobre el punto R conservando su perpendicularidad, es evidente que producirá un movimiento de rotación, cuyo sentido será el indicado por la flecha arqueada ó sea en el mismo

sentido que las manecillas de un reloj; pero si la fuerza obra en sentido contrario, el movimiento cambia tambien de sentido; de esto resulta, que según el modo que se adopte para contar el movimiento, será de un signo en un sentido y de signo contrario en el otro. Se conviene generalmente en llamar positivo, el movimiento que se produce en el sentido de las agujas de un reloj, y negativo el de sentido contrario; pero esto es convencional.

Si se tienen varias fuerzas en un mismo plano, pero cuyos sentidos sean diferentes, también sus momentos con relación á un mismo punto, tendrán signos contrarios; por ejemplo: sean AB, CD y EF (fig. 22) tres fuerzas y O el centro de los momentos; sus brazos de palanca son OR, OR' y OR'', y sus momentos $\pm AB \times OR$, $\mp CD \times OR'$, y $\pm EF \times OR''$.

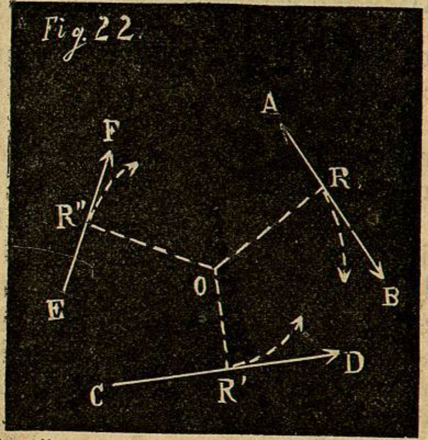


Fig. 22.

MOMENTOS DE LAS FUERZAS CONCURRENTES.

26. Teorema. Los momentos de dos fuerzas concurrentes con relación á un punto tomado sobre su resultante son iguales.

Sean AF y AF' (fig. 23) las fuerzas, y AR su resultante, O el centro de los momentos; tiremos por este punto Oa y Oa' paralelas á las fuerzas y OP y OP' sus brazos de palanca; los triángulos RFA y O a' A dán:

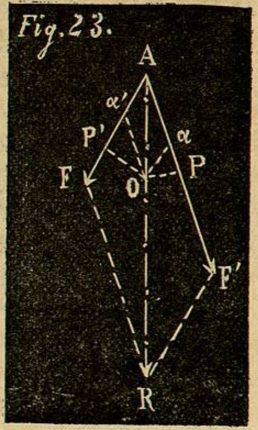
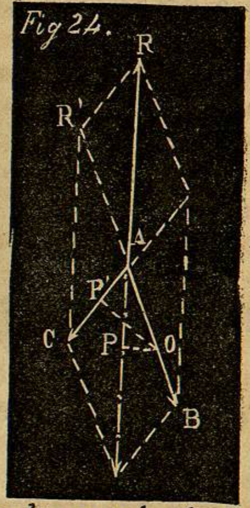


Fig. 23.

$\frac{RF}{RA}=\frac{Oa'}{OA}$ y los RF'A y OAa, dán: $\frac{RF'}{RA}=\frac{Oa}{OA}$ dividiendo una por otra estas igualdades: $\frac{RF}{RF'}=\frac{Oa}{OA'}$; de los triángulos OPA y OP'A, $\frac{Oa'}{Oa}=\frac{OP'}{OP}$; llevando este valor á la anterior: $\frac{RF}{RF'}=\frac{OP'}{OP}$, en lugar de RF y RF' ponemos sus iguales AF' y AF lo que dá: $\frac{AF'}{AF}=\frac{OP'}{OP}$; quitando los denominadores, $AF' \times OP = AF \times OP'$, que es el enunciado del teorema.

27. Corolario. Cuando tres fuerzas angulares están en equilibrio, los momentos de dos de ellas con relación á un punto tomado sobre la tercera, son iguales.



En efecto, sean AB, AC y AR (fig. 24) las tres fuerzas en equilibrio; como en este caso una cualquiera de ellas es igual y directamente opuesta á la resultante de las otras dos, resulta segun el teorema anterior, que si el centro de los momentos está en O sobre AB, $AC \times OP' = AR \times OP$.

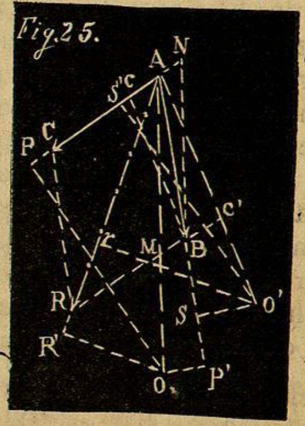
28. Teorema de Varignon. El momento de la resultante de dos fuerzas angulares ó paralelas con relación á un punto de su plano, es igual á la suma algebraica de los momentos de las componentes.

Divido el teorema en cuatro casos, dos para las fuerzas angulares y dos para las paralelas.

Fuerzas angulares. 1.° Cuando el centro de los momentos está en el ángulo de las fuerzas.

Sean AB y AC (fig. 25.) las fuerzas y AR su resultante; sea O el centro de los momentos y OP, OP' y OR' los bra-

zos de palanca de dichas fuerzas. Descompongamos la fuerza AB en dos, una según la dirección de AC que es AN y otra según AO que es AM; la fuerza AR puede considerarse como la resultante de las tres fuerzas AN, AM y AC, ó lo que es lo mismo de dos, una AM y otra igual á (AC—AN). Según el teorema ya demostrado tenemos: $AR \times OR' = (AC - AN)$ OP ó $AR \times OR' = AC \times OP - AN \times OP$; pero $AN \times OP = AB \times OP'$ luego $AR \times OR' = AC \times OP - AB \times OP'$; lo que quiere decir: que cuando el centro de los momentos está en el ángulo de las fuerzas, el momento de la resultante es igual á la diferencia de los momentos de las componentes.



2.° Cuando el centro de los momentos está fuera del ángulo de las fuerzas.

Sea O' fig 25 el centro; los brazos de palanca de las fuerzas son O's', O's y O'r: descomponiendo AB en dos, una Ac' que pase por el centro y otra Ac, y repitiendo lo mismo que en el caso anterior, tenemos: $AR \times O'r = [OC + Ac]$ $O's' = AC \times O's + Ac \times O's'$; pero $Ac \times O's' = AB \times O's$, luego $AR \times O'r = AC \times O's' + AB \times O's$. En este caso, el momento de la resultante es igual á la suma de los momentos de las componentes.

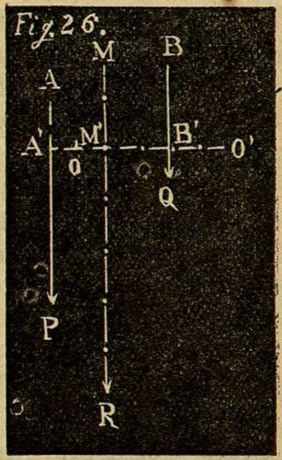
De los dos casos anteriores se deduce, puesto que en un caso se obtiene la suma y en otro la diferencia, que tratándose de fuerzas angulares: el momento de la resultante es igual á la suma algebraica de los momentos de las componentes, que era lo que se trataba de demostrar.

Llamando en general P y Q las fuerzas y R su resultante, a, b, y c sus brazos de palanca, el teorema anterior puede expresarse por la ecuación: $R \times c = P.\ a \pm Q.\ b$.

29. FUERZAS PARALELAS. 1.° Cuando el

centro de los momentos está entre las fuerzas.

Sean AP, BQ y NR (fig. 26) las dos fuerzas y su resultante, O el centro de los momentos. Por este punto tírese una perpendicular común á las fuerzas que las encontrará en los puntos A,' M' y B'; si tomamos esta recta por línea de aplicación de las fuerzas, subsistirá entre ellas y los segmentos de la línea de aplicación el teorema de las fuerzas paralelas ya demostrado, esto es: $\frac{AP}{BQ}=\frac{M'B'}{A'M'}$; pero si referimos las distancias M'B' y A'M' al centro de los momentos, tenemos: $M'B' = OB' - OM'$ y $A'M' = OA' + OM'$; sustiyente estos valores: $\frac{AP}{BQ}=\frac{OB' - OM'}{OA' + OM'}$, quitando denominadores: $AP \times OA' + AP \times OM' = BQ \times OB' - BQ \times OM'$; sacando OM' como factor y pasando los otros términos al segundo miembro: $OM' [AP + BQ] = BQ \times OB' - AP \times OA'$ y como $AP \times BQ$ es igual á la resultante y OM' es su brazo de palanca, el primer miembro es el momento de la resultante y el segundo la diferencia de los momentos de las componentes, luego: el momento de la resultante es igual á la diferencia de los momentos de las componentes.



2.° Cuando el centro de los momentos está fuera de las fuerzas.

Sea O' [fig, 26] el centro de los momentos: la expresión $\frac{AP}{BQ}=\frac{M'B'}{A'M'}$ subsiste, pero M'B' y A'M' referidas á O' son: $M'B' = O'M' - O'B'$; y $A'M' = O'A' - O'M'$; substituyendo: $\frac{AP}{BQ}=\frac{O'M' - O'B'}{O'A' - O'M'}$, quitando denominadores: $AP \times O'A' - AP \times O'M' = BQ \times O'M' - BQ \times O'B'$ y $O'M' [BQ+AP]$

$= BQ \times O'B' + AP \times O'A'$ luego: el momento de la resultante es igual á la suma de los momentos de las componentes.

Reuniendo los dos casos podemos decir como en el caso de las fuerzas angulares: el momento de la resultante es igual á la suma algebraica de los momentos de las componentes.

Lo mismo se demuestra para las fuerzas paralelas de sentido contrario y por consiguiente el teorema de Varignon es general.

30. Corolario. La expresión $\frac{AP}{BQ}=\frac{B'M'}{A'M'}$ del teorema general expresa que: cuando el centro de los momentos está sobre la resultante, las líneas M'B' son brazos de palanca de las fuerzas y por consiguiente que $AP \times A'M' = BQ \times M'B'$,' esto es, que si el momento de la resultante es nulo, los momentos de las componentes son iguales.

CAPITULO IV.

Movimiento.

31. El movimiento es uno de los efectos de la fuerza sobre la materia.

Se dice que un cuerpo está en movimiento, cuando sus puntos cambian de lugar con relación á otro ú otros que se suponen fijos y sirven de término de comparación.

La línea ó camino que un punto ó un cuerpo sigue al moverse se llama trayectoria y según sea esta línea, recta, curva ó mixta, así el movimiento se llama, rectilíneo, curvilíneo ó mixtilíneo y la trayectoria toma los mismos nombres.

Según la causa ó fuerza que produce el movimiento, así este cambia de modo de ser; si es producido por una causa constante, es regular; pero si lo es por una variable, tambien él es variable. De esto resultan dos modos de movimiento: el uniforme y el variado. Se dice que es uniforme, cuando el cuerpo recorre en cada unidad de tiempo el mismo espacio, por ejemplo: un cuerpo, que en un instante dado, parte de un punto y despues de un segundo se ha trasportado á cinco metros y en el siguiente segundo recorre otros cinco y así en cada segundo. Esta cantidad constante en cada unidad de tiempo es lo que se llama velocidad del movimiento; por esto se dice que en el movimiento uniforme, la velocidad es el espacio recorrido por el cuerpo en la unidad de tiempo.

Fácil es deducir la expresión algebraica que corresponde á este movimiento. Si en un segundo, un punto recorre cinco metros, en dos recorrerá 2×5, en tres 3×5 & y en general en t segundos, el espacio total recorrido, llamándolo e será: $e = t \times 5$ y si llamamos v la velocidad, la expresion se convierte en $e = v.t$ esto es: que en el movimiento uniforme, el espacio total recorrido por el punto es igual á la velocidad multiplicada por el tiempo transcurrido.

Esta ecuación permite resolver tres problemas de movimiento uniforme. 1.° Dado el tiempo y la velocidad encontrar el espacio, $e = v.t$. 2.° Dado el espacio y el tiempo encontrar la velocidad, $v = \frac{e}{t}$. 3.° Dado el espacio y la velocidad encontrar el tiempo, $t = \frac{e}{v}$.

Si tomamos dos ecuaciones correspondientes á dos movimientos uniformes $e = vt$ y $e' = v't'$; se pueden deducir todas las leyes que rigen á este movimiento. En efecto, di-

vidiendo una por otra tendremos: $\frac{e}{e'} = \frac{vt}{v't'}$, esta es la ecuación mixta, que traducida al lenguaje común dice: que los espacios son entre sí, como los productos de las velocidades por los tiempos.

Para deducir las leyes simples, siempre sujetas á condiciones determinadas, basta introducir estas condiciones en la ecuación, así si $t = t'$, $\frac{e}{e'} = \frac{v}{v'}$ que quiere decir, que á igualdad de tiempos los espacios están en la misma relación que las velocidades, ó bien los espacios son proporcionales á las velocidades. Si $v = v'$, $\frac{e}{e'} = \frac{t}{t'}$ esto es, que á igualdad de velocidades, los espacios son proporcionales á los tiempos transcurridos en recorrerlos; y si $e = e'$ entonces $1 = \frac{vt}{v't'}$, ó $vt = v't'$ y recordando que en toda proporción geométrica el producto de los extremos es igual al de los medios, la igualdad anterior, puede escribirse: $\frac{v}{v'} = \frac{t'}{t}$ correspondiéndose en cruz los términos relativos, es una proporción inversa que dice: á igualdad de espacios las velocidades están en razón inversa de los tiempos.

Este modo de deducir las leyes es sumamente importante, pues basta que el alumno sepa obtener la ecuación general de un hecho cualquiera, para deducir las leyes que lo rigen, sin necesidad de saberlas de momoria como se acostumbra generalmente.

32. Se dice que el movimiento es variado, cuando en tiempos iguales, el cuerpo recorre espacios desiguales ó viceversa. Este movimiento estaria expresado por una ecuación complicada y cuyas leyes son muy variables. Estudiaremos el uniformemente variado, esto es, el que aumenta ó disminuye una cantidad constante en cada unidad de tiempo; por esto se divide en uniformemente acelerado y uniformemente retardado. Es uniformemente acelera-

do, cuando en cada unidad de tiempo aumenta una misma cantidad, por ejemplo: estando un cuerpo en reposo, viene á obrar sobre él una fuerza, y durante un segundo, recibe de ella un efecto a; durante otro segundo, recibe otra vez a, es claro, que despues de dos segundos lleva el efecto 2a; despues de tres, 3a; despues de cuatro, 4a; y despues de t segundos, lleva ta; puede decirse que en el primer segundo lleva la velocidad a, despues de dos segundos 2a, y despues de t segundos ta: luego si llamamos v la velocidad final, tenemos: $v=at$. La cantidad constante a, que aumenta en cada unidad de tiempo, se llama aceleración; ahora bien, un cuerpo que parte del estado de reposo, tiene en este instante una velocicad o, y si en cada segundo, adquiere una aceleración a, su velocidad final es at; pero el cuerpo puede recorrer el mismo espacio con movimiento uniforme y una velocidad media entre o y at, esto es: $V=\frac{at}{2}$ y la ecuacion que liga al espacio, tiempo y velocidad, es: $e=vt$ puesto que es uniforme; sustituyendo en esta última el valor de v, se tiene: $e=\frac{at^2}{2}$; luego el movimiento uniformemente variado, está caracterizado por las dos ecuaciones: $e=\frac{at^2}{2}$, y $v=at$, una nos dá el espacio recorrido en cierto tiempo y la otra, la velocidad que adquiere despues de ese tiempo. Como se vé, la velocidad en este movimiento no es constante, sino varía con el tiempo, y el valor dado por la fórmula $v=at$, expresa la velocidad de un cuerpo en un instante dado. Para medirla, hay que sustituir al movimiento uniformemente variado, un uniforme, en el instante en que se quiere medir, y el espacio que recorre en un segundo con movimiento uniforme, es la velocidad adquirida desde que partió del estado de reposo, hasta este instante. Por esto se dice que la velocidad en un instante dado, es la que corresponde al movimiento uniforme que sucede al movimiento uniformemente variado.

33. Volvamos á las ecuaciones $e=\frac{a\,t^2}{2}$ y $v=at$ y comparémoslas con las de otro movimiento semejante $e'=\frac{a'\,t'^2}{2}$ y $v'=a't'$, dividiendo las primeras resulta: $\frac{e}{e'}=\frac{at^2}{a'\,t'^2}$ ecuación mixta: si $a=a'$, $\frac{e}{e'}=\frac{t^2}{t'^2}$; (1) lo que quiere decir que: á igualdad de aceleraciones, los espacios son proporcionales á los cuadrados de los tiempos; si $t=t'$, $\frac{e}{e'}=\frac{a}{a'}$ esto es, á igualdad de tiempos, los espacios son proporcionales á las aceleraciones, y si $e=e'$, $at^2=a'\,t'^2$, ó $\frac{a}{a'}=\frac{t'^2}{t^2}$, á igualdad de espacios, las aceleraciones están en razon inversa de los cuadrados de los tiempos.

Si tomamos las segundas, $v=at$ y $v'=a't'$, tendremos: $\frac{v}{v'}=\frac{a\,t}{a'\,t'}$ resultando de ésta, nuevas leyes: si $a=a'$, $\frac{v}{v'}=\frac{t}{t'}$ (2) á igualdad de aceleraciones, las velocidades proporcionales á los tiempos: si $t=t'$, $\frac{v}{v'}=\frac{a}{a'}$; á igualdad de tiempos, las velocidades proporcionales á las aceleraciones: y si $v=v'$, $at=a't'$ ó $\frac{a}{a'}=\frac{t'}{t}$; á igualdad de espacios, las aceleraciones en razon inversa de los tiempos.

Si en las ecuaciones, $e=\frac{at^2}{2}$ y $v=at$, eliminamos á t, tenemos: $t=\frac{v}{a}$; sustituyendo este valor en la primera: $e=\frac{a\,v^2}{2a^2}=\frac{v^2}{2a}$, $v^2=2ae$ y $v=\sqrt{2ae}$, esto es: que la velocidad

---

[1.] [2.] **Estas leyes se comprueban con la máquina de Atwood.**

es igual, á la raiz cuadrada del doble del espacio por la aceleración.

Pueden deducirse otras leyes comparando la fórmula anterior con otra, $v' = \sqrt{2a'e'}$, y se tiene: $\frac{v}{v'} = \frac{\sqrt{2ae}}{\sqrt{2a'e'}} = \frac{\sqrt{ae}}{\sqrt{a'e'}}$; si se elevan al cuadrado sus dos miembros: $\frac{v^2}{v'^2} = \frac{ae}{a'e'}$, si $a = a'$, $\frac{v^2}{v'^2} = \frac{e}{e'}$; y si $e = e'$ $\frac{v^2}{v'^2} = \frac{a}{a'}$.

34. Si el móvil no parte del reposo como se ha supuesto, sino que viene animado de cierta velocidad, es claro, que en el instante en que se considera, habrá recorrido un espacio que será el producto del tiempo empleado por la velocidad en ese instante: si llamamos e' este espacio, $e' = bt$ y despues de otros t segundos, habrá recorrido conforme á lo anterior, un espacio $e = \frac{at^2}{2}$, luego el espacio total será igual á la suma, esto es, $e + e' = bt + \frac{at^2}{2}$; si $e + e' = E$, su ecuación es: $E = bt + \frac{at^2}{2}$. A la cantidad b, se le llama velocidad inicial. De la misma manera, la expresión de la velocidad es en este caso $v = b + at$.

Si el movimiento en vez de ser uniformemente acelerado es uniformemente retardado, las expresiones son las mismas con cambio de signos, esto es: $E = bt - \frac{at^2}{2}$, y $v = b - at$.

35. He dicho que el movimiento es uno de los efectos de la fuerza sobre la materia y es claro que mientras mayor sea la causa, mayor será su efecto; luego si dos fuerzas F y F' medidas con una misma unidad, una vale 4 y la otra 8; es evidente, que si obran sobre una misma cantidad de materia, en condiciones iguales, el efecto de la segunda será doble del de la primera, y siendo los efectos

proporcionales á las causas, tenemos: $\frac{F}{F'} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$. Ahora bien, si llamamos a la aceleración que la primera imprime á una masa, y a' la que la segunda imprime á la misma masa en la unidad de tiempo; como a y a' no son otra cosa que efectos de F y F', tendremos tambien: $\frac{F}{F'} = \frac{a}{a'}$ (1); esto es, que las fuerzas son proporcionales á las aceleraciones que imprimen á la misma masa. De la misma manera tendremos para otras fuerzas F'' y F''', y sus aceleraciones a'' y a''' que comparadas con la primera F dan: $\frac{F}{F''} = \frac{a}{a''}$ (2) y $\frac{F}{F'''} = \frac{a}{a'''}$ (3); de estas tres ecuaciones se deduce: $\frac{F}{a} = \frac{F'}{a'}$, $\frac{F}{a} = \frac{F''}{a''}$, y $\frac{F}{a} = \frac{F'''}{a'''}$ ó lo que es lo mismo $\frac{F}{a} = \frac{F'}{a'} = \frac{F''}{a''} = \frac{F'''}{a'''} =$ á una constante. Esta relación constante que existe entre la fuerza y su aceleración, es lo que en Mecánica se llama Masa de un cuerpo, de manera que si llamamos M la masa, tenemos: $\frac{F}{a} = M$ ó $F = Ma$; para otra fuerza y otra masa: $F' = M'a'$, dividiendo una por otra: $\frac{F}{F'} = \frac{Ma}{M'a'}$; pero como $\frac{a}{a'} = \frac{v}{v'}$ (33) $\frac{F}{F'} = \frac{Mv}{M'v'}$. El producto Mv de la masa por la velocidad, se llama *cantidad de movimiento*, luego: dos fuerzas son entre si, como las cantidades de movimiento que imprimen á los cuerpos sobre que obran.

Si en la última fórmula hacemos $v = v'$, $\frac{F}{F'} = \frac{M}{M'}$, esto es: á igualdad de velocidades, las fuerzas son proporcionales á las masas. Si las masas son iguales, las fuerzas son proporcionales á las velocidades; y si las fuerzas son iguales, las velocidades están en razon inversa de las masas.