sorte qu'après avoir retiré ces triangles ainsi disposés du second carré, il reste deux petits carrés qui sont construits sur les côtés de l'un des triangles rectangles.

Or il est évident que, puisque les deux carrés primitifs sont égaux, il en est de même des surfaces qui restent lorsque l'on a retiré de chacun d'eux les quatre triangles rectangles.

Il en résulte que le carré A est équivalent à la somme des carrés B et C ; le théorème prend donc un caractère d'intuition, d'évidence indiscutable.

Ce qui est curieux, c'est que l'origine de cette démonstration se perd dans la nuit des temps : elle remonte probablement à trente ou quarante siècles, au moins, avant l'ère chrétienne, et semble venir de l'Inde. Bhascara la rapporte dans son ouvrage *Rija-Ganita* (§ 146) ; après avoir tracé la figure, simple combinaison des deux précédentes, il se contente d'écrire ce seul mot : « Voyez. »

Je mets en fait que cette démonstration, même accommodée à une sauce géométrique, prenant un caractère conforme aux habitudes actuelles d'enseignement, serait infiniment supérieure, même dans l'enseignement secondaire, aux démonstrations de Legendre et autres, qui sont bien plus pénibles. Le retour à ce qui se faisait, il y a si longtemps, constituerait ici un grand progrès sur ce qui se fait de nos jours.

Le petit être dont nous nous occupons a donc pu, vous le voyez, arriver assez loin dans l'étude de l'arithmétique et de la géométrie ; mais il y a plus, et nous allons pouvoir lui faire faire également de l'algèbre ! L'algèbre passe aujourd'hui, dans les familles, pour la chose la plus difficile, la plus compliquée et la plus abstruse que l'on puisse imaginer. Je ne prétends pas que les théories algébriques puissent entrer dans ce cerveau délicat, bien au contraire ; mais je déclare qu'il y a certaines notions que l'on peut arriver, et sans fatigue, à faire comprendre aux petits enfants.

Je dis, par exemple, qu'on peut leur faire comprendre, en les amusant et sans leur donner de peine, la formule qui exprime la somme des premiers nombres entiers.

Imaginez (fig. 7) que, pour y arriver, nous pre-

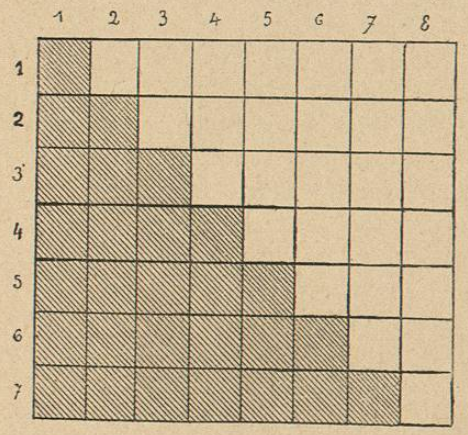

Fig. 7.

nions une feuille de papier quadrillé et que nous couvrions de hachures le premier carré de la première ligne, puis les deux premiers carrés de la ligne suivante, les trois premiers de la troisième, et ainsi de suite.

Le nombre total des cases couvertes de hachures par ce procédé représente visiblement la somme des premiers nombres entiers jusqu'à tel nombre que l'on voudra, jusqu'à 7 dans notre figure.

J'affirme qu'en remettant le papier à l'enfant, si on le prie de le retourner, il constatera très facilement que les figures formées par les cases blanches et par les cases noires sont identiques. Le nombre cherché sera donc égal à la moitié de la somme des cases, c'est-à-dire, dans l'exemple que nous avons choisi,

$$1+2+3+4+5+6+7=(7\times 8):2=28.$$

Le raisonnement même prouve que, si n était le dernier terme de la somme, on aurait pour cette somme

$$S=\frac{n(n+1)}{2}$$

Je rappelle ici cette formule pour mieux préciser ma pensée, mais on peut faire voir simplement à l'enfant quels sont les nombres qu'il s'agit d'obtenir, sans avoir besoin de tracer un seul caractère.

Il se présente quelque chose d'analogue pour la somme des nombres impairs ; on sait que la somme des n premiers nombres impairs égale le carré de n ; il est encore facile de le faire vérifier par un enfant.

Il suffit pour cela (fig. 8) de reprendre notre feuille de papier quadrillé et d'ombrer la première case à gauche puis les trois cases qui l'entourent et forment avec elle un carré. On continue ainsi et l'on obtient, comme il est facile de s'en convaincre sur la figure, un carré formé d'une suite de zones couvertes de hachures et représentant la suite des nombres impairs : l'examen de la figure montrera alors à l'enfaut, de manière qu'il n'en puisse pas douter, la propriété en question.

Dans un autre ordre d'idées, il est encore possible de donner à l'enfant des notions algébriques qui dépassent de beaucoup ce que l'on pourrait imaginer.

Supposez, par exemple, qu'on veuille lui donner la notion de l'addition. Il entre facilement dans sa pensée que des objets, des barres matérielles, par exemple, peuvent être choisies de manière que, par leur longueur, elles représentent des nombres. Il sera aisé de comprendre, qu'ayant une barre de 3 décimètres et une autre de 5, on peut obtenir la somme de ces longueurs d'une manière pour ainsi dire matérielle, en

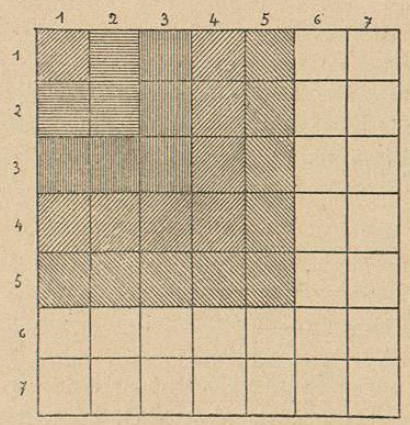

Fig. 8.

portant l'une de ces barres au bout de l'autre — notion essentiellement pratique qui peut se traduire très simplement.

Prenant une ligne et, sur cette ligne, un point que nous appelons l'*origine* et qui correspondra au zéro ; puis, portant des segments à la suite l'un de l'autre, pour représenter les barres de tout à l'heure, il est clair que nous aurons obtenu la somme représentée ici par l'ensemble des deux segments (fig. 9).

Si, au lieu de porter une longueur de $3+5$, j'avais porté $3+2$, il est clair que j'aurais obtenu un autre

point ; si, au lieu d'ajouter 2 à 3, je voulais au contraire l'en retrancher, ce qui se représenterait par (3 — 2), l'opération serait encore bien facile, puisqu'il suffirait de porter la longueur 2, mais en sens inverse, en AB, à partir de l'extrémité A du segment 3. La différence sera donc représentée par la longueur OB. On pourrait ainsi donner aux enfants la notion de l'addition et de la soustraction d'une façon matérielle.

Or, en procédant de cette manière, il est facile de voir que, si l'on voulait essayer de former la quantité 3 — 5, on se trouverait, en arithmétique, en présence d'une impossibilité, 5 étant plus grand que 3 ; mais, puisque nous avons remarqué que l'opération

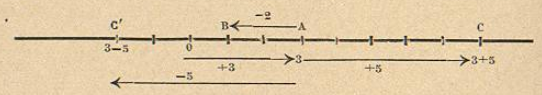

Fig. 9.

revient à porter le second objet au bout du premier et en sens inverse, de A vers O, j'obtiendrai bien cependant la représentation de 3 — 5 ; seulement, dans ce cas, l'extrémité de l'objet se trouvera à gauche du point O, en C' ; donc 3 — 5 sera OC'.

Ceci contient en germe toute la théorie des quantités négatives, sur laquelle on a écrit des milliers et des milliers de pages, et vous voyez, cependant, qu'en ayant soin de graduer les idées, cette théorie peut être rendue tout intuitive et accessible, même à un petit enfant auquel il aura suffi de faire comprendre, au préalable, que les opérations ordinaires d'addition et de soustraction peuvent se traduire par des objets matériels. La génération des quantités positives ou négatives s'ensuit tout naturellement.

Le domaine de l'arithmétique consiste ici dans la moitié de la ligne droite située à droite du point O, tandis que le domaine de l'algèbre s'étend indéfiniment, de part et d'autre de cette origine O, aussi bien dans un sens que dans l'autre.

Je crois, par ces quelques exemples, être arrivé à vous faire comprendre qu'on peut sans peine élargir beaucoup plus qu'on ne l'imagine, en général, le champ des investigations auxquelles est capable de se prêter le cerveau d'un enfant.

Pour arriver à ce résultat, un petit matériel, très simple, et que l'on peut varier à l'infini, est nécessaire, comme vous l'avez vu.

Le premier élément de ce matériel est le papier quadrillé, instrument merveilleux qui devrait être entre les mains de quiconque fait des mathématiques (depuis la famille ou la salle d'asile jusqu'à l'école Polytechnique, et même au delà), et, d'une manière générale, de quiconque fait de la science. Mais c'est surtout un instrument merveilleux, au point de vue pédagogique, pour donner aux petits enfants ces premières notions de la forme, de la grandeur et de la position, sans lesquelles l'initiation n'est qu'un leurre.

Joignez à ce papier quadrillé des jetons, des boules, des haricots, des allumettes, objets qu'il est toujours si facile de se procurer, et vous aurez le matériel qui vous est nécessaire.

Il n'est pas d'amusement, si puéril soit-il, se réduisît-il à un jeu de mots, qui ne puisse être utilisé dans un enseignement de cette nature. Par exemple, lorsqu'un enfant aura bien appris la table d'addition, si vous lui annoncez une démonstration lui permettant de prouver à ses petits camarades que six et trois font huit, sa curiosité sera éveillée ; et vous pouvez

être certains qu'une fois qu'il se sera mis cet amusement dans la tête, il n'oubliera jamais que $6 + 3 = 9$ et non pas 8. Pour arriver à la démonstration, il suffit de grouper neuf allumettes ainsi que l'indique la figure 10.

On peut arriver à démontrer d'une façon analogue que la moitié de douze est de 7, en coupant en deux le nombre douze, écrit XII, en numération romaine. Ces plaisanteries ont leur valeur pédagogique, parce que le paradoxe est précisément de nature à attirer l'attention de l'enfant, qui sera désormais certain de

Fig. 10.

ne pas tomber dans le piège ; c'est un procédé d'enseignement qui a sa valeur et que l'on aurait tort de négliger : on peut et l'on doit au contraire s'en servir, et souvent d'une façon très heureuse.

Le côté de cet enseignement sur lequel j'insiste le plus, c'est que, donné sous forme de jeu, il doit être dépourvu de toute espèce de caractère dogmatique ; il faut qu'aucune vérité ne soit imposée à l'enfant ; celui-ci doit au contraire la découvrir, comme en se jouant. L'enfant sera pénétré des vérités qu'il aura ainsi trouvées de lui-même ; il vaut mieux qu'au besoin le nombre d'abord en soit faible ; ce qui est essentiel, c'est qu'il en ait la conscience profonde.

Cet enseignement doit être aussi essentiellement objectif et dépourvu de toute abstraction. Quand je dis qu'il doit être « dépourvu de toute abstraction », c'est plutôt en apparence qu'en réalité. L'abstraction en effet est un des éléments qui contribuent le plus à donner aux sciences mathématiques une apparence effrayante pour les gens du dehors ; et pourtant l'abstraction constitue le plus souvent une simplification des choses, tout au contraire de ce que l'on imagine. C'est même une simplification telle, et tellement nécessaire, que nous en faisons tous d'instinct, et que l'enfant lui-même en fait, non seulement dans le domaine mathématique, mais dans toutes les considérations de la vie, pour ainsi dire.

Je m'explique : lorsque, pour donner à l'enfant la première idée du nombre deux, je mets deux haricots dans sa main et les lui fais contempler, il a parfaitement l'idée de la collection deux ; et cependant, si vous y regardez de près et s'il y regardait de près lui-même, il constaterait que les deux haricots, quels qu'ils soient, ne sont pas identiques, puisqu'il n'existe pas dans la nature deux objets qui ne soient dissemblables. Donc, lorsque l'enfant introduit cette idée de collection dans son esprit, d'une façon tout instinctive, en identifiant les objets qu'il voit, il commence à faire de l'abstraction. Cette abstraction le délivre de toutes les complications et de tous les ennuis qui résulteraient pour lui de la contemplation des objets réels ; c'est par ce procédé philosophique que l'on a pu construire toutes les sciences et surtout la science des grandeurs.

C'est cette abstraction bienfaisante que nous ne cessons d'opérer sur nous-mêmes par un heureux privilège ; et nous sommes bien ingrats envers elle lorsque, pour reprocher à une science ses difficultés

ou sa complication, nous disons d'elle que c'est une science abstraite. Précisément, plus elle est abstraite et plus elle est simple. En géométrie, par exemple, quand on fera dessiner des figures à l'enfant sur du papier quadrillé, il aura le sentiment de ce qu'on appelle des lignes et il les tracera. Or qu'est-ce qu'une ligne ? Cela n'existe que dans notre esprit. Ce que je traçais tout à l'heure sur le tableau peut donner l'idée d'un être géométrique qui n'aurait qu'une dimension, qui ne serait prolongé que dans un sens ? Est-ce que ces prétendues lignes ne consistent pas en des multitudes de particules de craie qui occupent sur le tableau une largeur très appréciable, qui ont une épaisseur et qui offriraient à nos regards, examinées au microscope, les figures les plus extraordinaires, avec l'apparence générale d'un terrain bouleversé par un cataclysme ? Nous savons très bien que rien de ce que nous appelons figures géométriques n'existe dans la nature, mais nous en avons la notion nette, précise, par le fait même de la contemplation des objets extérieurs qui par leurs formes se rapprochent des figures en question.

C'est donc par ces objets se rapprochant des formes géométriques que nous devons faire concevoir les premières notions à l'enfant, alors que son esprit n'aura pas été faussé préalablement. Je prétends que l'enfant, auquel on présente un cordon tendu entre deux points ou bien un cheveu comme celui d'un hygromètre, ou encore une ligne tracée par un crayon finement taillé, fera de lui-même cette abstraction nécessaire, sans laquelle il ne pourrait pas marcher de l'avant.

Quant aux abstractions d'ordre plus complexe, sans lesquelles ne pourrait se constituer la science, mais qui paraissent moins naturelles, tout cela pourra

venir et viendra utilement plus tard, lors de l'enseignement raisonné. Il faut se contenter, quant à présent, du rôle précieux de l'abstraction instinctive, il faut se borner à faire contempler les objets extérieurs et à préparer ainsi cet enseignement rationnel ultérieur. Quand il s'agit du cerveau d'un petit enfant, je ne saurais assez le répéter, car j'y mets un véritable parti pris, on ne doit jamais essayer de lui faire opérer des abstractions qu'il ne ferait pas de lui-même ; il ne convient même pas d'attirer son attention sur ces opérations cérébrales qu'il exécute à merveille mais qu'il se refuse, quant à présent, à analyser ; ce en quoi il a fort raison.

Le cerveau de l'enfant, du petit enfant surtout, est un admirable instrument enregistreur ; s'il n'associe pas facilement les idées, et surtout les idées un peu complexes, il les perçoit cependant, il les conserve pendant un temps plus ou moins long, et il est admirablement préparé, disposé par la nature, pour effectuer l'enregistrement des faits. Or, avant même qu'il ait acquis cette première notion des choses et des faits, on le bourre en général de règles toutes faites, on le gave de dogmes.

Ce petit cerveau est épris de curiosité ; il cherche à savoir et à découvrir plutôt qu'à comprendre : au lieu de fournir un élément à cette curiosité, on la lasse, on la décourage ; on lui impose une sorte d'obéissance intellectuelle au lieu de favoriser, d'inciter perpétuellement cette initiative dont il a été doté à un si haut degré par la nature.

Le cerveau de l'enfant est un instrument très délicat qui demanderait à être manié avec une extrême prudence ; on le met généralement entre des mains un peu brutales, un peu dures, et l'on arrive à le fausser. Lorsque je vois certaines directions pédago-

giques, très générales, hélas ! je ne peux m'empêcher de penser aux admirables moyens expérimentaux qui ont été créés par M. Marey pour étudier une foule de fonctions physiologiques, et je me demande ce qu'il adviendrait de ces instruments délicats, si ingénieux, si l'on en confiait le maniement et la garde à un brave forgeron habitué à manier des marteaux de 50 kilogrammes. Les appareils pourraient subir de ce fait bien des accidents regrettables et sans doute bientôt ne seraient plus en état de fonctionner : c'est, par malheur, ce qui arrive presque toujours en matière pédagogique.

On fausse trop souvent cet admirable instrument, qui renferme l'avenir de l'humanité, en lui donnant une mauvaise direction, en ne sachant pas tirer parti de ses remarquables aptitudes. Les impressions, les sentiments qu'on développe sont dirigés dans un sens tout contraire à celui qu'indiquerait la saison ; et lorsqu'il s'agit d'une étude qui, par ses côtés élémentaires, dans la mesure où elle peut rendre des services, même pratiques, est plutôt de nature à exciter la curiosité et l'intérêt, on arrive à produire un dégoût à peu près irrémédiable et pour toute la vie.

Les idées que je viens de vous exposer à grands traits ne sont pas de moi et, surtout, malheureusement, elles ne sont pas récentes. On les trouve, sous une forme un peu différente, mais identiquement les mêmes, au fond, dans l'*Essai d'éducation nationale* publié par La Chalotais en 1763. C'est un programme d'études et d'éducation qui constituerait, je le crois, s'il était mis à exécution, un grand progrès sur l'état actuel des choses. Plus tard, Condorcet s'est occupé du même sujet, et j'en passe volontairement une foule d'autres.

A la fin du XIXe siècle, le nom de Jean Macé, que

je citais tout à l'heure, doit être retenu parmi ceux des hommes qui ont essayé de faire pénétrer quelques notions saines et justes en matière de pédagogie mathématique. Il est aussi un autre nom que je m'en voudrais de passer sous silence, car c'est celui d'un homme auquel j'ai emprunté une bonne partie des exemples que je vous ai cités : je veux parler d'Édouard Lucas qui, dans un ouvrage publié en partie de son vivant — les deux derniers volumes après sa mort — et qu'il a intitulé *Récréations mathématiques*, ainsi que dans une série de conférences, faites surtout au Conservatoire des Arts et Métiers, s'est attaché à développer, au point de vue primaire de l'éducation mathématique de l'enfance, des idées qui ne différaient, elles aussi, que dans la forme de celles que j'ai essayé de vous présenter. Revenant à La Chalotais, dont Lucas était aussi un fervent disciple, et bien que je ne veuille pas abuser des citations, je tiens pourtant à mettre sous vos yeux, pour ainsi dire au hasard, quelques fragments de l'*Essai d'éducation nationale*.

« Le préjugé commun a attaché à ces sciences l'idée d'une grande difficulté pour les enfants : et par qui cette difficulté est-elle exagérée ? par des gens qui, dès l'âge de six ans, leur mettent en main la grammaire, c'est-à-dire la métaphysique du langage ; un tissu d'idées abstraites, difficiles à saisir par elles-mêmes, et rendues inintelligibles par la façon dont elles sont présentées.

« La coutume qui régit la multitude avait renvoyé les mathématiques à la fin des études, pour en prendre une légère teinture bientôt effacée. Les lumières de ce siècle, l'exemple et l'autorité des gens capables ont ramené à l'avis des anciens, de Pythagore, de Platon, qui voulaient que personne n'entrât aux écoles, sans

être initié à la géométrie : Socrate conseillait d'apprendre les mathématiques dès l'âge le plus tendre (Platon, *Rép.*, dial. 7). L'expérience et le raisonnement prouvent que les enfants sont capables de s'appliquer à ces sciences.

« La géométrie ne présente rien que de sensible et de palpable, rien dont les sens ne rendent témoignage. Les géomètres mesurent ce qu'ils voient, ce qu'ils touchent, ce qu'ils parcourent : les sens sont dans un perpétuel exercice et, lorsque les sens ne suffisent pas, la mémoire vient au secours pour conserver le souvenir d'une première vérité, d'une seconde, d'une troisième, etc. Nulle science n'est plus assortie à la curiosité des enfants, à leur caractère, à leur tempérament, qui les porte à être presque toujours en mouvement : rien ne flatte davantage l'amour-propre que de croire inventer soi-même les figures que l'on construit, ou les problèmes que l'on résout...

« Les mathématiques accoutument à l'esprit de combinaison et de calcul : esprit si nécessaire dans l'usage de la vie ; elles donnent de l'aptitude à lier les idées, et c'est peut-être la plus essentielle de toutes les dispositions ; car on ne voit ordinairement dans tout le reste de la vie, que comme on a vu dans les commencements.

« D'ailleurs quelle comparaison entre les idées claires des corps, de la ligne, des angles, qui frappent les sens, et les idées abstraites du verbe, des déclinaisons et des conjugaisons, d'un accusatif, d'un ablatif, d'un subjonctif, d'un infinitif, du *que* retranché, etc. La géométrie ne demande pas plus d'application que les jeux de Piquet et de Quadrille. »

Tout ceci ne semble-t-il pas être d'une peu consolante actualité ? Mais tout l'*Essai* serait à citer, et je désire ne pas abuser de votre patience.

Je crois que, si une direction d'esprit telle que je l'ai indiquée était donnée à l'éducation primaire de l'enfance, nous verrions bientôt résulter de cette transformation une véritable révolution, non seulement dans l'enseignement primaire, mais encore dans l'enseignement secondaire. Ce que l'on appelle « le champ élémentaire des mathématiques » serait à la fois singulièrement élargi et en même temps débroussaillé d'une foule de superfétations qui n'y restent guère que par la force de la tradition et de l'habitude. On pourrait aller beaucoup plus loin qu'on ne le fait aujourd'hui, et l'ensemble des connaissances moyennes que tout le monde peut et doit acquérir en mathématiques s'en trouverait accru et purifié dans une très large mesure.

Je tiens en outre à dissiper une équivoque qui pourrait naître dans quelques esprits : s'agit-il donc, me demandera-t-on, de former une génération de mathématiciens, avec une pareille direction d'esprit ? Je tiens à m'expliquer là-dessus d'une manière absolument franche et précise : je crois que rien ne serait plus déplorable et que le danger n'est du reste pas à craindre ; mais, autant il est inutile de former des spécialistes, des hommes dont l'occupation principale serait ensuite, soit d'enseigner, soit de pratiquer professionnellement les mathématiques, autant il est indispensable, dans un monde tel que celui où nous vivons à l'heure actuelle, que des notions premières, générales, sur la science de l'étendue, de la mesure, des grandeurs, du mouvement, ne soient pas absentes de l'esprit d'un être humain ayant un certain degré de culture.

Il y a à cela une nécessité d'éducation générale et une nécessité matérielle aussi.

Quant aux mathématiciens, quant à ceux qui doi-

vent s'adonner d'une façon plus exclusive à cette branche des connaissances humaines dont la complication est indéniable et augmente à mesure que l'on s'élève dans des régions plus hautes, il faut certainement à ceux-là des aptitudes, et des aptitudes qui n'existent pas chez tout le monde. Il faut en outre un goût particulier, mais c'est un goût tellement profond que, si un enfant est doué d'une façon exceptionnelle au point de vue des dispositions mathématiques, il deviendra mathématicien, qu'on lui ait donné ou non un enseignement rationnel. On ne forme pas les mathématiciens ; ils se font eux-mêmes. Comme l'enfant qui est né musicien finit toujours par prendre la direction à laquelle il est destiné par la nature, de même que tout tempérament artistique, le mathématicien obéira à sa tendance instinctive, et pareil à l'aiguille aimantée qui revient vers le Nord quand on l'en a détournée, il prendra sa direction naturelle.

Je ne parle pas de ces natures exceptionnelles ; je ne veux pas le moins du monde soutenir une méthode qui aboutirait à fabriquer systématiquement une nation de mathématiciens ou de savants quelconques ; mais je mets en fait qu'il est impossible, aujourd'hui, de faire un pas, dans l'ordre d'idées même de la vie matérielle, économique, à laquelle nous sommes soumis, sans avoir un ensemble de connaissances dans lesquelles l'élément mathématique joue un rôle relativement considérable. Il est donc déplorable de voir que, pour suivre de trop près des traditions, des habitudes, et pour se refuser à obéir à des préceptes fondés, cependant, sur la logique la plus saine et qui nous étaient donnés il y a plus d'un siècle, ainsi que vous l'avez vu, on persévère à fausser l'esprit de l'enfant, à ne pas développer en lui les qualités qui lui

sont naturelles et, par cela même, à ne pas perfectionner l'ensemble du plan général d'éducation.

Si cela continue, si le mal que j'indique, et qui, heureusement — ou malheureusement, — n'est pas particulier à la France, mais qui existe surtout en France, vient à attirer l'attention des autres nations plus sérieusement qu'il n'attire la nôtre, il arrivera que, sur ce terrain, comme sur pas mal d'autres, notre génie national, malgré ses belles dispositions naturelles, subira un recul sensible ; nous aurons à subir les conséquences d'un état de choses dont personne ne sera responsable, en apparence, mais duquel tout le monde aura sa part de responsabilité, en réalité.

En invitant surtout, comme je l'ai fait, les pères et les mères de famille à participer à cette première éducation mathématique de l'enfance, au lieu de nous concentrer sur l'étude particulière d'une question de psychologie ou de pédagogie, j'estime que nous soulevons par là l'une de ces questions qui attirent peut-être peu la curiosité, mais qui sont, cependant, des plus importantes ; c'est là, en effet, l'un des plus intéressants problèmes qui, au double point de vue du développement intellectuel de l'humanité et de l'avenir de notre nation, soient dignes de préoccuper la génération à laquelle nous appartenons et celles qui nous suivent.

Nous allons aborder demain le xxe siècle. Est-ce que vous ne vous demandez pas avec quelque inquiétude quels sont les problèmes que le nouveau venu va nous poser, impérativement, car ils seront empruntés à la nécessité des choses !...

BIBLIOTECA PROFR. H. Ramos Lozano