gado 10 decenas ó un millar á la superior, agrego un millar á la inferior, y digo de 5 á 8, 3, y escribo este número.

Es de observarse que no se ha hecho la resolución del problema propuesto. No se ha quitado 479 de 853, sino que se ha agregado primero 10 y después 100 á cada uno, y lo que realmente se ha hecho ha sido tomar 479+110, ó 500+80+9 de 853+110, ó de 800+150+13; lo que da, según el principio antedicho, el mismo resultado que tomar el primer número del segundo sin la adición de las centenas y de las decenas.

Los estudiantes deben formar sus propias tablas.—Otro expediente á que puede recurrir un maestro es formar la tabla de multiplicación en presencia de la clase y con ayuda de los alumnos. La costumbre general es presentar á estos dichas tablas y hacérselas aprender de memoria sin decirles cómo ni por qué se han formado. El maestro debe decir que va á formar la tabla de multiplicación por 2, y después de escribir dicho número en el tablero, hacer que lo repitan los alumnos y que le vayan dando, para anotarlos también, los resultados de la multiplicación de cada uno de los números dígitos por dos. Para que ellos puedan saber cuáles son tales resultados ó productos se les explicará que la multiplicación es sólo una serie de adiciones iguales, y que la operación es sólo el medio de abreviar las sumas. Procediendo del mismo modo con cada dígito él formará así la tabla de la multiplicación.

Análisis aritmético.—Un medio eficaz de hacer clara la teoría de un procedimiento, es adoptar el método que podría llamarse "análisis aritmético." Consiste en escribir en conjunto todo el procedimiento, sin abreviar nada, en presencia de la clase y en analizarlo de modo que se vaya dando cuenta de cada cifra, y se muestre cómo y

por qué desempeña su oficio cada una para obtener el resultado final. Tomemos, por ejemplo, la división, aunque cualquiera otra regla podría servir, y supongamos que por medio de ejemplos sencillos se ha hecho ver lo que la división es; que se ha deducido de la división de las partes,—digamos de un franco, y de ejemplos tales como éste:

Siendo $27=12+9+6$,

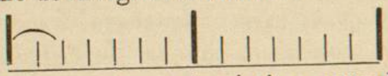
y siendo, por consiguiente, la tercera parte de 27 ó $\frac{27}{3}=\frac{12}{3}+\frac{9}{3}+\frac{6}{3}$ ó $4+3+2$,—la verdad general de que dividimos un número por otro cuando dividimos cada una de las partes del primero sucesivamente por el segundo, y sumamos los cocientes. Se ve entonces que cuando el dividendo es número de muchas cifras, debe fraccionarse en partes tales que puedan ser divididas una por una para que la suma de todos los diversos resultados que se obtengan formen el todo. Ejemplo: dividir por 7 el número 34,624.

$$
\begin{array}{r}
7)34624 \\
\hline
4000=28000\div 7 \\
900=\ \ 6300\div 7 \\
40=\ \ \ \ 280\div 7 \\
6=\ \ \ \ \ \ 42\div 7 \\
\tfrac{2}{7}=\ \ \ \ \ \ \ \ 2\div 7 \\
\hline
4946\tfrac{2}{7}=34624\div 7 \\
\hline
\end{array}
$$

Este método de análisis es muy útil, sobre todo en las multiplicaciones y divisiones de alguna extensión y en la práctica, porque en estas reglas la respuesta va saliendo parte por parte, y es fácil al mismo tiempo que interesante preparar á los alumnos para que comprendan la significación y el valor respectivos de cada línea de cifras que vaya resultando.

En el ejercicio anterior es bueno llamar la atención al punto de que todo el problema no ha sido resuelto en realidad, por cuanto entre las cifras del dividendo ha quedado el 2 sin dividir ; pero se desconoce aun su séptima parte, y por el momento hay que indicarla en la forma $\frac{2}{7}$ que representa la séptima parte de dos.

El estudio de las fracciones debe principiarse temprano.—Después de esto es oportuno comenzar con el estudio de las fracciones, y no posponerlo, como hacen algunos, al de las proporciones. El residuo que queda de una división, sugiere la necesidad de entrar en el estudio de las partes de la unidad. Puede darse principio al estudio de la siguiente manera :



Se puede demostrar que la séptima parte de dos pulgadas es igual á los dos séptimos de una. Es evidente que el método que debe emplearse en las primeras lecciones es el objetivo, pues para hacer evidente la naturaleza de una expresión fraccionaria y deducir varias de las reglas fundamentales para la reducción de quebrados á un común denominador, y la suma y la substracción, el mejor medio es trazar cuadrados ú otras figuras y dividirlos primero en cuatro y ocho partes, y luego en tres, seis y nueve, ó bien el uso de cubos divididos en partes.

Las fracciones ofrecen excelente disciplina para el raciocinio y la reflexión. Ninguna regla debe darse apoyada solamente en la autoridad del maestro, pues el alumno es quien debe formularla como deducción de lo que se le ha explicado, con alguna ayuda de parte de aquél. ¿ Qué puede ser, por ejemplo, tan poco satisfactorio como la regla para dividir quebrados, si se enuncia para que sea aceptada ciegamente, diciendo : " Inviértase el divisor y procédase con él como si fuera un multiplicador ? " Esto más parece formulario de números que representación de un procedimiento racional. Preséntese primero el problema y dedúzcase después la regla. Es preciso antes ampliar un poco más el sentido de la palabra división. " ¿ Qué es," se pregunta, " dividir un número ? " Es

(1) Descomponerle en partes iguales.

(2) Hallar otro que multiplicado por el divisor dé por producto el dividendo.

(3) Averiguar cuántas veces, *ó partes de una vez*, el divisor está contenido en el dividendo.

Debe haberse visto antes que esta expresión, " partes de una vez " es necesaria al tratarse de fracciones, y que envuelve un sentido más amplio de la palabra divisor del que tiene cuando se trata de números enteros. Procédase después á presentar cuatro ó cinco problemas que vayan aumentando en dificultad, v. g.

(1) Dividir 12 por $\frac{1}{3}$. ¿ Qué significa esto ? Averiguar cuántas veces está contenido $\frac{1}{3}$ en 12. Pero como $\frac{1}{3}$ está contenido tres veces en 1, así debe estarlo 3×12 veces en 12 ; luego dividir por $\frac{1}{3}$ es lo mismo que multiplicar por 3.

(2) Dividir 15 por $\frac{3}{4}$. Se trata de hallar las veces que $\frac{3}{4}$ está contenido en 15. Como $\frac{1}{4}$ está contenido en 15×4 ó 60 veces en dicho número, $\frac{3}{4}$ lo estará un tercio de 60 veces ó $\frac{4\times15}{3}$. Dividir por $\frac{3}{4}$ es tanto como multiplicar por $\frac{4}{3}$.

(3) Dividir $\frac{5}{7}$ por $\frac{3}{4}$. Esto es tanto como dividir por la cuarta parte de 3. Dividamos primero por 3. $\frac{5}{7}$ divididos por $3=\frac{5}{7\times3}$ ó $\frac{5}{21}$; pero como no íbamos á dividir por 3 solamente sino por la cuarta parte de 3, este resultado es menor de lo que debiera, y es preciso multiplicar-

lo por 4. La solución es $\frac{4\times5}{21}$. Luego dividir $\frac{5}{7}$ por $\frac{3}{4}$ es lo mismo que multiplicar por $\frac{4}{3}$.

(4) Dividir $\frac{5}{7}$ por $\frac{3}{4}$ es hallar cuántas veces $\frac{3}{4}$ está contenido en $\frac{5}{7}$. Reduzcámoslos á un común denominador $\frac{5}{7}=\frac{20}{28}$, y $\frac{3}{4}=\frac{21}{28}$. La cuestión se reduce á saber cuántas veces $\frac{21}{28}$ están contenidos en $\frac{20}{28}$, que son las mismas que 21 francos lo están en 20 francos, lo que no asciende á una vez sino á $\frac{20}{21}$ de vez, porque esta fracción representa el número de veces que 20 contiene á 21. Luego $\frac{5}{7}\div\frac{3}{4}=\frac{5}{7}\times\frac{4}{3}$.

(5) Dividir $\frac{5}{7}$ por $\frac{3}{4}$ es hallar una fracción que si se multiplica $\frac{3}{4}$ dé $\frac{5}{7}$; lo que quiere decir que $\frac{3}{4}$ de esta fracción desconocida harán $\frac{5}{7}$. Pero como A es $\frac{3}{4}$ de B, B debe ser $\frac{4}{3}$ de A; luego la fracción buscada debe ser $\frac{4}{3}$ de $\frac{5}{7}$, la misma que se obtendría invirtiendo el divisor y considerándolo como multiplicador.

Luego dividir por una fracción es multiplicar por su recíproca, ó

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}.$$

Que era lo que queríamos demostrar.

Recomiendo que después de hacer algunos de estos sencillos ejercicios se altere el orden y se exija que cada uno de los estudiantes haga oralmente la demostración. Esto será lo mismo exactamente que dar la prueba de un teorema geométrico, pues desarrolla también las mismas cualidades mentales, exige concentración de pensamiento, arreglo cuidadoso de premisas y de conclusiones, y suministra una lección eficaz aunque elemental, en lógica y en matemáticas puras.

Utilidad de las fórmulas.—Es muy útil la práctica de expresar el resultado de un procedimiento, ó de enunciar una verdad que se ha descubierto, como fórmula

en la que las letras del alfabeto ocupen el lugar de los números. Así adelanta el alumno en el arte de pensar en abstracto. Después de demostrar que la diferencia de dos números no se altera si se les agrega una misma cantidad, y de ilustrar por medio de un ejemplo así:

$$12-7=5\text{ ; por tanto }(12+8)-(7+8)=5,$$

se puede expresar así dicha verdad :

$$\text{Si } a-b=c,\ (a+n)-(b+n)=c$$

No se crea que esto es álgebra, pues no se echa mano de ninguno de los procedimientos especiales de esta ciencia, sino que se expresa una verdad aritmética en la forma más abstracta, para llevar al alumno de la región de las verdades particulares á la de las universales y ayudarle á comprender que lo establecido como verdad con respecto á ciertos números y lo que él mismo ha comprobado con respecto á ellos es necesariamente verdadero tratándose de cualquier número. Por tanto, recomiendo la utilidad de reducir á fórmula toda verdad aritmética.

Uso de acertijos aritméticos.—No hay un solo procedimiento aritmético del cual no se pueda obtener disciplina intelectual al mismo tiempo que utilidad práctica, siempre que se le presente en la forma debida. El pretexto de que ocupa mucho tiempo é impide los progresos no tiene, en mi opinión, valor alguno. ¿ Qué se entiende por progresos ? No será el llegar pronto á lo que se llama reglas superiores, sino el amaestrar al alumno en los principios fundamentales y habilitarle para que por sí mismo descubra ciertas reglas, lo que se conseguirá si se le hace pensar acerca del sentido de todo procedimiento que se use. Propónganse á la clase algunos acertijos numéricos para que los escolares hallen la razón de ellos. Hé aquí algunos ejemplos sencillos de lo que acabo de decir :

(*a*) ¿Cuál es el término medio de una serie creciente en que los términos equidistantes suman una misma cantidad, como v. g.,

1 . 3 . 5 . 7 . 9 . 11 . 13 . 15 . 17 . 19 . 21 ?

(*b*) Si tomo dos números—por ejemplo, 732586 y 257638—compuestos de unos mismos dígitos, y los resto; ¿por qué los dígitos del residuo me dan un número exacto de nueves?

$$\begin{array}{r} 732586 \\ \underline{257638} \\ 474948 \end{array}$$

$$4+7+4+9+4+8=36=4\times9.$$

(*c*) Si se toman cuatro números que formen proporción ó que representen dos razones iguales, v. g., 6 : 24 : : 5 : 20, ¿por qué 6 veces 20 es igual á 5×24?

En este último caso debe hacerse que el escolar deduzca la igualdad de los dos productos como consecuencia del hecho de que los dos productos están en proporción. Él ve que 24 y 5 dan cierto producto, y como, por hipótesis, 6 es tantas veces menor que 24, como 20 lo es mayor que 5, así el producto de 6 y 20 debe ser igual al de cinco por 24. Cuando se ve que esto mismo es cierto respecto de todas las proporciones, los mismos alumnos darán la regla ordinaria para hallar un factor dados los otros 3.

Proporciones.—Aunque las proporciones son una parte interesante y valiosa de la aritmética, y aunque sus principios suministran excelente oportunidad para ejercicios de demostración lógica, es de menos utilidad en la solución de problemas que la que los libros de texto suelen concederles. La regla de tres es uno de los mayores obstáculos con que tropiezan los estudiantes, porque se las enseña antes de tiempo y tan empíricamente que no tiene aplicación práctica alguna. Los problemas presentados con el nombre de *regla de tres* pueden ser resueltos por métodos mucho más sencillos. Sirva de ejemplo la siguiente cuestión:

"Si 17 relojes cuestan $153.34, cuanto costarán 50?" No se resuelva por el método de las proporciones sino por el de reducción á la unidad, así:

Si 17 cuestan $153.34, 1 costará 17 veces menos, y 50 costarán igual número de veces más.

$$\frac{\$153.34\times50}{17}.$$

Después de las fracciones comunes y decimales es cuando deben enseñarse las proporciones, porque así se entienden mejor.

Extracción de raíces.—Trataré, por último, de esclarecer el estudio de la raíz cuadrada por medio de ejemplos ilustrativos. Tomaré, como antes, un problema, é indicaré primero los medios de solución que enseñan los libros ordinarios.

Hallar la raíz cuadrada de 676, ó el número que multiplicado por sí mismo dé 676.

Regla.—Divídase el número en períodos de dos en dos, comenzando por las unidades; hállese la raíz cuadrada aproximada del primer período y réstese su cuadrado. (La raíz aproximada de 6 es 2, escríbase éste número, éleveselo al cuadrado y réstese de 6.) Á la derecha del residuo se escribe el siguiente período. (Escríbase 2 y bájese el 76.) Duplíquese la raíz hallada, divídase todo el residuo por este producto, escríbase el cociente á la derecha del divisor y multiplíquese dicho cociente por este nuevo divisor (4 es el duplo, 6 es el cociente y 46 el nuevo número, que ha de multiplicarse, por 6).

$$\begin{array}{rl} 676 & (\ 26 \\ \underline{4} & \\ 276 & (\ 46 \\ \underline{276} & 6 \\ 0 & \end{array}$$

"26 es el número buscado y es la raíz cuadrada de 676."

La regla, tal como ha sido dada, es mas bien una serie de prescripciones númericas que algo que hable al entendimiento. Cualquiera que sea la exactitud del resultado, es lo cierto que el procedimiento empleado aquí, en vez de fortificar ó desarrollar la facultad de pensar, no hará sino debilitarla. Como la regla aparece completamente arbitraria, la memoria tendrá gran dificultad en retenerla y sin una práctica constante y pesada probablemente no podrá ser retenida.

La regla sintética antes que la analítica.—Antes de describir los procedimientos racionales para llegar á estos resultados es bueno recordar que en la primera parte de la aritmética las reglas se presentan pareadas. Así, en la adición, se dan las partes y se pide el todo ; y á esta regla sigue la sustracción, en la que dado el todo y una de las partes, se trata de hallar la otra. En la multiplicación se dan los factores y se pide el producto, y en la división se sigue el procedimiento inverso, pues en ella se da el producto y uno de los factores y se trata de hallar el otro factor. En cada caso, el primer procedimiento es sintético, ó de reunión de partes, y el último analítico ó de descomposición. Comprendemos que este orden es natural y propio, y nadie enseñaría sustracción antes que la adición, ni división antes que la multiplicación, porque á menos que él estudie esta ciencia sepa cómo reunir las partes para formar el resultado, no está en situación, con el resultado ante él, de hallar cómo se obtiene el mismo. La regla para extraer la raíz cuadrada de un número, es, como claramente puede verse, de descomposición ó análisis, y es una de las reglas pareadas, análoga á las de multiplicación y división, pues la una enseña cómo se forma el cuadrado de un número, prescindiendo de los múltiplos de sus partes, y la otra muestra cómo, dado el cuadrado de un número, se hallan las partes de aquel número del cual es el cuadrado. Pero la regla de elevación á potencias supone la de extracción de

raíces, y no se puede entender bien el asunto sin haber aprendido bien esa regla. Sin embargo, en algunos textos de aritmética se hace empezar á los alumnos por la extracción de la raíz cuadrada sin hablarles previamente de la elevación á potencias.

Elevación á potencias.—En vez de partir de la analogía de las primeras reglas de la aritmética y de entrar en la regla para la extracción de raíces, antes de examinar la formación de los cuadrados, principiemos por tratar de hallar la segunda potencia de un número fácil compuesto de dos cifras. Así :

$$11=7+4\ ;\ \text{luego}\ 11\times 11=(7+4)\times(7+4).$$

Si se multiplica cada una de estas partes de once por cada una de las partes de once sucesivamente y se suman los productos, se obtienen cuatro productos distintos, de los cuales el primero es el cuadrado ó segunda potencia de 7, el último es el cuadrado ó segunda potencia de 4 ; y los otros dos son semejantes por ser el producto de 7 y 4.

$$\begin{array}{l}
\qquad\qquad 7+4\\
\qquad\qquad \underline{7+4}\\
\ (4\times 7)+(4\times 4)=(7+4)\times 4\\
\ \underline{(7\times 7)+(7\times 4)=(7+4)\times 7}\\
\underline{7^2+2(7\times 4)+4^2=(7+4)\times(7+4)}\\
\text{ó } 49+2\times 28+16=121
\end{array}$$

Por este medio llegamos fácilmente á esta verdad general :

“ El cuadrado de un número que consta de dos cifras se compone del cuadrado de la primera más el cuadrado de la segunda más dos veces el producto de una y otra cifra.”

Después de haber familiarizado bien al alumno con ejemplos de esta clase, se le puede presentar la expresión abstracta de la regla en esta forma :

Siendo $a=b+c$, resulta $a^2=b^2+c^2+2bc$.

Extracción de raíces.—Se puede ahora tratar de resolver el problema propuesto al principio, á saber: hallar la raíz cuadrada de 676.

"El producto de decenas por decenas da centenas; luego la raíz cuadrada de centenas será decenas.

"La raíz más aproximada de 600 es 2 decenas. Réstese de 676 el cuadrado de 2 decenas, que es 400, y quedarán 276. Por consiguiente, la raíz cuadrada de 676 es mayor que 20, y se forma de 20 más otro número.

$$\begin{array}{r|l|l} & 676 & 20+6 \\ & \underline{400} & =20^2 \\ 40 & 276 & 6 \\ & \underline{240} & =(40\times6) \\ & 36=6^2 & \end{array}$$

Luego el residuo 276 debe contener *no solamente el cuadrado de aquel otro número, sino dos veces el producto del número* 20 *por aquel mismo número.* Para hallar dicho número ha de averiguarse cuántas veces dos veces 20 está contenido en el residuo. 6 es el número que satisface á esa condición. Véase después si 276 contiene á 40 seis veces, con más 6 veces 6, ó 6 veces 46 en junto. Si esto es así, 6 es la cifra de las unidades de la raíz que se busca. Se ha demostrado que 676 contiene el cuadrado de 20, y el cuadrado de 6, y dos veces el producto de 20 por 6,

$$ó\ 26^2=20^2+6^2+2(20\times6)$$
$$400+36+240=676.$$

Toda la explicación de este procedimiento inverso se deduce evidentemente de la sencilla ley de elevación á potencias antes descrita. La razón del niño lo sigue paso á paso, y fija la regla en su memoria, que de otro modo á primera vista le habría parecido absurda y difícil de recordar.

Verdades análogas en aritmética y en geometría.—

Para que la regla de la extracción de la raíz cuadrada sea bien entendida, debe auxiliarse la explicación con ejercicios objetivos. Si sobre una recta dada dividida en dos partes desiguales se construye un cuadrado, se verá que puede dividirse en cuatro espacios cuyas dimensiones corresponden á los productos que se han dado. Puede mostrarse después un cuadrado construído sobre una recta dividida en tres ó más partes, y expresarse en números las dimensiones de las varias partes.

Importa mucho no confundir analogía con identidad. Creen algunos maestros que han demostrado los teoremas geométricos cuando han expresado las verdades correspondientes en símbolos algebraicos. Es algo impropio el uso de la palabra "cuadrado" tanto para nombrar esa figura de cuatro lados como la segunda potencia de un número; y el uso que se hace en algunas obras de geometría de los términos *plano* y *sólido* engañará un tanto á los estudiantes que los acepten, pues si se funda la geometría en el reconocimiento de las propiedades del espacio, y el álgebra y la aritmética, se fundan en las de los números, es necesario establecer una distinción clara en el razonamiento aplicable á los dos puntos. Deben mantenerse separados los dos ramos de la ciencia, á menos que traten demostrarse analogías interesantes; y mientras sólo investiguen por las leyes del número las verdades acerca de las potencias y de los productos numéricos, las demostraciones geométricas deben fundarse rigurosamente en axiomas relativos al espacio y no confundirse por el uso de los símbolos algebraicos.

Álgebra y geometría.—Por ser la aritmética un ramo de las matemáticas en que tiene que ejercitarse en primer lugar el maestro de escuela, se ha tratado aquí de indicar un método racional para estudiarla, que debe también aplicarse al álgebra, á la geometría, á la trigonometría y á todos los otros ramos de las matemáticas. Al poner á prueba los adelantos de los niños por medio de problemas, la solución de estos no es el principal objeto que debe proponerse el maestro, sino el conocimiento del sentido del procedimiento, y la disciplina en el terreno de la lógica. Si el álgebra y la geometría no hacen del estudiante un pensador más seguro y profundo, su estudio no tiene valor alguno.

Verdadero objeto de la enseñanza de las matemáticas. —Vamos ahora á tratar de la razón fundamental por la cual la enseñanza de las matemáticas deba hacerse extensiva á toda clase de personas, cualquiera que sea su edad. ¿Se apoya esto en que las doctrinas relativas al número y á la extensión sean en sí mismas de mucho valor, ó que estén en relación visible con los asuntos á que debamos consagrarnos después en la vida? Seguramente que no. Pero sí es porque el estudio de las matemáticas suministra cierto género de ejercicio mental que presta una ayuda incuestionable en todos los dominios concebibles del pensamiento; porque en aquella alta y serena región no hay partidos en el campo del espíritu, ni controversias personales, ni compromisos, ni equilibrio de probabilidades, ni penosas dudas de que aparezcan hoy como verdades las que puedan resultar errores mañana. Aquí siquiera el estudiante va paso á paso, de premisas á deducciones, de lo conocido á lo desconocido, de lo antecedente á lo consiguiente, con andar seguro y firme; conoce muy bien todo aquello de que es capaz la inteligencia humana, y los métodos por los cuales se llega á la certidumbre aproximada en los otros ramos de conocimientos. Si hay alguien que espere hallar en el mundo todas las verdades formuladas y demostradas como en matemáticas, es muy cándido ó muy ignorante. El que no ha recibido instrucción en matemáticas ni ha ejercitado su mente en el estudio de las verdades de las ciencias exactas y en el rigor y la lógica incontestable con que se llega á las conclusiones acerca del círculo y de los ángulos, tiene una educación muy incompleta, es como si le faltara un sentido; como si una de las puertas de la sabiduría estuviese cerrada para él; como si estuviese destituído de uno de los principales instrumentos que sirven para adquirir el saber.

Esta no es razón suficiente para mirar las ciencias matemáticas sólo desde el punto de vista de sus aplicaciones más remotas á otras materias como la astronomía y la física, ó con relación á su eficacia indirecta para reforzar la facultad del raciocinio en el que las estudia. Seguramente que hay algo en la belleza de las verdades mismas. Estamos en situación de discernir las sutiles armonías, las afinidades del número y de la extensión y el maravilloso camino por el cual, mediante unos cuantos postulados sencillos y verdades evidentes, la mente del hombre puede desplegar gradualmente todo un sistema de hermosos y nuevos teoremas que tienen infinitos é inesperados usos y aplicaciones.