Problemas.

182. Determinar la suma de las cantidades 385 varas, 2 pies, 6 pulgadas, 4 líneas+28 v. 1 P. 8 p. 6 l.,+404 v. 2 P. 9 p. 3 l.,+59 v. 2 P. 7 p. 5 l.,+ 345 v. 2 P. 6 p. 9 l.,+116 v. 1 P. 3 p. 10 l.,+46 v. 1 P. 9 p. 8 l., y hacer la prueba.

183. De 428 quintales, 2 arrobas, 18 libras, 6 onzas, 10 adarmes, 2 tomines, 6 granos, restar 119 qtles. 3 ars. 12 lb. 8 onzas, 8 adarmes, 2 tomines,.9 granos y hacer la prueba.

184. Determinar el valor de 425 varas, 2 pies, 5 pulgadas, á razón de 36$ 5 rs. 10 granos la vara.

185. Por 4 quintales, 6 libras, 8 onzas de cobre se han pagado 115$ 6 rs. 4 tlacos, y se quiere saber el valor del quintal.

186. ¿Cuánto costarán 22 libras, 8 onzas, 8 adarmes á 15$ 4 rs. la libra?

187. ¿Cuántas libras podrán comprarse con 349$ 1 real, 7 tlacos, pagándose á 15$ 4 rs. la libra?

Cuadrado y raíz cuadrada.

122. Elevación de un número al cuadrado.—*Se llama cuadrado de un número, el producto que resulta de multiplicarlo por sí mismo.* Por ejemplo, 64 es el cuadrado de 8, supuesto que $8\times8=64$.

La elevación de un número al cuadrado, se indica poniendo el exponente 2 arriba y á la derecha de la cantidad, la cual algunas veces se pone debajo de una raya y otras dentro de un paréntesis, de la manera siguiente:

$$25^2 \text{ ó } \overline{25}^2 \text{ ó } (25)^2=625$$

y se lee 25 elevado al cuadrado igual á 625.

Para elevar un número al cuadrado, basta multiplicarlo por sí mismo.

Si el número es entero, su cuadrado será también número entero. Si el número es un quebrado, para obtener el cuadrado se elevará por separado el numerador y el denominador, supuesto que para multiplicar los quebrados se multiplica numerador por numerador y denominador por denominador, v. g.:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{3^2}{4^2}=\frac{9}{16}$$

en este caso, el resultado es quebrado, y además, es menor que el quebrado que se eleva al cuadrado, porque el producto de los quebrados propios, es menor que cualquiera de los factores.

Si el número que se eleva es mixto, su cuadrado también lo será; y si está compuesto de enteros y decimales, el cuadrado constará de un número doble de cifras decimales. (106.)

Cuando la cantidad que se eleva al cuadrado solo es decimal, el cuadrado consta de un número doble de cifras que la decimal, y su valor numérico es menor que el de la cantidad que se eleva al cuadrado.

123.—Elevación al cuadrado de un número compuesto de decenas y unidades.—Si queremos elevar al cuadrado el número $36=30+6$, su cuadrado será igual al producto que resulte de multiplicar $30+6$ por $30+6$, de la manera siguiente:

$$\begin{array}{ll}
30+6 & \\
30+6 & \\
\hline
36=6^2 & \text{cuadrado de las unidades.} \\
\left.\begin{array}{r}180=30\times6\\180=30\times6\end{array}\right\} & \text{Doble producto de dec. por unid.} \\
900=30\times30 & \text{Cuadrado de las decenas.} \\
\hline
1296=30^2+2.(30\times6)+6^2 &
\end{array}$$

Al multiplicar 6 por 6, formamos el cuadrado de las unidades; al multiplicar 6 por 30, obtenemos un producto de las decenas por las unidades; al multiplicar 30 por 6 formamos otro producto de decenas por unidades, igual al anterior, y al multiplicar 30 por 30, se forma el cuadrado de las decenas. En consecuencia, *el cuadrado de todo número compuesto de decenas y unidades, consta de tres partidas: 1ª, cuadrado de las decenas, 2ª doble producto de las decenas por las unidades, y 3ª cuadrado de las unidades.*

Debe observarse: 1º, que decenas cuadradas producen centenas, supuesto que terminando cada uno de los factores en un cero, el producto debe llevar dos, esto es, debe expresar centenas; 2º el doble producto de decenas por unidades, debe expresar decenas, supuesto que uno de los factores, las decenas, termina en un cero; y en fin, la 3ª partida, el cuadrado de las unidades, siempre expresa unidades, aunque conste de dos ó más guarismos.

124. Raíz cuadrada.—*Se llama raíz cuadrada de un número, á la cantidad que, multiplicada por sí misma, produce el número propuesto.*

Por ejemplo, la raíz cuadrada de 81 es 9, supuesto que $9 \times 9 = 81$.

La raíz cuadrada se indica poniendo la cantidad dentro del signo $\sqrt{}$ de la manera siguiente:

$\sqrt{7298}$: se lee, raíz cuadrada de 7,298.

125. Si se trata de conocer la raíz cuadrada de la cantidad 55298, la operación se dispondrá y ejecutará como sigue:

$$
\begin{array}{lr|l}
 & \sqrt{5,52,98} & 235 \\
2^{a} \ldots\ldots\ldots\ldots & -4 & 43 \\
 & 15,2 & 465 \\
3 \times 43 \ldots\ldots\ldots\ldots & -129 & \\
 & 2\,39,8 & \\
5 \times 465 \ldots\ldots\ldots\ldots & -2\,325 & \\
 & 73 & \\
1^{a} \text{ resta} \ldots\ldots\ldots\ldots & 23 < 2 \times 23 & \\
2^{a} \text{ resta} \ldots\ldots\ldots\ldots & 73 < 2 \times 235 &
\end{array}
$$

Dividida la cantidad en períodos de dos en dos guarismos, se busca el mayor cuadrado contenido en 5, que es 4, cuya raíz es 2. El cuadrado de este número, restado de 5, da 1 por resta, al lado de la cual bajamos el período 52. Separando el 2, dividimos 15 por 4, duplo de la raíz, y el cociente 3 lo escribimos al lado de la raíz 2 y del 4. El cociente 3 se multiplica por 43, cantidad formada con el duplo de las decenas de la raíz y sus unidades, y el producto 129 se resta, comunmente á paso y medida que se forma, de 152. Al lado de la resta 23, bajamos el período 98; separando el guarismo 8, dividimos 239 entre 46, duplo de la raíz, y el cociente 5 lo ponemos al lado de 23 y de 46. En seguida multiplicamos las 5 unidades de la raíz por 465, número formado con el duplo de 23 (decenas de la raíz) más 5 unidades, y el producto lo restamos de 2398, quedando la resta 73.

Este resultado nos indica que la raíz cuadrada de 55298 no es un número exacto, estando comprendida entre 235 y 236. La extracción de la raíz cuadrada pocas veces conduce á un resultado exacto, y el verdadero valor en nuestro ejemplo, debe concebirse así:

$$55298 = 235^2 + 73$$

Esta resta 73 es el exceso de 55298 sobre el cuadrado de 235.

126. Regla para extraer la raíz cuadrada.—*Para extraer la raíz cuadrada de un número, se divide este en períodos de dos guarismos, contando de derecha á izquierda; se busca la raíz del mayor cuadrado contenido en el período de la izquierda, que podrá constar de uno ó dos guarismos; se escribe esta raíz á la derecha de la cantidad, separándola por una línea vertical, como en la división; se forma el cuadrado de la raíz hallada, y se resta del primer período de la izquierda. Al lado de la resta se baja el período siguiente; se separa el último guarismo de la derecha, y los que quedan á la izquierda se dividen por el duplo de la raíz hallada, poniendo el cociente al lado de la raíz; debajo de esta se pone el duplo de las decenas de la raíz, y á continuación las unidades; se multiplica la cantidad así formada por las unidades de la raíz, y se resta el producto de la cantidad formada con la resta y el período que se bajó á su derecha.*

Si el guarismo de las unidades es mayor que el verdadero, la resta no podrá ejecutarse; y si es menor, la resta resultará mayor que el duplo de la raíz. Al lado de la resta se baja el período siguiente, y se continúa la operación conforme á lo prescrito en la segunda parte de la regla.

Por cada período que se baja, se pone un guarismo ó cero en la raíz, y si la cantidad es un cuadrado perfecto, la última resta será 0.

Ejemplos.—¿Cuál será el lado de un patio cuadrado que tiene 625 metros cuadrados de superficie?

Para resolver el problema tendremos que extraer, conforme á la regla anterior, la raíz cuadrada de 625.


```
√ 6,25 | 25
  4    | 45
  22,5
  22 5
  00 0
```

El lado del patio es de 25 metros.

¿Cuál es el lado de una tierra de labor, cuadrada, cuya superficie es de 138384 varas cuadradas?

```
√ 13,83,84, | 372
   9        | 67
   48,3     | 742
    1 48,4  |
      00 0
```

El lado del cuadrado será de 372 varas.

127.—En los dos ejemplos anteriores no hubo resta, pero cuando la hay, y se quiere aproximar por decimales, como por cada cifra decimal de la raíz, al multiplicarla por sí misma, tiene que haber dos en el cuadrado, continuaremos la operación agregando á cada resta dos ceros.

Por ejemplo $\sqrt{896}$

```
√ 8,96      | 29'93
  49,6      | 49
   5 50,0   | 589
     19 90,0 | 5983
      1 95 1
```

Al obtener la resta 55 hemos agregado dos ceros para obtener como raíz 9 décimas.—La siguiente resta fué 1'99 y le hemos agregado dos ceros para obtener 3 centésimas.—Limitando hasta aquí la aproximación, la raíz de 896 es 89'93 y la resta 0'1951.

Aproximación de la raíz cuadrada.—*Cuando el resultado de la raíz cuadrada de un número entero no es exacto, se aproxima por decimales, agregando sucesivamente á cada resta dos ceros por cada decimal que se quiere obtener en la raíz, y se continúa la operación hasta alcanzar la aproximación apetecida, teniendo cuidado de separar con una coma la parte entera de la decimal.*

Sea, por ejemplo, extraer la raiz cuadrada á 698.

$\sqrt{6,98}$	26'41
2 98	46
22'0,0	52'4
1 0 40,0	52'81
5 11 9	

Ejecutando la operación como se ha dicho, encontraremos la raiz 26 unidades y la resta 22. Para encontrar las décimas de la raiz, agregamos dos ceros al lado de 22, ponemos la coma después de la raiz 26, y procediendo como antes, encontramos 4 décimas en la raiz y 104 centésimas de resta. A esta agregamos dos ceros, y encontramos 1 centésima en la raiz y 0' 5119 por resta.

128. Extracción de la raíz cuadrada de las decimales.—Ocurren dos casos: cuando hay enteros juntos con decimales, y cuando solo hay decimales.

1° *Cuando hay enteros con decimales, antes de comenzar la operación, se examina si el número de cifras decimales es par, y cuando no lo es, se agrega á la derecha un cero. En seguida, se ejecuta la operación conforme á la regla general (126) teniendo cuidado de poner la coma de separación entre los enteros y las decimales, en la raíz, al bajar el primer período de cifras decimales.*

Sea como ejemplo extraer la $\sqrt{235'273}$

Comenzamos por agregar un cero á la derecha de las decimales para que estas sean pares, y luego ejecutamos la operación por la regla general, teniendo cuidado de distinguir en la raíz las decimales de los enteros.

$\sqrt{2,35'27,30}$	15'33
1 3,5	25
1 0 2,7	30'3
1 1 83,0	30'63
2 64 1	

2° Caso.—*Cuando solo hay decimales, se hace que el número de estas sea par, con cuyo objeto se agrega un cero á la derecha cuando sea necesario. Se pone en la raíz 0 como raíz de la parte entera, una coma, y en seguida se extrae la raíz de las decimales como si fueran enteros.*

Por ejemplo:

$\sqrt{0'87,50}$	0'93
6 5,0	0'183
1 0 1	

$$0'875=(0'93)^2+0'0101$$

La prueba de la raíz cuadrada se ejecuta elevando al cuadrado la raíz encontrada, y agregando al producto la resta, debe obtenerse el número propuesto.

129. Extracción de la raíz cuadrada de los quebrados.—Se presentan tres casos: *1°, cuando los dos términos del quebrado tienen raíz exacta; 2°, cuando solo uno de sus términos tiene raíz exacta; y 3°, cuando ni el numerador ni el denominador tienen raíz exacta.*

En el *primer caso se extrae la raíz del numerador y la del denominador separadamente, y el quebrado formado con estas raíces será la raíz del quebrado propuesto*, una vez que para elevar un quebrado al cuadrado, se eleva su numerador y su denominador.

Por ejemplo: $\sqrt{\frac{16}{49}}=\frac{4}{7}$

2º Cuando sólo uno de los términos del quebrado tiene raíz exacta, se le extrae exacta al que la tenga y aproximada al otro término, con lo cual se obtiene un quebrado en el que uno de sus términos es entero y el otro se compone de enteros y decimales. A este quebrado se le da la forma común, agregando al término entero, tantos ceros como cifras decimales tenga el otro, suprimiendo en seguida la coma y abreviándolo cuando sea posible.

Por ejemplo: $\sqrt{\frac{16}{58}}=\frac{4}{7'61}=\frac{400}{761}$

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{58} & 7'61 \\ \hline 90{,}0 & 14'6 \\ 2\,40{,}0 & 15'21 \\ 87\,9 & \end{array}$$

3º Cuando ninguno de los dos términos del quebrado tiene raíz exacta, se reduce al segundo caso, multiplicando ambos términos por el numerador ó por el denominador, y en seguida se ejecuta la regla antes dada.

Si se quiere extraer la raíz cuadrada de $\frac{5}{7}$, multiplicaremos por el denominador sus dos términos; lo cual no altera su valor, y diremos:

$$\sqrt{\frac{5}{7}}=\sqrt{\frac{35}{49}}=\frac{5'91}{7}=\frac{591}{700}$$

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{35} & 5'91 \\ \hline 10'00 & 10'9 \\ 190'0 & 11'81 \\ 71\,9 & \end{array}$$

Por último, la raíz cuadrada de un quebrado puede obtenerse convirtiéndolo préviamente en decimal y extrayéndole á ésta la raíz, conforme á la regla dada. (128)

Ejemplos.—Se quiere determinar la raíz cuadrada del quebrado $\frac{676}{1024}$

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{6{,}76} & 26 \\ \hline 27{,}6 & 46 \\ 0\,0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} \sqrt{10{,}24} & 32 \\ \hline 12{,}4 & 62 \\ 0\,0 & \end{array} \qquad \sqrt{\frac{676}{1024}}=\frac{26}{32}$$

Extraer la raíz cuadrada del quebrado $\frac{40}{49}$.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{40} & 6'32 \\ \hline 40{,}0 & 123 \\ 3\,10{,}0 & 1262 \\ 57\,6 & \end{array} \qquad \sqrt{\frac{40}{49}}=\frac{6'32}{7}=\frac{632}{700}=\frac{158}{175}$$

Extraer la raíz cuadrada del quebrado $\frac{12}{15}$.

$$\sqrt{\frac{12}{15}}=\sqrt{\frac{12\times15}{15\times15}}=\frac{\sqrt{180}}{15}=\frac{13'4}{15}=\frac{134}{150}$$

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{1{,}80} & 13'4 \\ \hline 0\,8{,}0 & 23 \\ 1\,10{,}0 & 264 \\ 4\,4 & \end{array}$$

Extraer la raíz de $\frac{3}{8}$ convirtiéndolo préviamente en decimal.

$$\sqrt{\frac{3}{8}}=\sqrt{0'375}=0'612=\frac{612}{1000}=\frac{153}{250}$$

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{0'37{,}50} & 0'612 \\ \hline 15{,}0 & 121 \\ 2\,90{,}0 & 1222 \\ 45\,6 & \end{array}$$

PREGUNTAS.—122. ¿A qué se llama cuadrado de un número? ¿Cómo se indica que un número se ha de elevar al cuadrado?—¿Qué se hace para elevar un número al cuadrado? ¿De cuántas decimales consta el cuadrado de un número compuesto de enteros y decimales?—¿De cuántas cifras consta el cuadrado de una decimal?—123. ¿Cuáles son las partidas de que consta el cuadrado de un número compuesto de decenas y unidades?—124. ¿A qué se llama raíz cuadrada de una cantidad?—¿Cómo se indica la raíz cuadrada?—126. ¿Cuál es la regla para extraer la raíz cuadrada de un número entero?—127. ¿Cómo se aproxima la raíz cuadrada de un entero por decimales cuando no es exacta?—128. ¿Cómo se extrae la raíz cuadrada de enteros juntos con decimales?—¿Cómo se extrae la raíz cuadrada de una decimal?—¿Cómo se hace la prueba de la raíz cuadrada?—129. ¿Cuántos casos se presentan en la extracción de la raíz cuadrada de los quebrados? ¿Cómo se ejecuta la operación en el primer caso?—¿Cómo se extrae la raíz cuadrada de un quebrado cuando uno de sus términos no tiene raíz exacta?—¿Cómo se extrae la raíz cuadrada de un quebrado cuando ninguno de sus términos la tiene exacta? ¿De qué otra manera puede extraerse la raíz cuadrada á un quebrado?

PROBLEMAS.

188. Elevar al cuadrado 793; id. $\frac{5}{11}$; id. $2\frac{3}{4}$.

189. Elevar al cuadrado 2'032; id. 0'47.

190. Elevar al cuadrado por sus partidas á 45: id. á 83.

191. Extraer la raíz cuadrada de 11664; id. de 628849.

192. Aproximando hasta las centésimas, extraer la raíz cuadrada de 639; id. de 580 hasta las milésimas.

193. Extraer la raíz cuadrada de 8'8: id. de 0'899.

194. Extraer la raíz cuadrada de $\frac{441}{576}$; id. de $\frac{16}{18}$; id de $\frac{3}{15}$.

195. Extraer la raíz cuadrada de $\frac{5}{7}$, convirtiéndolo préviamente en decimal.

Cubo y raíz cúbica.

130. ELEVACIÓN DE UN NÚMERO AL CUBO.—*Se llama cubo ó tercera potencia de un número, el producto que resulta de multiplicarlo por su cuadrado.* En consecuencia, el cubo de un número es un producto formado por tres factores iguales. Por ejemplo: 125 es el cubo de 5, supuesto que 5×5^2, ó $5 \times 5 \times 5 = 125$.

La elevación de un número al cubo. se indica poniendo el exponente 3 á la derecha y arriba de la cantidad, la cual suele colocarse debajo de una raya ó dentro de un paréntesis.

$$15^3, \text{ ó } \overline{15}^3, \text{ ó } (15)^3 = 3375,$$

se lee: 15 elevado al cubo, igual á 3375.

Un número se eleva al cubo multiplicándolo por su cuadrado, ó dos veces sucesivas por sí mismo.

Cuando el número es entero, también lo será su cubo. Si el número es quebrado, para obtener su cubo habrá que elevar separadamente su numerador y denominador, supuesto que para multiplicar los quebrados se multiplica numerador por numerador y denominador por denominador.

$$\left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{4^3}{5^3} = \frac{64}{125}$$

En este caso, el cubo es quebrado y menor que el propuesto, porque el producto de la multiplicación de los quebrados propios es menor que cualquiera de sus factores.