PREGUNTAS.—122. ¿A qué se llama cuadrado de un número? ¿Cómo se indica que un número se ha de elevar al cuadrado?—¿Qué se hace para elevar un número al cuadrado? ¿De cuántas decimales consta el cuadrado de un número compuesto de enteros y decimales?—¿De cuántas cifras consta el cuadrado de una decimal?—123. ¿Cuáles son las partidas de que consta el cuadrado de un número compuesto de decenas y unidades?—124. ¿A qué se llama raíz cuadrada de una cantidad?—¿Cómo se indica la raíz cuadrada?—126. ¿Cuál es la regla para extraer la raíz cuadrada de un número entero?—127. ¿Cómo se aproxima la raíz cuadrada de un entero por decimales cuando no es exacta?—128. ¿Cómo se extrae la raíz cuadrada de enteros juntos con decimales?—¿Cómo se extrae la raíz cuadrada de una decimal?—¿Cómo se hace la prueba de la raíz cuadrada?—129. ¿Cuántos casos se presentan en la extracción de la raíz cuadrada de los quebrados? ¿Cómo se ejecuta la operación en el primer caso?—¿Cómo se extrae la raíz cuadrada de un quebrado cuando uno de sus términos no tiene raíz exacta?—¿Cómo se extrae la raíz cuadrada de un quebrado cuando ninguno de sus términos la tiene exacta? ¿De qué otra manera puede extraerse la raíz cuadrada á un quebrado?

PROBLEMAS.

188. Elevar al cuadrado 793; id. $\frac{5}{11}$; id. $2\frac{3}{4}$.

189. Elevar al cuadrado 2'032; id. 0'47.

190. Elevar al cuadrado por sus partidas á 45: id. á 83.

191. Extraer la raíz cuadrada de 11664; id. de 628849.

192. Aproximando hasta las centésimas, extraer la raíz cuadrada de 639; id. de 580 hasta las milésimas.

193. Extraer la raíz cuadrada de 8'8: id. de 0'899.

194. Extraer la raíz cuadrada de $\frac{441}{576}$; id. de $\frac{16}{18}$; id de $\frac{3}{15}$.

195. Extraer la raíz cuadrada de $\frac{5}{7}$, convirtiéndolo préviamente en decimal.

Cubo y raíz cúbica.

130. ELEVACIÓN DE UN NÚMERO AL CUBO.—*Se llama cubo ó tercera potencia de un número, el producto que resulta de multiplicarlo por su cuadrado.* En consecuencia, el cubo de un número es un producto formado por tres factores iguales. Por ejemplo: 125 es el cubo de 5, supuesto que 5×5^2, ó $5 \times 5 \times 5 = 125$.

La elevación de un número al cubo. se indica poniendo el exponente 3 á la derecha y arriba de la cantidad, la cual suele colocarse debajo de una raya ó dentro de un paréntesis.

$$15^3, \text{ ó } \overline{15}^3, \text{ ó } (15)^3 = 3375,$$

se lee: 15 elevado al cubo, igual á 3375.

Un número se eleva al cubo multiplicándolo por su cuadrado, ó dos veces sucesivas por sí mismo.

Cuando el número es entero, también lo será su cubo. Si el número es quebrado, para obtener su cubo habrá que elevar separadamente su numerador y denominador, supuesto que para multiplicar los quebrados se multiplica numerador por numerador y denominador por denominador.

$$\left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{4^3}{5^3} = \frac{64}{125}$$

En este caso, el cubo es quebrado y menor que el propuesto, porque el producto de la multiplicación de los quebrados propios es menor que cualquiera de sus factores.

Si el número que se eleva al cubo consta de enteros y decimales, su cubo será un número mixto compuesto en la parte decimal de un número de cifras triple de las que formen el propuesto, porque el cuadrado contiene un número doble, y en el producto del cuadrado por el número propuesto se deben separar tantas decimales como hay en ambos factores juntos.

Cuando la cantidad que se eleva al cubo sólo es decimal, su cubo constará de un número triple de cifras decimales, y su valor será menor que el de la decimal propuesta.

131. Partidas de que consta el cubo de un número compuesto de decenas y unidades.—Si queremos elevar al cubo el número $75=70+5$, tendremos que multiplicarlo por su cuadrado, esto es:

$$(70+5)^3=(70+5)^2\times(70+5).$$

pero como $(70+5)^2=70^2+2\,(70\times5)+5^2$ (123) tendremos que multiplicar las tres partes del cuadrado, primero por 70 y luego por 5, para formar el cubo de $70+5$; ejecutando esta multiplicación, tendremos:

$$\begin{array}{lll}
 & (70+5)^2=70^2+2\,(70\times5)+5^2 & \\
\text{por} & \qquad\qquad\qquad\qquad 70+5 & \\
\hline
\text{producto} & \text{por } 70=70^3+2\,(70^2\times5) + & 70\times5^2 \\
\text{id.} & \text{por } 5= \qquad (70^2\times5) + & 2\,(70\times5^2)+5^3 \\
\text{sumando} & (70+5)^3=70^3+3\,(70^2\times5)+ & 3\,(70\times5^2)+5^3
\end{array}$$

pero como 70 representa las decenas, y 5 las unidades del número 75 inferiremos: *que el cubo de un número compuesto de decenas y unidades, consta de cuatro partidas: 1ª, cubo de las decenas; 2ª, tres veces decenas cuadradas multiplicadas por las unidades; 3ª, tres veces decenas multiplicadas por las unidades cuadradas: y 4ª, cubo de las unidades.*

Debe observarse: 1º, que decenas cúbicas producen millares, porque al multiplicar el cuadrado de las decenas, que expresa centenas, por decenas, que terminan en un cero, el producto ó cubo terminará en tres ceros: 2º, la segunda partida expresa centenas, porque decenas cuadradas producen centenas: 3º, la tercera partida compuesta de decenas multiplicadas por tres veces las unidades cuadradas, expresa decenas: 4º, el cubo de las unidades, consta de unidades simples, aunque se representen por más de un número. Vamos á elevar al cubo por sus partidas el número $64=60+4$.

$$\begin{array}{rrl}
d^3= & 216000 & =60^3 \\
3\,d^2\times u= & 43200 & =3\times60^2\times4 \\
3\,d\times u^2= & 2880 & =3\times60\times4^2 \\
u^3= & 64 & =4^3 \\
\hline
 & 262144 & =64^3
\end{array}$$

132. Raíz cúbica.—*Se llama raíz cúbica de un número, aquel que multiplicado por su cuadrado produce el propuesto.*

Así, supuesto que $4\times4^2=64$, 4 será la raíz cúbica de 64.

La raíz cúbica de una cantidad se indica poniéndola debajo del signo radical con el número 3 entre las ramas del radical, á cuyo número se le llama índice de la raíz: $\sqrt[3]{872}$, se lee, raíz cúbica de 872.

133. Si se quiere determinar la raíz cúbica de 22.873,456, la operación se dispondrá y ejecutará como sigue:

$$\sqrt[3]{22{,}873{,}456} \;\Big|\; 283$$

$$\begin{array}{rl}
2^3= & 8 \\ \hline
 & 148{,}73 \\
3.(20)^2 \times 8= & 96\;00 \\
3.(20) \times 8^2= & 38\;40 \\
8^3= & 5\;12 \\ \hline
 & 139\;52 \\ \hline
 & 9\;214{,}56 \\
3.(280)^2 \times 3= & 7\;056\;00 \\
3.(280) \times 3^2= & 75\;60 \\
3^3= & 27 \\ \hline
 & 7131\;87 \\ \hline
 & 2082\;69
\end{array}$$

$12\ldots = 3.2^2$

$2352\ldots = 3.(28)^2$

$$\begin{array}{r}
28 \\ 28 \\ \hline 224 \\ 56 \\ \hline 784 \\ 3 \\ \hline 2352 \\ \hline
\end{array}$$

$3 \times (28)^2 = 2352$

$3 \times 28 = 84$

La resta..... $921 < 2436 + 1$

Resulta que: $22873456 = (283)^3 + 208269$.

Dividida la cantidad en períodos de á tres guarismos, se ve que el mayor cubo contenido en el período 22 de la izquierda es 8, cuya raíz es 2; restando el cubo de la raíz, 8, de 22, se obtiene 14 por resta, á cuyo lado se baja el período 873; se separan las decenas y unidades, 148 se divide por 12, triple del cuadrado de las decenas de la raíz, y aunque el cociente

es 12, como este sólo debe constar de unidades, y si ponemos 9 no se pueden restar las tres partidas restantes de 14873, pondremos 8 por unidades. Se forman las tres últimas partidas del cubo de 28, y su suma, 13952, se resta de 14873, obteniéndose la resta 921. Si el guarismo 8 de las unidades de la raíz no es menor que el verdadero, la resta 921 no será mayor que 3 veces 28^2 más 3 veces 28, esto es:

$$921 < 3 \times 28^2 + 3 \times 28 + 1 \text{ ó } 921 < 2437.$$

Al lado de la resta 921, se baja el período 456: se separan las decenas y unidades, se divide 9214 por 2352, triple del cuadrado de la raíz hallada, y el cociente 3 se pone como unidades: se forman las tres últimas partidas del cubo de 283, y restando su suma 713187 de 921456, se obtiene la resta 208269, que es el exceso que tiene el número propuesto sobre el cubo de 283.

134. Regla para extraer la raíz cúbica.—Para ejecutar esta operación nos valemos de las cuatro partidas del cubo, y buscamos las partes de la raíz por medio de ellas.

Para extraer la raíz cúbica de un número, se divide en períodos de á tres cifras, contando de derecha á izquierda, pudiendo constar el último de la izquierda de uno, dos ó tres guarismos; se busca la raíz del mayor cubo contenido en el período de la izquierda, y se escribe á la derecha de la cantidad separándola por una raya vertical como en la división; se forma el cubo de la raíz hallada, y se resta del primer período de la izquierda. Al lado de la resta se baja el período siguiente; se separan los dos guarismos de la derecha, y los que quedan á la izquierda se dividen por el triple del cuadrado de la raíz hallada, poniendo el cociente como unidades al

lado del guarismo de la raíz; una vez encontradas las decenas y unidades de la raíz, se forman con ellas las tres partidas restantes del cubo, que son: tres veces decenas cuadradas multiplicadas por las unidades; tres veces decenas por el cuadrado de las unidades, y cubo de las unidades; se suman estas tres partidas y se resta la suma de la cantidad formada con la primera resta y el período bajado al lado de ella.

Si el guarismo de las unidades es mayor que el verdadero, la resta no podrá ejecutarse, y si es menor, la resta será mayor que la suma del triple del cuadrado de la raíz, más tres veces esta raíz. Al lado de la resta se baja el período siguiente, se separan los dos últimos guarismos, y se continúa la operación conforme á lo prescrito al fin del párrafo anterior.

Por cada período que se baja se pone 0 ó una cifra significativa en la raíz, y si la cantidad es un cubo perfecto, la última resta será 0.

Ejemplos.—¿Cuál es la raíz cúbica del núm. 15625? Conforme á la regla anterior, dispondremos y ejecutaremos la operación como sigue:

	$\sqrt[3]{15,625}$	25
$2^3=$	8	12
	76,25	
$3\times20^2\times5$	60 00	
$3\times20\times5^2$	15 00	
5^3	1 25	
	76 25	
	0 00	

La raíz cúbica de 15625 es 25.

¿Cuál es la raíz cúbica de 48.228,544?

	$\sqrt[3]{48,228,544}$	364
$3^3=$	27	27 $=3.3^2$
	212,28	3888$=3.36^2$
$3.30^2\times6=$	162 00	
$3.30\times6^2=$	32 40	
$6^3=$	2 16	
	196 56	
	15 72 5,44	
$3.360^2\times4=$	15 55 200	
$3.360\times4^2=$	17 280	
$4^3=$	64	
	15 72 544	
	0 00 000	

La raíz cúbica de 48.228,544 es 364.

135.—En los dos ejemplos anteriores la raíz cúbica fué exacta porque no hubo resta; pero cuando la hay y quiere aproximarse la operación por decimales, teniendo presente que una fracción decimal expresada por una sola cifra elevándola al cubo, produce milésimas, para obtener las décimas de la raíz es necesario reducir las unidades de la resta á milésimas, lo cual se consigue agregando tres ceros, y en seguida se continúa la operación conforme á la regla general. La aproximación se continúa, agregando tres ceros á cada una de las siguientes restas.

Sea como ejemplo extraer la raíz cúbica á 416.

	$\sqrt[3]{416}$	7'46	
7^3	343	147	3.7^2
	730,00	16428	3.74^2
$3\times70^2\times4$	588 00		
$3\times70\times4^2$	33 60		
4^3	64		
	622 24		
	107 760,00		
$3\times740^2\times6$	98 568 00		
$3\times740\times6^2$	799 20		
6^3	2 16		
	99 369 36		
	8 390 64		

la raíz cúbica de 416 es 7'46 y se tiene por resta 0'839064, supuesto que hemos agregado dos veces tres ceros.

Regla para la aproximación de la raíz cúbica.—*Cuando al concluir de extraer la raíz cúbica de un número, queda una resta y se quiere aproximar el resultado por decimales, se agregan sucesivamente tres ceros á cada resta, por cada decimal que se quiera obtener en la raíz, y se continúa la operación conforme á la regla general, hasta tener el grado de aproximación que se desea, teniendo cuidado de separar en la raíz con una coma la parte entera de la decimal.*

Sea por ejemplo extraér la raíz cúbica de 12345.

$\sqrt[3]{12,345}$	23'1		
8	12		
43,45	1587	23	23
36 00		23	3
5 40		69	69
27		46	
1 78'000		529	
1 58 700		3	
690		1587	
1			
18'609			

$$12345=(23'1)^3+18'609.$$

Ejecutando la operación conforme á la regla, se llega á obtener la raíz 23 y como resta 178. Para aproximar por decimales, se agregan tres ceros y se pone una coma á la derecha de 23 unidades de la raíz, y después se determinan las décimas, ejecutando la operación conforme á la regla general.

136. Extracción de la raíz cúbica de las decimales.—Ocurren dos casos: cuando hay enteros juntos con decimales, ó cuando sólo hay decimales.

1er. caso.—*Cuando hay enteros y decimales, antes de comenzar la operación, se examina si el número de cifras decimales es múltiplo de tres, teniendo cuidado cuando no lo es, de agregar á la derecha uno ó dos ceros para satisfacer esta condición. En seguida se extrae la raíz de los enteros, se pone una coma á la derecha de las unidades de la raíz, y luego se bajan sucesivamente los períodos decimales para determinar la parte decimal de la raíz.*

Sea como ejemplo extraer la raíz cúbica de 36'4.

No siendo el número de decimales múltiplo de 3, comenzamos por hacerlo, agregando dos ceros, y en seguida ejecutamos la operación conforme á la regla.

$$\begin{array}{l|l} \sqrt[3]{36'400} & 3'3 \\ \;\;27 & \overline{27} \\ \hline \;\;9'400 & \\ \hline \;\;8\,100 & \\ \;\;\;\;810 & \\ \;\;\;\;\;\;27 & \\ \hline \;\;\;\;463 & \end{array}$$

$36'4=(3'3)^3+0'463$

2º CASO.—*Cuando sólo hay decimales, se comienza por hacer que el número de estas sea tres ó un múltiplo de tres, á cuyo fin se agregan, cuando sea necesario, uno ó dos ceros á la derecha. En seguida se pone cero en la raíz para representar su parte entera, una coma, y se extrae la raíz de las decimales, como si fueran enteros, por la regla general.*

Si se quiere extraer la raíz cúbica de 0'7654, se comienza por agregar dos ceros á la derecha.

$$\begin{array}{l|l} \sqrt[3]{0'765,400} & 0'91 \\ \;\;729 & \overline{243} \\ \hline \;\;364,00 & \\ \hline \;\;243\,00 & \\ \;\;\;\;2\,70 & \\ \;\;\;\;\;\;\;1 & \\ \hline \;\;118\,29 & \end{array}$$

$0'7654=(0'91)^3+0'011829.$

Se pone 0 enteros en la raíz, y se determina la de la parte decimal que es 0'91.

La prueba de la raíz cúbica se hace elevando al cubo la raíz hallada, y agregando la resta debe obtenerse el número propuesto.

137.—EXTRACCIÓN DE LA RAÍZ CÚBICA DE LOS QUEBRADOS.—Ocurren tres casos: *1º, cuando los dos términos del quebrado tienen raíz exacta; 2º cuando sólo uno la tiene; y 3º, cuando ni el numerador ni el denominador tienen raíz exacta.*

En el primer caso se extrae la raíz del numerador y la del denominador, y el quebrado formado con las raíces respectivas será la raíz cúbica del quebrado propuesto, supuesto que para elevar un quebrado al cubo, se eleva separadamente su numerador y su denominador.

$$\sqrt[3]{\tfrac{8}{64}}=\tfrac{2}{4}$$

En el segundo caso se extrae la raíz exacta al término que la tenga, y la del otro se aproxima por decimales. En el quebrado que se obtiene, se agregan al término entero tantos ceros como cifras decimales tenga el otro, se suprime la coma, y se simplifica el quebrado si es posible.

$$\sqrt[3]{\frac{8}{12}}=\frac{2}{2'2}=\frac{20}{22}=\frac{10}{11}$$

El tercer caso se reduce al segundo, multiplicando los dos términos del quebrado, por el cuadrado del numerador, ó por el cuadrado del denominador.

$$\sqrt[3]{\frac{5}{6}}=\quad\sqrt[3]{\frac{5\times6^2}{6\times6^2}}\quad\sqrt[3]{\frac{180}{6^3}}=\frac{5'6}{6}=\frac{56}{60}$$

La raíz cúbica de un quebrado puede también obtenerse convirtiéndolo previamente en decimal y extrayéndole á esta la raíz cúbica, conforme á la regla dada en el número 136.

Ejemplos.—Se quiere determinar la raíz cúbica del quebrado $\frac{19683}{32768}$.

```
∛19,6 83 | 27      ∛32,768 | 32
   8     | 12          27  | 27
  116,83              57,68
   84 00              54 00
   29 40               3 60
    3 43                 8
  116 83              57 68
    0 00              0 00
```

$$\sqrt[3]{\frac{19683}{32768}}=\frac{27}{32}$$

Extraer la raíz cúbica del quebrado $\frac{64}{82}$.

```
∛ 82      | 4'3
  64      | 48
  180,00
  144 00
   10 80
      27
  155 07
   24 93
```

$$\sqrt[3]{\frac{64}{82}}=\frac{4}{4'3}=\frac{40}{43}$$

Extraer la raíz cúbica del quebrado $\frac{14}{18}$.

$$\sqrt[3]{\frac{14}{18}}=\sqrt[3]{\frac{14\times18^2}{18\times18^2}}=\sqrt[3]{\frac{4536}{18^3}}$$

```
∛4,5 36 | 16'5
 3 5,36 | 3
  1 8 00 | 768
  1 0 80
    2 16
  3 0 96
  4 400,00
  3 840 00
    120 00
        1 25
  3 961 25
    438 75
```

En consecuencia:

$$\sqrt[3]{\frac{14}{18}}=\frac{16'5}{18}=\frac{165}{180}=\frac{11}{12}$$

Extraer la raíz cúbica de $\frac{3}{4}$ convirtiéndolo previamente en decimal.

$$\sqrt[3]{\frac{3}{4}}=\sqrt[3]{0'75}$$

```
∛0'750          | 0'908
  729           | 2 43
  210,000,00    | 2 4300
  194 400 00
    1 728 00
        5 12
  196 133 12
   13 866 88
```

Preguntas.—130. ¿A qué se llama cubo de un número? ¿Cómo se indica que un número se ha de elevar á la tercera potencia? ¿Cómo se eleva al cubo un número? ¿De cuántas cifras consta en la parte decimal el cubo de un número compuesto de enteros y decimales? ¿De cuántas cifras consta el cubo de una decimal?—131. ¿Cuáles son las partidas del cubo de un número compuesto de decenas y unidades?—132. ¿A qué

se llama raíz cúbica de una cantidad? ¿Cómo se indica la raíz cúbica de un número?—134. ¿Cuál es la regla para extraer la raíz cúbica de un número entero?—135. ¿Cómo se aproxima la raíz cúbica de un número entero cuando no es exacta?—136. ¿Cómo se extrae la raíz cúbica de un entero junto con decimales? ¿Cómo se extrae la raíz cúbica á una decimal? ¿Cómo se hace la prueba de la raíz cúbica?—137. ¿Cuántos casos se presentan en la extracción de la raíz cúbica de los quebrados? ¿Cómo se extrae la raíz cúbica de un quebrado en el primer caso? ¿Cómo se extrae la raíz cúbica de un quebrado cuando uno de sus términos no tiene raíz exacta? ¿Cómo se extrae la raíz cúbica de un quebrado cuando ninguno de sus términos tiene raíz exacta? ¿De qué otro modo puede extraerse la raíz cúbica de un quebrado?

PROBLEMAS.

196. Elevar al cubo 365; id. $\frac{12}{15}$; id. $4\frac{5}{6}$.

197. Elevar al cubo 5'08; id. 0'375.

198. Elevar al cubo por sus partidas á 25; id. 86.

199. Extraer la raíz cúbica de 24389; idem de 636056.

200. Aproximar la raíz cúbica de 75 hasta las centésimas.

201. Extraer la raíz cúbica de 82'3; id. de 0'5855.

202. Extraer la raíz cúbica de $\frac{614125}{884736}$; id. de $\frac{6}{8}$; id. de $\frac{5}{6}$.

203. Extraer la raíz cúbica de $\frac{3}{12}$ convirtiéndolo préviamente en decimal.

Razones y proporciones.

138.—*Se llama razón á la relación que existe entre dos cantidades homogéneas que se comparan*, y también se da este nombre al número que expresa la relación. Algunas veces que los términos de la razón son heterogéneos, se consideran como abstractos.

La comparación puede hacerse averiguando la diferencia que hay entre las dos cantidades, ó bien el número de veces que una contiene á la otra. *Las cantidades que se comparan forman los términos de la razón, llamándose antecedente al primero y consecuente al segundo.*

139.—Razón aritmética.—*Se llama razón aritmética la diferencia que hay entre dos cantidades homogéneas.*

La razón aritmética se indica poniendo un punto entre las dos cantidades que se comparan;

22 . 14

se leé: 22 es á 14. Otras veces se indica poniendo el signo menos entre las dos cantidades: 22—14=8. Las dos cantidades 22 y 14, forman los términos de la razón, llamándose á la primera, 22, antecedente, y á la segunda, 14, consecuente de la razón.

La razón aritmética no se altera cuando se agregan ó quitan á sus dos términos cantidades iguales.

140. Razón geométrica.—*Se llama razón geométrica el cociente que resulta de dividir una por otra dos cantidades homogéneas.*

La razón geométrica, que suele llamarse por *cociente*, se indica poniendo dos puntos entre las cantidades comparadas;

24 : 8;

y se leé, 24 es á 8. Otras veces se indica en forma de quebrado poniendo el antecedente de la razón como numerador, así $\frac{24}{8}$, y en ambos casos se determina la razón dividiendo el antecedente por el consecuente.

La razón geométrica no se altera cuando se multiplican ó dividen sus dos términos por un mismo número.

141. Proporciones.—*Se llama proporción la igual-*