se llama raíz cúbica de una cantidad? ¿Cómo se indica la raíz cúbica de un número?—134. ¿Cuál es la regla para extraer la raíz cúbica de un número entero?—135. ¿Cómo se aproxima la raíz cúbica de un número entero cuando no es exacta?—136. ¿Cómo se extrae la raíz cúbica de un entero junto con decimales? ¿Cómo se extrae la raíz cúbica á una decimal? ¿Cómo se hace la prueba de la raíz cúbica?—137. ¿Cuántos casos se presentan en la extracción de la raíz cúbica de los quebrados? ¿Cómo se extrae la raíz cúbica de un quebrado en el primer caso? ¿Cómo se extrae la raíz cúbica de un quebrado cuando uno de sus términos no tiene raíz exacta? ¿Cómo se extrae la raíz cúbica de un quebrado cuando ninguno de sus términos tiene raíz exacta? ¿De qué otro modo puede extraerse la raíz cúbica de un quebrado?

PROBLEMAS.

196. Elevar al cubo 365; id. $\frac{12}{15}$; id. $4\frac{5}{6}$.

197. Elevar al cubo 5'08; id. 0'375.

198. Elevar al cubo por sus partidas á 25; id. 86.

199. Extraer la raíz cúbica de 24389; idem de 636056.

200. Aproximar la raíz cúbica de 75 hasta las centésimas.

201. Extraer la raíz cúbica de 82'3; id. de 0'5855.

202. Extraer la raíz cúbica de $\frac{614125}{884736}$; id. de $\frac{6}{8}$; id. de $\frac{5}{6}$.

203. Extraer la raíz cúbica de $\frac{3}{12}$ convirtiéndolo préviamente en decimal.

Razones y proporciones.

138.—*Se llama razón á la relación que existe entre dos cantidades homogéneas que se comparan*, y también se da este nombre al número que expresa la relación. Algunas veces que los términos de la razón son heterogéneos, se consideran como abstractos.

La comparación puede hacerse averiguando la diferencia que hay entre las dos cantidades, ó bien el número de veces que una contiene á la otra. *Las cantidades que se comparan forman los términos de la razón, llamándose antecedente al primero y consecuente al segundo.*

139.—Razón aritmética.—*Se llama razón aritmética la diferencia que hay entre dos cantidades homogéneas.*

La razón aritmética se indica poniendo un punto entre las dos cantidades que se comparan;

22 . 14

se leé: 22 es á 14. Otras veces se indica poniendo el signo menos entre las dos cantidades: 22—14=8. Las dos cantidades 22 y 14, forman los términos de la razón, llamándose á la primera, 22, antecedente, y á la segunda, 14, consecuente de la razón.

La razón aritmética no se altera cuando se agregan ó quitan á sus dos términos cantidades iguales.

140. Razón geométrica.—*Se llama razón geométrica el cociente que resulta de dividir una por otra dos cantidades homogéneas.*

La razón geométrica, que suele llamarse por *cociente*, se indica poniendo dos puntos entre las cantidades comparadas;

24 : 8;

y se leé, 24 es á 8. Otras veces se indica en forma de quebrado poniendo el antecedente de la razón como numerador, así $\frac{24}{8}$, y en ambos casos se determina la razón dividiendo el antecedente por el consecuente.

La razón geométrica no se altera cuando se multiplican ó dividen sus dos términos por un mismo número.

141. Proporciones.—*Se llama proporción la igual-*

dad de dos razones. La proporción será aritmética ó geométrica, según sea la clase de las razones que la forman.

Una proporción consta de cuatro términos: dos que forman la primera razón, y dos la segunda.

142.—Proporción aritmética.—*Se llama proporción aritmética, la igualdad de dos razones aritméticas.*

La proporción aritmética se indica como sigue:

$$11 . 7 : 9 . 5$$

y se leé: 11 es á 7, como 9 es á 5. Suele llamarse equidiferencia, é indicarse 11—7=9—5.

Se llaman *antecedentes* en la proporción, á los números que en las razones que la constituyen, forman los antecedentes: 11 es el primer antecedente y 9 el segundo antecedente. Igual distinción se hace con los *consecuentes.* A 7 y á 9 se les llama *medios* de la proporción: y á 11 y 5 *extremos,* indicando estos últimos nombres, la posición relativa de los cuatro términos en la proporción. Se llama *proporción contínua, la que tiene los medios iguales,* por ejemplo:

$$12 . 8 : 8 . 4;$$

en este caso, 8 es un medio aritmético entre los números 12 y 4, y la proporción suele indicarse de esta manera:

$$\div 12 . 8 . 4;$$

debiendo repetirse el término medio al leerla.

La propiedad fundamental de la proporción aritmética es, que la suma de los extremos es igual á la suma de los medios.

Recíprocamente, siempre que en cuatro cantidades la suma de dos de ellas sea igual á la de las otras dos, las

cuatro cantidades formarán una proporción aritmética, en la que los extremos serán dos de los sumandos y los medios serán los otros dos.

La propiedad fundamental nos sirve para resolver dos problemas: encontrar el cuarto término de una proporción cuando se conocen los otros tres; y hallar un medio aritmético entre dos cantidades.

Para encontrar el cuarto término de una proporción aritmética, si el término que se busca es un extremo, se suman los medios, y de la suma se resta el extremo conocido; si lo que se busca es un medio, se sumarán los extremos y se restará el medio conocido.

Si se quiere encontrar el cuarto término de una proporción aritmética, cuyos tres primeros son:

$$15 . 7 : 10 . x.$$

sumaremos 7 y 10=17, y de esta suma restaremos el extremo conocido 15, y como 17—15=2, este número será el cuarto término de la proporción 15.7:10.2. Lo mismo que se acostumbra en álgebra, aquí hemos representado por x la cantidad desconocida.

Para hallar un medio aritmético entre dos números dados, se suman estos y se toma la mitad de la suma.

Para hallar un medio aritmético entre los números 9 y 17, se suman 9+17=26, y la mitad, 13, de 26, será el medio aritmético buscado.

$$9 . 13 : 13 . 17$$

143.—Proporción geométrica.—*Se llama proporción geométrica, la igualdad de dos razones geométricas.*

La proporción geométrica se indica así:

$$24 : 8 :: 27 : 9,$$

y se leé: 24 es á 8, como 27 es á 9. Se suele llamar

proporción por cociente, é indicarse, $\frac{24}{8}=\frac{27}{9}$, leyéndose siempre del mismo modo. Las denominaciones de antecedentes, consecuentes, medios, extremos, primera y segunda razón, son las mismas que en la proporción aritmética (142).

Se llama proporción geométrica contínua, la que tiene los medios iguales, y suele indicarse así:

$$\div\ 16 : 8 : 4,$$

y se lee: 16 es á 8, como 8 es á 4.

La propiedad fundamental de la proporción geométrica, es que el producto de los extremos es igual al producto de los medios.

Recíprocamente, siempre que en cuatro cantidades el producto de dos de ellas sea igual al de las otras dos, las cuatro cantidades estarán en proporción geométrica, en la que los extremos serán dos de los factores, y los medios los otros dos.

La propiedad fundamental sirve para resolver dos problemas: encontrar un término cuando se conocen los otros tres: hallar un medio geométrico entre dos números dados.

Para encontrar un extremo en una proporción geométrica, se multiplican los medios y el producto se divide por el extremo conocido; para hallar un medio, se multiplican los extremos, y el producto se divide por el medio conocido.

Se quiere encontrar el cuarto término geométrico de

$$3 : 9 :: 7 : x.$$

Multiplicaremos los medios 7 y 9, y el producto 63 lo dividiremos por el extremo 3 conocido; el cociente 21 será el cuarto término de la proporción.

$$3 : 9 :: 7 : 21.$$

Esta regla es el fundamento de la resolución de los problemas que se llaman *regla de tres*, y de sus numerosas aplicaciones.

Para encontrar un medio geométrico entre dos números dados, se multiplican éstos, y al producto se le extrae la raíz cuadrada.

Se quiere encontrar un medio geométrico entre 4 y 16. Multiplicaremos $4\times16=64$, y extrayendo la raíz cuadrada á 64, igual á 8, este número será el medio geométrico buscado.

$$\div\ 4 : 8 : 16.$$

144.—Supuesto que la razón geométrica no se altera cuando se multiplican ó se dividen sus dos términos por un mismo número (140), y que proporción es la igualdad de dos razones (143), se infiere:

1º Que una proporción geométrica no se alterará cuando los términos de una ó de las dos razones que la forman, se multipliquen ó dividan por un mismo número.

Por ejemplo, si están en proporción las cantidades

$$6 : 8 :: 3 : 4$$

también lo estarán $12 : 16 :: 3 : 4$
$60 : 80 :: 30 : 40$

2º Una proporción no se altera cuando se multiplican ó dividen por un mismo número los antecedentes.

Sea la proporción $12 : 15 :: 16 : 20$
Multiplicando los antecedentes $120 : 15 :: 160 : 20$

La primera razón se habrá hecho 10 veces mayor, pero como otro tanto ha sucedido con la segunda, es claro que subsistirá la proporción.

Si dividimos por 4 los antecedentes, tendremos:

en lugar de 12 : 15 :: 16 : 20
3 : 15 :: 4 : 20

y la proporción subsistirá, supuesto que cada una de las dos razones que la forman es 4 veces menor que antes.

3º Una proporción no se altera cuando se multiplican ó dividen por un mismo número los consecuentes.

Porque al multiplicar un consecuente, la razón disminuye, y al dividirlo aumenta, (70, 2º, 4º); pero como las dos razones sufren igual variación, subsistirá la proporción.

Se ve, pues, que una proporción puede simplificarse dividiendo por el mismo número: 1º, los dos términos de una de sus razones; 2º, sus cuatro términos; 3º, los antecedentes, y 4º, los consecuentes.

145.—Trasformaciones que pueden efectuarse en la proporción geométrica.—Fundándonos en que siempre que en cuatro cantidades el producto de los extremos sea igual al de los medios, las cuatro cantidades estarán en proporción, podremos efectuar en una proporción dada las trasformaciones que se llaman: *alternar, invertir,* y *permutar*, y las cuales referiremos á la proporción

3 : 4 :: 6 : 8.

1ª *Alternar, que es mudar de lugar los medios ó los extremos.*

Por ejemplo, de 3 : 4 :: 6 : 8.
Alternando medios se obtiene 3 : 6 :: 4 : 8.
Alternando extremos 8 : 4 :: 6 : 3.

2ª *Invertir, que es poner los medios en lugar de los extremos, y éstos en lugar de aquellos,*

Por ejemplo, de 3 : 4 :: 6 : 8.
Invirtiendo se obtiene 4 : 3 :: 8 : 6.

3ª *Permutar que es poner la primera razón en lugar de la segunda, y recíprocamente.*

Por ejemplo, de 3 : 4 :: 6 : 8.
Permutando se obtiene 6 : 8 :: 3 : 4.

Basta formar, ó indicar el producto de los extremos y de los medios en la proporción primitiva, y en cualquiera de las que ha resultado después de la trasformación, para persuadirse de que si primero el producto de los extremos era igual al de los medios, después también lo será.

Fundándonos en que mientras subsista la igualdad de las dos razones, subsistirá la proporción, podremos hacer en una proporción las trasformaciones que se llaman, *componer y dividir.*

4ª *Componer, es comparar la suma del antecedente y consecuente, en cada razón, con el consecuente.*

Por ejemplo, de 12 : 9 :: 8 : 6.
Componiendo se obtiene 12+9 : 9 :: 8+6 : 6.

En esta trasformación, al agregar el divisor 9 al dividendo 12, la primera razón ha aumentado una unidad: pero como lo mismo ha sucedido en la segunda razón, resulta que si antes eran iguales las dos razones, después de *componer* también lo serán.

5ª *Dividir, es comparar la diferencia entre el antecedente y consecuente de cada razón con el consecuente.*

Por ejemplo, de 12 : 9 :: 8 : 6.
Dividiendo se obtiene 12—9 : 9 :: 8—6 : 6.

La proporción subsiste, porque han disminuido la primera y la segunda razón una unidad; luego si primero eran iguales las razones, después de *dividir* también lo serán. Demostraremos los siguientes teoremas:

I. Si se multiplican ordenadamente dos proporciones, los cuatro productos que resulten estarán igualmente en proporción.

Sean las proporciones

$$3 : 4 :: 6 : 8$$
$$5 : 2 :: 10 : 4$$

y vamos á demostrar que estarán igualmente en proporción los productos

$$3 \times 5 : 4 \times 2 :: 6 \times 10 : 8 \times 4$$

poniendo cada proporción en forma de ecuación, se tendrá:

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$$
$$\frac{5}{2} = \frac{10}{4}$$

y como si cantidades iguales se multiplican por iguales, los resultados también lo serán, se tendrá:

$$\frac{3}{4} \times \frac{5}{2} = \frac{6}{8} \times \frac{10}{4}$$

ejecutando la operación:

$$\frac{3 \times 5}{4 \times 2} = \frac{6 \times 10}{8 \times 4}$$

con cuyos valores podemos establecer la proporción

$$3 \times 5 : 4 \times 2 :: 6 \times 10 : 8 \times 4$$

que es lo que debíamos demostrar.

II. Cuando deban multiplicarse ordenadamente dos ó más proporciones, se podrán suprimir los factores que

sean comunes, 1º, á los dos términos de la misma razón; 2º, á los antecedentes; y 3º, á los consecuentes; multiplicándose los términos restantes.

Sea por multiplicar las proporciones.

$$\left\{\begin{array}{l} 2 : (3) :: 4 : 6 \\ (3) : 9 :: (5) : 15 \\ (5) : 4 :: 10 : 8 \end{array}\right.$$
$$2 : 9 \times 4 :: 4 \times 10 : 6 \times 15 \times 8$$

En este ejemplo hemos suprimido el factor 3 porque era común à los términos de la primera razón, y hemos suprimido 5 por ser común á los antecedentes; pero debe tenerse cuidado *de no suprimir ningún factor común á los medios ó á los extremos*, como 4 en nuestro ejemplo.

III. La suma de los antecedentes es á la de los consecuentes, como un antecedente es á su consecuente.

Sea la proporción	$4 : 3 :: 8 : 6$
Alternando medios	$4 : 8 :: 3 : 6$
Componiendo	$4+8 : 8 :: 3+6 : 6$
Alternando medios	$4+8 : 3+6 :: 8 : 6$

y como 4 y 8 son los antecedentes y 3 y 6 son los consecuentes, resulta demostrado el teorema.

IV. La diferencia de los antecedentes es á la de los consecuentes, como un antecedente es á su consecuente.

Sea la proporción	$4 : 3 :: 8 : 6$
Alternando medios	$4 : 8 :: 3 : 6$
Dividiendo	$4-8 : 8 :: 3-6 : 6$
Alternando medios	$4-8 : 3-6 :: 8 : 6$

y como 4 y 8 son los antecedentes, y como 3 y 6 son los consecuentes, resulta el teorema demostrado.

PREGUNTAS.—138. ¿A qué se llama razón? ¿Cómo se llaman las cantidades que forman la razón?—139. ¿Qué se entiende por razón aritmética? ¿Cómo se indica la razón aritmética?—¿Qué sucede con la razón aritmética cuando á sus dos términos se les agregan ó quitan cantidades iguales?—140. ¿A qué se llama razón geométrica?—¿Cómo se indica la razón geométrica?—¿Qué sucede con la razón geométrica cuando se multiplican ó dividen sus dos términos por un mismo número? 141. ¿A qué se llama proporción?—142. ¿Qué se entiende por proporción aritmética?—¿Cómo se indica la proporción aritmética?—¿Cuáles son los nombres que se dan á los diferentes términos de una proporción?—¿A qué se llama proporción contínua?—¿Cuál es la propiedad fundamental de la proporción aritmética?—¿En qué se conoce que cuatro cantidades pueden formar una proporción aritmética?—¿Cómo se determina el valor del cuarto término de una proporción aritmética?—¿Cómo se determina un medio aritmético entre dos números?—143. ¿A qué se llama proporción geométrica?—¿Cómo se indica la proporción geométrica?—¿A qué se llama proporción geométrica contínua, y cómo se indica?—¿Cuál es la propiedad fundamental de la proporción geométrica?—¿En qué se conoce que cuatro cantidades pueden formar una proporción geométrica? —¿Qué se hace para encontrar el cuarto término de una proporción geométrica?—¿Cómo se determina el valor de un medio geométrico entre dos cantidades?—144. ¿Qué términos de una proporción geométrica pueden multiplicarse por un mismo número sin que se altere la proporción?—¿Qué términos de una proporción pueden dividirse por un mismo número sin que se altere la proporción?—¿De cuántas maneras puede simplificarse una proporción?—145. ¿A qué se llama *alternar* en una proporción?—¿A qué se llama *invertir?*—¿A qué se llama *permutar?*—¿A qué se llama *componer?*—¿A qué se llama *dividir?* – ¿Cómo se demuestra que si se multiplican ordenadamente dos proporciones geométricas, los cuatro productos que resulten estarán igualmente en proporción?—Cuando se multiplican ordenadamente dos proporciones ¿de qué términos podrán suprimirse los factores que sean comunes?—¿Cómo se demuestra que la suma de los antecedentes es á la de los consecuentes, como un antecedente es á su consecuente? – ¿Cómo se demuestra que la diferencia de los antecedentes es á la de los consecuentes, como un antecedente es á su consecuente?

PROBLEMAS.

204. Determinar el 4º término de la proporción $2 . 7 : 10 . x$.

205. Determinar el 4º término de la proporción $\frac{7}{12} . \frac{21}{4} : \frac{16}{3} . x$.

206. Hallar un medio aritmético entre 25 y 50,

207. Hallar un medio aritmético entre 8'54 y 16'256.

208. Determinar el 4º término de la proporción $16 : 20 :: 30 : x$.

209. Determinar el tercer término de la proporción $\frac{8}{9} : \frac{3}{4} :: x : 13\frac{1}{2}$.

210. Encontrar un medio geométrico entre 9 y 64.

211. Encontrar un medio geométrico entre 81 y 25.

212. Simplificar la proporción: $54 : 72 :: 16 : x$.

213. Simplificar la proporción: $36 : 24 :: 96 : 64$.

214. Simplificar la proporción: $60 : 8 :: 240 : x$.

215. Simplificar la proporción: $7 : 75 :: x : 120$.

Regla de tres.

146.—PROBLEMA.—En una semana 10 caballos consumen tres cargas de cebada: en el mismo tiempo 25 caballos, ¿cuántas cargas consumirán?

Como si el número de caballos se duplica, se duplicará igualmente el número de cargas de cebada que consumirán, y como si se triplican los caballos, se triplicarán las cargas de cebada, se infiere que la misma relación que haya entre los números de los caballos, habrá entre las cargas consumidas, y por tanto, estas cantidades, por la naturaleza de la cuestión, serán pro-