

NUM. 2º

ARITMÉTICA

PARA LOS NIÑOS

POR

MANUEL MARÍA CONTRERAS

PROFESOR DE MATEMÁTICAS EN LA ESCUELA NORMAL
Y EN LA ESCUELA NACIONAL PREPARATORIA,
INGENIERO DE MINAS, ENSAYADOR
Y BENEFICIADOR DE METALES, ETC., ETC., ETC.

Contiene la explicación de los números
naturales y fracciones, hasta las de
tercer orden, operaciones de los números
naturales y fracciones, y reglas para
de un sistema en las de otro, y más de
resoluciones.

Las lecciones para los niños
algunas de las lecciones
aritméticas, y algunas de
para conseguir los datos de
problemas aritméticos, con sus

UNDECIMA EDICION.

Precio. 50 centavos.

MEXICO
EN LA IMPRENTA DE M. GUILA.

ALBERTO VIZCARRA, EN COMISIÓN.

1884

Obra premiada por el Ayuntamiento de la Capital en el concurso de 1884

QA135

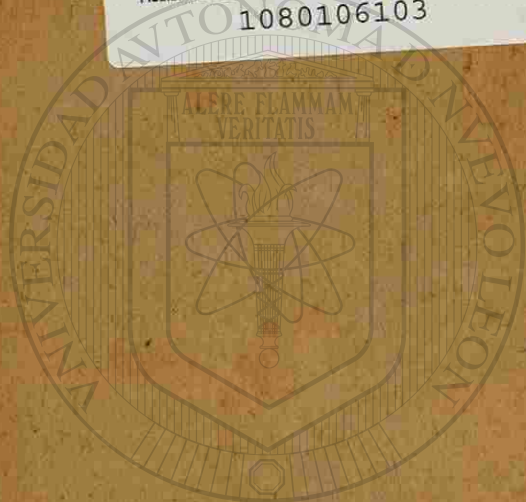
C6

1901

c.1



1080106103



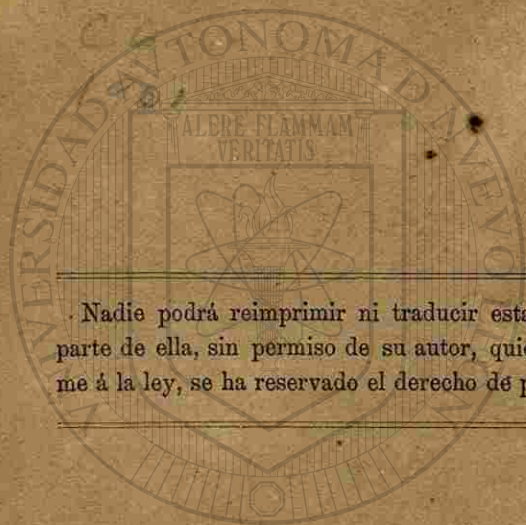
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCION GENERAL DE BIBLIOTECAS

English River

*Guadalupe Rivers de
Dominguez*

Salvador

Q4135



Nadie podrá reimprimir ni traducir esta obra, ni parte de ella, sin permiso de su autor, quien conforme á la ley, se ha reservado el derecho de propiedad.

BURRILL Rangel Filas
FONDO
HUMBERTO RAMOS
LOZANO

LA JUNTA DIRECTIVA DE INSTRUCCIÓN PÚBLICA, EN 5 DE OCTUBRE DE 1882, APROBÓ EL SIGUIENTE DICTAMEN EMITIDO SOBRE ESTA OBRITA POR LA COMISIÓN DE CÁLCULO DE LA ACADEMIA DE PROFESORES DE INSTRUCCIÓN PRIMARIA, Á LA QUE PASÓ PARA SU EXAMEN.

"COMISIÓN DE CÁLCULO.—La Comisión que suscribe, en cumplimiento del acuerdo relativo de esta H. Academia, tiene el honor de manifestarle: que la obra escrita por el Señor Profesor Manuel Maria Contreras y publicada con el título de **Aritmética para los niños**, contiene una exposición clara y breve del sistema decimal de numeración, el cálculo de los números enteros, quebrados, decimales y denominados, la elevación á potencias, extracción de las raíces cuadrada y cúbica, la teoría de las razones y proporciones, sus aplicaciones á las reglas de tres, de compañía, de interés y de descuento, y las cuestiones de cambio y aligación, dando las reglas generales y las de los casos en que puede simplificarse la ejecución de las operaciones.

"Al fin del cálculo de los números enteros, el autor consagra un capítulo de bastante interés, á los factores y divisores enteros con sus aplicaciones para encontrar los divisores enteros de un número, para determinar el máximo común divisor, y conocer las condiciones de divisibilidad por los números menores que 11; exponiendo con método y claridad las propieda-[®]

des de los números cuyo conocimiento es esencial particularmente para el cálculo de las fracciones.

"Entre las operaciones de los decimales y las de los denominados, hay un capítulo en el que el señor Contreras hace una explicación del sistema decimal y del antiguo de pesas y medidas mexicanas. En concepto de la Comisión, ha sido una feliz idea del autor colocar entre el cuerpo de la obra una cartilla del sistema métrico y del antiguo de México; el primero como consecuencia de las convenciones decimales, y el segundo como base de las operaciones de denominados, pues formando esta materia, que es una de las de más frecuentes aplicaciones, parte integrante de la Aritmética, los alumnos tienen forzosa necesidad de aprenderla bien. Además, como complemento de este punto, el autor ha agregado al fin de su obra, seis tablas en las que constan las correspondencias de las unidades del sistema métrico con las de México y recíprocamente, y otra con la equivalencia entre las medidas, pesas y monedas inglesas y las francesas.

"El tratado de Aritmética del Sr. Contreras está escrito en forma de exposición, lo cual facilita las explicaciones y evita los inconvenientes que la de diálogo suele presentar en las obras didácticas; pero con el objeto de que tanto los profesores puedan cerciorarse de la instrucción de sus discípulos, como estos de su saber, el autor ha puesto al fin de cada capítulo las principales preguntas que pueden formularse sobre la materia estudiada, cuyo sistema entre otras ventajas, tiene la de obligar á los discípulos á repasar los puntos que no hayan comprendido bien. Igualmente á la conclusión de cada capítulo, pone una serie de problemas relativos á las operaciones cuya ejecución se acaba de enseñar, y al terminar la Aritmética da una colección de problemas generales.

"Estas cuestiones numéricas, naturalmente obligan á los alumnos á ejercitar las reglas y operaciones que ya saben y les dan la firmeza que necesitan adquirir para la práctica, pudiendo fácilmente comprobar si han cometido ó no algún error, consultando el número de referencia al lado del cual consta, al fin de la obra, el valor del resultado.

"La extensión del libro es moderada, pues todos los puntos referidos los ha tratado el autor en 207 páginas impresas en octavo; pero si se excluyen las del prólogo, ejemplos numéricos, preguntas, problemas y tablas, la materia de estudios estará comprendida en las dos terceras partes próximamente, estando impresos con letra bastardilla los párrafos que es conveniente aprender de memoria.

"Las definiciones en lo general son correctas, las reglas generales claras y el método bueno.

"La Comisión para concluir expone que en su concepto, el mencionado libro es útil para la enseñanza del ramo."—México, Marzo 11 de 1882.—L. G. Alvarez y Guerrero.—G. Espinosa.—José M. Hernández.

Esta Aritmética fué premiada por el Ayuntamiento de esta Capital en el concurso de obras de texto, que abrió en 26 de Marzo de 1884, de conformidad con el parecer del Jurado calificador, compuesto de los Sres. D. Porfirio Parra, D. Luis G. Anzorena y D. Carlos Tamborrel, quienes al expresar su juicio comparativo de los diversos tratados de Aritmética presentados, al ocuparse de éste dijeron que: *"no contiene el más pequeño error, ni incurre en la más leve omisión atendiendo al carácter de la obra; el lenguaje es claro, preciso y eminentemente aritmético,"* declarando al fin que el autor merecía el premio y que la obra debía ser adoptada como texto en las Escuelas municipales.



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA

DIRECCIÓN GENERAL DE

PRÓLOGO DE LA PRIMERA EDICIÓN.

Estando encargado de la cátedra de primer curso de Matemáticas en la Escuela Nacional Preparatoria en el año de 1869, escribí y publiqué para uso de los alumnos de este plantel, un tratado de "Elementos de Aritmética razonada," que debía servir, y que en efecto ha servido, como texto para los jóvenes que se dedican á seguir alguna carrera profesional. En el trascurso de doce años se ha adoptado mi obra en varios Institutos de los Estados y en algunos establecimientos particulares de instrucción primaria y secundaria; habiendo procurado corresponder á esta distinción del público, mejorando y corrigiendo cada una de las cinco ediciones que de ella van hechas; pero como para los niños de tierna edad y para las personas que se dedican al comercio, ese tratado es tal vez algo extenso y contiene demostraciones poco útiles para quien solo necesita conocer la parte práctica del cálculo numérico, me he decidido á formar y publicar, por indicación de algunos señores Profesores, un extracto de mis citados Elementos de Aritmética, conservando el plan de la obra, pero simplificando las explicaciones y suprimiendo toda la parte razonada.

En esta obrita se encontrará la exposición del sistema de numeración, las definiciones y reglas necesarias para la ejecución de las operaciones de los núme-

ros enteros, quebrados, decimales, denominados; elevación á la segunda y tercera potencia, extracción de estas raíces, reglas de tres, de compañía, de interés, de descuento, de cambio y de aligación; las tablas para las cuatro operaciones de enteros; una exposición del sistema métrico-decimal, así como del de pesos y medidas mexicanas con sus respectivas equivalencias; tablas para convertir las unidades de un sistema en las de otro, y al fin de cada capítulo un cuestionario y una serie de problemas con números de referencia para encontrar la contestación de la pregunta ó el valor del resultado. Los alumnos deberán aprender de memoria los párrafos impresos con letra bastarda y comprender bien todos los demás; pudiendo por medio del cuestionario cerciorarse ellos mismos y sus maestros de que saben lo que han estudiado. Con auxilio de los problemas los discípulos adquirirán gran práctica en las operaciones numéricas, y comparando el resultado obtenido con el que consta al fin de la obra, al lado del número respectivo, se asegurarán de que no han cometido algún error.

Este tratadito, sin duda alguna, será de notoria utilidad para la instrucción primaria de los jóvenes que vayan á seguir alguna carrera profesional; pues su estudio los preparará perfectamente para hacer después con facilidad el de mi Aritmética razonada en la que no encontrarán de nuevo sino las demostraciones; sin perjuicio de que sea útil también á los niños y personas que necesitan adquirir conocimientos de aritmética con el fin de dedicarse al comercio ó á otro ramo, en razón de que en este compendio hallarán las doctrinas y reglas necesarias para ejecutar todos los cálculos numéricos.

México, Diciembre de 1881.

ARITMÉTICA PARA LOS NIÑOS.

INTRODUCCION Y SISTEMA DE NUMERACION.

1.—*Cantidad es todo lo que puede ser mayor ó menor, como el tiempo, la distancia, el capital, etc.*

Si decimos que una persona tiene ocho pesos, este capital, que puede ser mayor ó menor, es una cantidad. Cuando estudiamos tres horas, este tiempo, que puede ser mayor ó menor, es una cantidad.

2.—*Unidad es una cantidad que se toma ó elige para valuar todas las de su especie.* Cuando decimos que tenemos cuatro lápices hemos tomado por unidad el lápiz. Cuando decimos que hemos caminado tres días hemos escogido por unidad el día. La unidad siempre se expresa por la palabra uno ó una.

3.—*Número es un conjunto de unidades ó de partes de la unidad.* Como ocho pesos, tres cuartos de hora.

4.—Cuando sabiendo que en una clase hay ocho niños, que en la otra hay seis y que en la última hay doce, queremos determinar cuántos niños hay en la escuela, buscamos un número que satisfaga la condición de expresar todos los niños de la escuela.

Si sabiendo que una vara de paño vale cuatro pesos dos reales, queremos determinar cuánto hemos de pagar por tres varas dos tercias, buscamos un número que exprese el valor del género que se va á comprar.

ros enteros, quebrados, decimales, denominados; elevación á la segunda y tercera potencia, extracción de estas raíces, reglas de tres, de compañía, de interés, de descuento, de cambio y de aligación; las tablas para las cuatro operaciones de enteros; una exposición del sistema métrico-decimal, así como del de pesos y medidas mexicanas con sus respectivas equivalencias; tablas para convertir las unidades de un sistema en las de otro, y al fin de cada capítulo un cuestionario y una serie de problemas con números de referencia para encontrar la contestación de la pregunta ó el valor del resultado. Los alumnos deberán aprender de memoria los párrafos impresos con letra bastarda y comprender bien todos los demás; pudiendo por medio del cuestionario cerciorarse ellos mismos y sus maestros de que saben lo que han estudiado. Con auxilio de los problemas los discípulos adquirirán gran práctica en las operaciones numéricas, y comparando el resultado obtenido con el que consta al fin de la obra, al lado del número respectivo, se asegurarán de que no han cometido algún error.

Este tratadito, sin duda alguna, será de notoria utilidad para la instrucción primaria de los jóvenes que vayan á seguir alguna carrera profesional; pues su estudio los preparará perfectamente para hacer después con facilidad el de mi Aritmética razonada en la que no encontrarán de nuevo sino las demostraciones; sin perjuicio de que sea útil también á los niños y personas que necesitan adquirir conocimientos de aritmética con el fin de dedicarse al comercio ó á otro ramo, en razón de que en este compendio hallarán las doctrinas y reglas necesarias para ejecutar todos los cálculos numéricos.

México, Diciembre de 1881.

ARITMÉTICA PARA LOS NIÑOS.

INTRODUCCION Y SISTEMA DE NUMERACION.

1.—*Cantidad es todo lo que puede ser mayor ó menor, como el tiempo, la distancia, el capital, etc.*

Si decimos que una persona tiene *ocho pesos*, este capital, que puede ser mayor ó menor, es una cantidad. Cuando estudiamos *tres horas*, este tiempo, que puede ser mayor ó menor, es una cantidad.

2.—*Unidad es una cantidad que se toma ó elige para valuar todas las de su especie.* Cuando decimos que tenemos *cuatro lápices* hemos tomado por unidad el lápiz. Cuando decimos que hemos caminado *tres días* hemos escogido por unidad el día. La unidad siempre se expresa por la palabra *uno ó una*.

3.—*Número es un conjunto de unidades ó de partes de la unidad.* Como *ocho pesos, tres cuartos de hora*.

4.—Cuando sabiendo que en una clase hay *ocho niños*, que en la otra hay *seis* y que en la última hay *doce*, queremos determinar cuántos niños hay en la escuela, buscamos un número que satisfaga la condición de expresar todos los niños de la escuela.

Si sabiendo que una vara de paño vale *cuatro pesos dos reales*, queremos determinar cuánto hemos de pagar por *tres varas dos tercias*, buscamos un número que exprese el valor del género que se va á comprar.

En estas cuestiones las cantidades conocidas están expresadas por números, por cuya circunstancia son cuestiones de aritmética.

Problema es una cuestión en la que por medio de cantidades conocidas se trata de encontrar una desconocida que satisfaga determinadas condiciones. Las cantidades desconocidas se llaman incógnitas.

5.—La aritmética se ocupa del estudio de las cantidades expresadas con números.

En las cuestiones de aritmética se tiene por objeto determinar un número que satisfaga determinadas condiciones.

6.—Los números en cuanto á su formación pueden ser enteros, quebrados y mixtos, y en cuanto á la clase de sus unidades pueden ser abstractos ó concretos.

7.—Número entero, es el que está compuesto de una unidad ó de un número cabal de unidades, como 1 día, 3 reales.

Fracción ó quebrado, es el número menor que la unidad, como media hora, dos quintos.

Mixto ó fraccionario, es el número que consta de unidades completas y de partes de la unidad; como dos y cinco octavos; siete horas y media.

8.—Número abstracto, es el que no determina la especie de sus unidades, como 2, 4; ó como cuando se dice 6 veces.

Número concreto, es el que determina la especie de sus unidades, como 5 plumas, 4 reales, 2 años.

9.—Los números concretos pueden ser homogéneos ó heterogéneos. Homogéneos son los de la misma especie, como 2 árboles, 3 árboles y 5 árboles. Heterogéneos son los de diferente especie, como 6 lápices, 2 horas, 4 pesos.

10.—SISTEMA DE NUMERACIÓN.—Sistema de numeración, es la parte de la aritmética que se ocupa del modo de

denominar por medio de pocas palabras todos los números posibles, y de representarlos con un reducido número de caracteres. Se divide en hablada y escrita.

11.—La numeración hablada tiene por objeto denominar con pocas palabras combinadas entre sí, todos los números posibles.

12.—La numeración escrita tiene por objeto representar con sólo diez caracteres todos los números posibles.

13.—Si á la unidad le agregamos otra unidad formaremos el número dos, si á este número le agregamos otra unidad formaremos el número tres y agregando sucesivamente una unidad iremos formando todos los números.

La unidad y los primeros conjuntos de unidades simples ó unidades de primer orden, se representan y denominan como sigue:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, que se llaman cardinales.

La carencia de unidades se llama cero, y se representa por este símbolo, 0.

Para reducir el número de voces necesarias para denominar todos los números, y para concebir más fácilmente su valor, se ha convenido en que el conjunto de diez unidades constituya una decena, ó unidad mayor de segundo orden; en que diez decenas formen la centena, ó unidad de tercer orden; en que diez centenas formen el millar, etc.; y en denominar los números combinando los nombres de las partes de que constan.

Para representar con sólo diez caracteres todos los números, se ha convenido en darles á los símbolos, 1, 2, 3...9, con que se representan las unidades simples dos valores: uno correspondiente á su figura y

otro al lugar que ocupe, de manera que un guarismo solo, representa unidades; si está seguido de una cifra á la derecha, representará decenas; si está seguido de dos cifras representará centenas; si está seguido de tres, representará millares, y así sucesivamente.

Los números que únicamente constan de decenas se representan por alguna de las nueve cifras 1, 2, ..., 9 seguida de un cero y se denominan como sigue:

1 decena se escribe 10 y se llama diez	unidades.
2 decenas	" 20 " veinte "
3 decenas	" 30 " treinta "
4 decenas	" 40 " cuarenta "
5 decenas	" 50 " cincuenta "
6 decenas	" 60 " sesenta "
7 decenas	" 70 " setenta "
8 decenas	" 80 " ochenta "
9 decenas	" 90 " noventa "

Para representar los números compuestos de decenas y unidades basta reemplazar el cero, que indica carencia de unidades simples, por una de las cifras 1 á 9, y para formar sus nombres es suficiente expresar después del nombre de las decenas el de las unidades. Por ejemplo, los números comprendidos entre 3 y 4 decenas se representan y se nombran como siguen:

30 treinta.
31 treinta y uno.
32 treinta y dos.

38 treinta y ocho.
39 treinta y nueve.

De esta manera se forman los nombres y los sim-

bolos de los números desde 1 hasta 99. El uso ha sancionado las siguientes excepciones: en lugar de diez y uno, diez y dos, diez y tres, diez y cuatro, diez y cinco, se denominan estos números *once, doce, trece, catorce y quince*. Como se habrá notado para que un guarismo represente decenas es preciso que esté seguido de otro.

Las centenas se representan también con una de las nueve cifras cardinales, pero seguida de dos ceros á la derecha, que indican carencia de decenas y de unidades.

1 centena se escribe 100 y se llama cien	unidades.
2 centenas	" 200 " doscientas "
3 centenas	" 300 " trescientas "
4 centenas	" 400 " cuatrocientas "
5 centenas	" 500 " quinientas "
6 centenas	" 600 " seiscientas "
7 centenas	" 700 " setecientas "
8 centenas	" 800 " ochocientas "
9 centenas	" 900 " novecientas "

Para representar los números compuestos de centenas y unidades, basta reemplazar el primer cero de la derecha por las cifras 1 á 9, y en los números compuestos de centenas, decenas y unidades se reemplazarán los dos ceros por las cifras de 10 á 99. Para formar sus nombres se expresan en seguida del de las centenas las voces con que denominamos los números de 1 á 99. Tomemos como ejemplo algunos de los números comprendidos entre 500 y 600.

501 quinientos uno.
509 quinientos nueve.
510 quinientos diez.

511 quinientos once
 590 quinientos noventa
 599 quinientos noventa y nueve.

De esta manera se forman los nombres y los símbolos de los números desde 1 hasta 999, y como se habrá observado, para que un guarismo indique centenas es preciso que esté seguido de otros dos.

14.—Agregando una unidad al número 999 nos resulta un grupo compuesto de diez centenas ó de mil unidades, que se llama *millar* y que constituye una clase especial. Los millares se cuentan de 1 á 999, y los nombres de los números que constan únicamente de millares se forman posponiendo á los de los números de 1 á 999 la palabra *mil*. Se escriben y denominan como sigue:

1,000 un mil
 2,000 dos mil
 3,000 tres mil
 10,000 diez mil
 11,000 once mil
 100,000 cien mil
 101,000 ciento un mil
 999,000 novecientos noventa y nueve mil.

Para representar los números compuestos de millares y unidades, considerando como unidades los números de 1 á 999, bastará reemplazar, según sea el caso, uno, dos, ó los tres ceros que siguen á los millares por los números correspondientes desde 999 hasta 1; y para formar sus nombres será suficiente decir en seguida de la palabra *mil* el nombre del número de las unidades de 999 á 1. Para aclaración pondremos los siguientes ejemplos:

1,001 un mil, uno.
 4,060 cuatro mil, sesenta.

500,068 quinientos mil, sesenta y ocho.
 706,800 setecientos seis mil, ochocientos.
 999,999 novecientos noventa y nueve mil, novecientos noventa y nueve.

De esta manera se forman los nombres y los símbolos de los números de 1 á 999,999 unidades, y como se habrá observado para que un guarismo indique millares tiene que estar seguido de tres cifras.

15.—Con el conjunto de mil millares se forma una clase mayor que se denomina *millón*, se cuentan los millones como si fueran unidades de 1 á 999,999 y para denominar estas cantidades se antepone á la palabra *millón* los nombres de los números desde 1 hasta 999,999 expresando en seguida los nombres de los números desde 999,999 hasta 1.

Para representar estas cantidades se escriben primero los números desde 1 hasta 999,999 que indiquen los millones de que consta la cantidad, luego, se pone un punto y á la derecha se escriben primero tres cifras que indiquen los millares, y luego, otras tres que representen las unidades simples.

Un millón de millones forman el *billón*; un millón de billones forman el *trillón*; un millón de trillones forman el *cuatrillón*; etc., escribiéndose cada clase de unidades á la izquierda de su inmediata menor: y los números se denominan expresando sucesivamente el nombre de cada cifra unido al del orden ó al de la clase que representa comenzando por las clases mayores y siguiendo con las menores; pasando en silencio los órdenes y las clases de unidades de que carezca el número.

16.—A continuación ponemos una tabla graduada de nuestro sistema de numeración, que se llama *decimal*, de todos los órdenes de unidades hasta las decenas de billón.

Uno.....	1
Diez.....	10
Cien.....	100
Mil.....	1,000
Diez mil.....	10,000
Cien mil.....	100,000
Un millón.....	1,000,000
Diez millones.....	10,000,000
Cien millones.....	100,000,000
Mil millones.....	1,000,000,000
Diez mil millones.....	10,000,000,000
Cien mil millones.....	100,000,000,000
Un billón.....	1,000,000,000,000
Diez billones.....	10,000,000,000,000

Como se habrá observado, toda cifra representa un orden de unidades 10 veces mayor que la cifra de su derecha. Por tanto, si á una cifra se le agrega un cero á la derecha, su valor se hará diez veces mayor, si se le agregan dos ceros se hará cien veces mayor, y así sucesivamente; pero el valor de una cifra no se altera cuando se le agregan ó quitan ceros ó cifras significativas á su izquierda.

17.—En resumen, las convenciones del sistema de numeración son: que con diez unidades de un orden cualquiera se constituye siempre una unidad del orden inmediato superior; que la reunión de los seis primeros órdenes de unidades forman la clase mayor de los millones, que la reunión de los seis órdenes de unidades de millón, forman la clase de los billones, que la reunión de los seis órdenes de unidades de billón, forman la clase de los trillones, etc., que con el conjunto de los tres primeros órdenes de unidades de cada clase mayor se constituye la clase menor de los millares;

y que el número de unidades de cualquier orden se representa por las mismas cifras, escribiendo en el primer lugar de la derecha las unidades, en el segundo las decenas, en el tercero las centenas, etc.

Las convenciones especiales de la numeración hablada son: 1º, no dar nombres simples sino á las unidades, á las decenas, á cien, á mil, al millón, al billón, al trillón, etc., y 2º, en formar el nombre de cualquier número combinando los de sus partes, comenzando por los órdenes de unidades superiores, enunciando sucesivamente el nombre de cada cifra y en seguida el del orden ó el de la clase que representa.

18.—Las convenciones de la numeración escrita son: 1º, que á todo guarismo se le dan dos valores; uno propio, que es el que tiene por su figura y otro relativo, por el lugar que ocupa; 2º, que un guarismo cualesquiera representa un orden de unidades diez veces mayores que el que está á su derecha, y 3º, que para conservar á un guarismo el valor relativo que le corresponde se ocupan con ceros los órdenes de unidades de que carece una cantidad.

19.—El cero es el símbolo de la nada y sirve para ocupar los lugares de los órdenes de unidades de que carece una cantidad.

20.—Para escribir una cantidad se comienza por los órdenes y las clases superiores, escribiendo de izquierda á derecha los guarismos que representan las unidades de cada uno de los órdenes de que consta la cantidad, teniendo cuidado de ocupar con ceros los órdenes de que carezca.

Es conveniente proceder por periodos menores de tres cifras, y en cada periodo se examina de qué órdenes de unidades consta la cantidad y de cuáles carece, poniendo en el lugar de los que consta, las cifras

significativas que los representan, y cero en el lugar de cada uno de los órdenes de unidades de que carece.

21.—**REGLA PARA LEER UNA CANTIDAD.**—*Contando de derecha á izquierda se divide el número propuesto en períodos mayores de seis cifras cada uno, que se señalan con un punto y con un número pequeño de orden que se pone arriba. En seguida, cada período mayor se divide por medio de una coma, en dos menores de tres guarismos. El primer período mayor de la derecha representa unidades simples, el segundo millones, el tercero billones, el cuarto trillones, etc.*

Una vez hecha la división de la cantidad se empieza á leer por la izquierda, enunciando sucesivamente el nombre de cada cifra unido al del orden ó al de la clase que representa, pasando en silencio los órdenes que estén ocupados por ceros: al fin de cada período menor, marcado con una coma, se pronuncia mil; y al fin de cada período mayor se dice unidades, ó millones, ó billones, etc., según sea la clase indicada por el pequeño número puesto arriba.

El siguiente ejemplo aclarará esta regla:

7	2	3	0	5	4	0	0	8	7	0	3	6	2
decenas de billón	billones	centenas de millón	millares de millón	decenas de millón	millones	centenas de millar	millares	decenas de millar	centenas	decenas	unidades		

Esta cantidad se lee: setenta y dos billones, trescientos cinco mil, cuatrocientos millones, ochocientos setenta mil, trescientas sesenta y dos unidades.

PREGUNTAS.—¿Qué es cantidad? 1.—¿Qué es unidad? 2.—¿Qué es número? 3.—¿De qué se ocupa la aritmética? 5.—¿Cuál es el objeto de las cuestiones de aritmética? 5.—¿Qué es número entero? 7.—¿Qué es fracción ó quebrado? 7.—¿Qué es número mixto ó fraccionario? 7.—¿Qué es número abstracto? 8.—¿Qué es número concreto? 8.—¿A qué se llaman números homogéneos? 9.—¿A qué heterogéneos? 9.—¿Cuál es el objeto de la numeración hablada? 11.—¿Cuál es el objeto de la numeración escrita? 12.—¿Qué sucede con el valor de una cifra cuando se le agrega un cero á su derecha, y qué cuando se le agregan tres ceros? 16.—¿Cuáles son en resumen las convenciones del sistema de la numeración hablada? 17.—¿Cuáles son las convenciones de la numeración escrita? 18.—¿Qué cosa es el cero y para qué sirve? 19.—¿Cuál es la regla para escribir una cantidad? 20.—¿Cuál es la regla para leer una cantidad? 21.

PROBLEMAS.

- 1.—¿Cuál es el valor de la decena?
- 2.—¿Cuál es el valor de la centena?
- 3.—¿Cuál es el valor del millar?
- 4.—¿Cuál es el valor del millón y cuál el del billón?
- 5.—¿Cuántos ceros ó cifras significativas deben seguir á un guarismo para que represente millares?
- 6.—¿Cuántos guarismos deben seguir á un número para que represente millones?
- 7.—¿Cuántos guarismos debe haber entre los billones y los millones?
- 8.—¿Cómo se leen los números: 12; 80; 345; 300; 340; 305; 12,543; 12,800; 102,012; 101, 001?
- 9.—¿Cómo se lee el número 12,300,004,080,008?
- 10.—¿Cómo se escriben las siguientes cantidades: veinte—veintidos—ochenta—ochenta y ocho—quinien-

tos ochenta y tres—quinientos ochenta—quinientos—quinientos tres—novecientos—seiscientos uno—cuatrocientos cuarenta—cuatrocientos cuatro?

11.—¿Cómo se escriben las siguientes cantidades: tres mil—tres mil ochocientos cuarenta y nueve—tres mil ochocientos—treinta y dos mil cuarenta y nueve—treinta y dos mil nueve—ochocientos seis mil veintidos—ochocientos mil ochenta—nueve mil uno—novecientos mil noventa—novecientos mil nueve—diez mil diez?

12.—¿Cómo se escriben los números siguientes: doce millones—ciento ocho millones, doscientos mil, cuatrocientos seis—dos mil doce millones, diez mil, cien—trescientos mil cuatro millones, cuatrocientos ocho mil, sesenta—veintidos billones. *

Adición de los enteros.

22.—Una persona que ha gastado en la sombrerería 5 pesos, en un cajón de ropa 22 y en una mercería 8 pesos, desea saber ¿cuál es su gasto total?

Para encontrar el resultado que se busca habrá que agregar 5 pesos á 22 y á 8 y formar un número como 35, que conste él sólo de tantas unidades como son los pesos gastados. Esta operación por medio de la cual se reúne en una cantidad el valor de varias, es la *adición*, y se indica por el signo + que se llama *más*. Nuestro problema se indicaría

$$\$ 5 + 22 + 8 = 35 \$$$

* Después de resolver los problemas, los alumnos deben comparar sus resultados con los que constan al fin del texto, al lado del número del problema, de la página I en adelante.

y se lee: 5\$ mas 22 mas 8 igual á 35\$. Esto es, la persona gastó 35 pesos. Las cantidades 5, 22 y 8 pesos de que se formó el resultado, se llaman *sumandos*, y á este resultado se le denomina *suma*. Cuando, como en nuestro caso, son iguales dos valores, se indica esta relación por medio del signo = que se llama *igual*. Cuando dos valores son diferentes se indica esta relación por medio del signo > que se lee *mayor que*, ó por este < que se lee *menor que*, teniendo cuidado de poner siempre la cantidad mayor del lado de la abertura del signo. Por ejemplo:

$$35 > 22 \quad \text{y} \quad 8 < 35$$

se lee 35 mayor que 22 y 8 menor que 35

23.—DEFINICIÓN.—*Adición es la operación que tiene por objeto reunir en uno sólo el valor de varias cantidades de una misma especie.*

Las cantidades que se suman son siempre homogéneas, porque todas ellas tienen que ser de la especie del resultado que se busca.

24.—Como la ejecución de la suma de los números más complicados tiene por base los resultados de la suma de las unidades simples, los niños deben aprender de memoria la siguiente

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

tos ochenta y tres—quinientos ochenta—quinientos—quinientos tres—novecientos—seiscientos uno—cuatrocientos cuarenta—cuatrocientos cuatro?

11.—¿Cómo se escriben las siguientes cantidades: tres mil—tres mil ochocientos cuarenta y nueve—tres mil ochocientos—treinta y dos mil cuarenta y nueve—treinta y dos mil nueve—ochocientos seis mil veintidos—ochocientos mil ochenta—nueve mil uno—novecientos mil noventa—novecientos mil nueve—diez mil diez?

12.—¿Cómo se escriben los números siguientes: doce millones—ciento ocho millones, doscientos mil, cuatrocientos seis—dos mil doce millones, diez mil, cien—trescientos mil cuatro millones, cuatrocientos ocho mil, sesenta—veintidos billones. *

Adición de los enteros.

22.—Una persona que ha gastado en la sombrerería 5 pesos, en un cajón de ropa 22 y en una mercería 8 pesos, desea saber ¿cuál es su gasto total?

Para encontrar el resultado que se busca habrá que agregar 5 pesos á 22 y á 8 y formar un número como 35, que conste él sólo de tantas unidades como son los pesos gastados. Esta operación por medio de la cual se reúne en una cantidad el valor de varias, es la *adición*, y se indica por el signo + que se llama *más*. Nuestro problema se indicaría

$$\$ 5 + 22 + 8 = 35 \$$$

* Después de resolver los problemas, los alumnos deben comparar sus resultados con los que constan al fin del texto, al lado del número del problema, de la página I en adelante.

y se lee: 5\$ mas 22 mas 8 igual á 35\$. Esto es, la persona gastó 35 pesos. Las cantidades 5, 22 y 8 pesos de que se formó el resultado, se llaman *sumandos*, y á este resultado se le denomina *suma*. Cuando, como en nuestro caso, son iguales dos valores, se indica esta relación por medio del signo = que se llama *igual*. Cuando dos valores son diferentes se indica esta relación por medio del signo > que se lee *mayor que*, ó por este < que se lee *menor que*, teniendo cuidado de poner siempre la cantidad mayor del lado de la abertura del signo. Por ejemplo:

$$35 > 22 \quad \text{y} \quad 8 < 35$$

se lee 35 mayor que 22 y 8 menor que 35

23.—DEFINICIÓN.—*Adición es la operación que tiene por objeto reunir en uno sólo el valor de varias cantidades de una misma especie.*

Las cantidades que se suman son siempre homogéneas, porque todas ellas tienen que ser de la especie del resultado que se busca.

24.—Como la ejecución de la suma de los números más complicados tiene por base los resultados de la suma de las unidades simples, los niños deben aprender de memoria la siguiente

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

TABLA DE SUMAR.

1	y	1	2	4	y	1	5	7	y	1	8
1		2	3	4		2	6	7		2	9
1		3	4	4		3	7	7		3	10
1		4	5	4		4	8	7		4	11
1		5	6	4		5	9	7		5	12
1		6	7	4		6	10	7		6	13
1		7	8	4		7	11	7		7	14
1		8	9	4		8	12	7		8	15
1		9	10	4		9	13	7		9	16
2	y	1	3	5	y	1	6	8	y	1	9
2		2	4	5		2	7	8		2	10
2		3	5	5		3	8	8		3	11
2		4	6	5		4	9	8		4	12
2		5	7	5		5	10	8		5	13
2		6	8	5		6	11	8		6	14
2		7	9	5		7	12	8		7	15
2		8	10	5		8	13	8		8	16
2		9	11	5		9	14	8		9	17
3	y	1	4	6	y	1	7	9	y	1	10
3		2	5	6		2	8	9		2	11
3		3	6	6		3	9	9		3	12
3		4	7	6		4	10	9		4	13
3		5	8	6		5	11	9		5	14
3		6	9	6		6	12	9		6	15
3		7	10	6		7	13	9		7	16
3		8	11	6		8	14	9		8	17
3		9	12	6		9	15	9		9	18

25.—Se quiere sumar las cantidades: 256; 8,733; 17 y 7,362. Estos números se escribirán como sigue:

256
8,733
17
7,362
16,418

La operación se ejecuta comenzando á sumar todos los guarismos que expresan unidades simples, y que se han colocado en la primera columna vertical de la derecha, diciendo: 6 y 3, 9; y 7, 16; y 2 son 18; pero como 18 equivale á 1 decena y 8 unidades, escribimos este número 8 en la columna de las unidades y retenemos en la memoria 1 decena para agregarla á los guarismos que representan decenas. Decimos: 1 y 5, 6; y 8, 14; y 1, 15; y 6 son 21. Escribimos 1 en la columna de las decenas y retenemos las dos centenas para reunir las á los guarismos de la columna de las centenas. Decimos: 2 y 2, 4; y 7, 11; y 3, 14. Escribimos 4 en la columna de las centenas y retenemos 1 millar para agregarlo á los guarismos de la columna siguiente. Decimos: 1 y 8, 9; y 7 son 16; cuyo resultado lo escribimos en la columna de los millares. El número 16,418 es la suma total de todos los sumandos.

26.—REGLA.—Para sumar los números enteros se escriben unos debajo de otros, colocando las unidades debajo de las unidades, las decenas debajo de las decenas, las centenas debajo de las centenas, etc. y se tira una línea horizontal abajo del último sumando.

Se comienza la suma por la columna de las unidades simples; y si no pasa de 9, se escribe debajo, pero si ex-

cede de 9, se escriben las unidades y el número que exprese decenas se reúne a los guarismos de la columna siguiente de las decenas. Conforme a la misma regla se suman los guarismos de la columna de las decenas, los de las centenas y los de las siguientes; pero en la última columna de la izquierda se escribe la suma tal como salga.

EJEMPLOS.—Una persona ha recibido en la mañana 8 canarios, en la tarde 15 y al día siguiente 22, se quiere saber ¿cuántos canarios tiene? Conforme a la regla anterior la operación se dispondrá como consta al lado. Se sumarán las unidades, pero con el objeto de obtener el resultado más rápidamente, en lugar de decir 8 y 5 son 13 y 2 son 15, simplemente se dirá 8, 13, 15; se escribirá 5 en lugar de las unidades y se retendrá 1 decena. Se dirá 1, 2, 4, y se escribirá este número debajo de las decenas: resultando que la persona tiene 45 canarios.

Un comerciante ha comprado 232 pesos de azúcar, 562 de vino, 406 de cacao, y 89 de café. Se quiere saber ¿a cuánto asciende el importe de sus compras? Ejecutando la operación como se ve aquí al lado, resulta el importe de 1289 pesos.

1289

Se quiere calcular la población de un reino compuesto de seis Estados que tienen: el primero 267,189 habitantes; el segundo... 485,736; el tercero 918,753; el cuarto 592,847; el quinto 703,928; y el sexto... 564,789. Ejecutando la suma resulta que la población del reino es de 3,533,242 habitantes.

3.533 242

27.—Después de hacer una operación numérica, es conveniente asegurarse de que no se ha cometido algún error ó equivocación al ejecutarla, y la segunda operación por medio de la cual se rectifica la ejecución de la primera, se llama prueba.

28.—PRUEBA.—La adición se prueba de dos maneras: 1ª, si la suma se encontró sumando los guarismos de arriba para abajo, se rectifica la ejecución de la operación sumándolos de abajo para arriba, y el resultado debe ser igual al primero, si no ha habido error; 2ª, se subdividen los sumandos en dos ó tres porciones; se hace por separado la suma de cada porción; y por último, se suman las sumas parciales, debiendo obtenerse una cantidad igual a la primera suma total.

Rectificaremos de estas dos maneras la siguiente operación;

$$\begin{array}{r}
 836,409 \\
 72,890 \\
 405,984 \\
 92,092 \\
 360,478 \\
 108,707 \\
 \hline
 1.876,560
 \end{array}
 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\}
 \begin{array}{l}
 \\
 1.315,283 \\
 \\
 561,277 \\
 \\
 \\
 \hline
 1.876,560 = 1.876,560
 \end{array}$$

1ª Si después de haber sumado de arriba para abajo, sumámos de abajo para arriba, debemos encontrar el mismo resultado 1.876,560.

2ª Subdividiremos los sumandos en dos porciones de a tres cada una, y sumarémos por separado cada una de estas porciones. La suma de la primera es 1.315,283; la de la segunda es 561,277 y como la suma de estos dos números da 1.876,560, resultado igual al primero, es prueba de que no hubo error en la ejecución de la operación.

La 1ª prueba tiene por fundamento que el valor de la suma no se altera cuando se invierte el orden de los sumandos. Por ejemplo,

$$4 + 3 + 5 = 12 \quad \text{y} \quad 5 + 4 + 3 = 12$$

La 2ª prueba se funda en que el mismo número de unidades hay en todos los sumandos reunidos, que en dos ó más porciones de los mismos sumandos.

PREGUNTAS.—¿Con qué signo se indica la adición? 22.—¿Con cuál, que dos valores son iguales, y con cuál que un número es mayor que otro? 22.—¿Qué cosa es adición? 23.—¿Cuál es la regla para sumar los números enteros? 26.—¿A qué se llama prueba de una operación? 27.—¿De cuántas maneras se prueba la adición de los enteros? 28.—¿Qué sucede con el valor de la suma cuando se invierte el orden de los sumandos? 28.

PROBLEMAS.

13.—Sumar los números 345; 820 y 397.

14.—Hacer la operación $209,377 + 3,556,884 + 22,495 + 46,809 + 6,896,749$ y hacer la prueba.

15.—Un hacendado vendió 3,876 pesos de cebada; 2,902 pesos de maíz; 804 de paja y 5,550 de trigo. ¿Cuánto importa la venta total?

16.—En un almacén se reciben 2,808 quintales de algodón, en seguida se reciben 4,600 quintales, luego, 3,778, y al fin, 9,648. ¿Cuántos quintales de algodón hay en el almacén?

Sustracción.

29.—Una persona va á comprar un reloj que vale 15\$ y como solamente lleva 10\$ en la bolsa, se quiere saber ¿cuánto le falta para completar el valor del reloj?

Para encontrar el resultado habría necesidad de ver cuántos pesos se habian de agregar á 10 para formar 15, esto es, 5. Esta operación, recíproca de la adición, que sirve para hallar la diferencia entre dos cantidades, se llama *sustracción*. La cantidad mayor 15, se denomina *minuendo*; á la menor 10, se le llama *sustraendo* y al resultado 5, se le llama *resta*. La sustracción se indica por el signo — que se lee *menos*. Nuestro problema se indicaría así:

$$15\$ - 10 = 5\$$$

y se lee: 15\$ menos 10 igual á 5\$. A la persona le faltan 5\$ para completar el valor del reloj.

30.—DEFINICIÓN.—*Sustracción es la operación que tiene por objeto encontrar la diferencia entre dos cantidades homogéneas.*

Las cantidades que se restan son homogéneas porque ambas tienen que ser de la especie de la diferencia que se busca.

Es de notarse que la diferencia entre dos cantidades no se altera cuando á ambas se les agrega ó quita el mismo número. Por ejemplo, $12 - 8 = 4$; si agregamos 5 al minuendo y 5 al sustraendo tendremos $17 - 13 = 4$; y si á ambos términos les quitamos 5 resulta $7 - 3 = 4$.

31.—Para ejecutar con facilidad la sustracción es conveniente que los niños sepan de memoria la siguiente:

TABLA DE RESTAR.

De 1 á 1 0	De 2 á 2 0	De 3 á 3 0
1 2 1	2 3 1	3 4 1
1 3 2	2 4 2	3 5 2
1 4 3	2 5 3	3 6 3
1 5 4	2 6 4	3 7 4
1 6 5	2 7 5	3 8 5
1 7 6	2 8 6	3 9 6
1 8 7	2 9 7	3 10 7
1 9 8	2 10 8	3 11 8
1 10 9	2 11 9	3 12 9
De 4 á 4 0	De 5 á 5 0	De 6 á 6 0
4 5 1	5 6 1	6 7 1
4 6 2	5 7 2	6 8 2
4 7 3	5 8 3	6 9 3
4 8 4	5 9 4	6 10 4
4 9 5	5 10 5	6 11 5
4 10 6	5 11 6	6 12 6
4 11 7	5 12 7	6 13 7
4 12 8	5 13 8	6 14 8
4 13 9	5 14 9	6 15 9
De 7 á 7 0	De 8 á 8 0	De 9 á 9 0
7 8 1	8 9 1	9 10 1
7 9 2	8 10 2	9 11 2
7 10 3	8 11 3	9 12 3
7 11 4	8 12 4	9 13 4
7 12 5	8 13 5	9 14 5
7 13 6	8 14 6	9 15 6
7 14 7	8 15 7	9 16 7
7 15 8	8 16 8	9 17 8
7 16 9	8 17 9	9 18 9

32.—Se quiere restar de 6,984 la cantidad 3,561.
Las cantidades se escriben como para la suma.

$$\begin{array}{r} 6,984 \\ 3,561 \\ \hline 3,423 \end{array}$$

Se ejecuta la operación comenzando por las unidades simples, y siguiendo por las decenas, centenas, etc., se va determinando la diferencia, esto es, cuál es el número que habría que agregar al del sustraendo para que diese por suma el que está encima de él. Así decimos: de 1 á cuatro la diferencia es 3, que se escribe en la columna de las unidades; de 6 á 8 la diferencia es 2 decenas, que se escribe debajo de la columna de las decenas; de 5 á 9 la diferencia es 4 centenas, que se escribe debajo de éstas; de 3 á 6 la diferencia es 3 que se escribe, por último, en la columna de los millares. La resta de los números propuestos es 3,423.

En el ejemplo propuesto todos los guarismos del minuendo han sido mayores que los correspondientes del sustraendo: veamos cómo se procede en caso contrario. Sea como ejemplo restar de 9,056 la cantidad 6,078.

$$\begin{array}{r} 9,056 \\ 6,078 \\ \hline 2,978 \end{array}$$

La operación se ejecuta como sigue: siendo el guarismo 6 de las unidades del minuendo menor que el 8, correspondiente del sustraendo, tendremos que buscar un número que agregado á 8 dé por suma no 6, sino 16, y por eso decimos de 8 á 16 la diferencia es 8. Para compensar las diez unidades agregadas al minuendo, al continuar la operación agregamos una decena al sustraendo, y por eso decimos 1 y 7 son ocho,

de 8 á 15 la diferencia es 7 que se escribe abajo. En 15 decenas va 1 centena, 1 y 0 es 1, á 10, la diferencia es 9 que se escribe debajo. En 10 centenas va un millar, 1 y 6 son 7 á 9 la diferencia es 2, que se escribe en la columna de los millares. La resta de los números propuestos es 2,978. *

33.—REGLA.—Para restar los números enteros se escribe el menor debajo del mayor, teniendo cuidado de que queden las unidades debajo de las unidades, las decenas debajo de las decenas, las centenas debajo de las centenas, etc., y se tira una línea horizontal, debajo de la cual se escribe el resultado.

En seguida se restan las unidades de las unidades, las decenas de las decenas, etc., y la diferencia se escribe en la columna correspondiente, repitiéndose la misma operación en cada orden de unidades hasta el último de la izquierda.

Cuando alguno de los guarismos del sustraendo es mayor que el correspondiente del minuendo, se le agregan á este 10 unidades de su orden y se resta la cifra inferior; teniendo cuidado al continuar la operación de agregar á la cifra del sustraendo, que sigue inmediatamente á la izquierda, una unidad.

EJEMPLOS.—Habiendo entre dos ciudades 46 leguas

de distancia, se quiere saber ¿cuántas tiene que caminar una persona después de haber recorrido 24 leguas? Para obtener el resultado restaremos 24 de 46 aplicando la regla anterior, y se ve que son 22 leguas las que hay necesi-

* Este procedimiento es preferible al de pedir una unidad prestada al guarismo siguiente del minuendo; 1º porque es más sencillo; 2º porque sin ninguna variación es aplicable al caso de que haya ceros; y 3º porque es exactamente el que se emplea para hacer la resta en la división de enteros, como puede verse dividiendo 9,056 entre 6,078.

dad de caminar. Como comprobación, sumando 22 con 24 debe obtenerse 46 por suma.

Una persona ha comprado una finca de campo en 24,000 pesos y habiendo pagado 12,850 se quiere saber ¿cuánto queda á deber? Restando la segunda cantidad de la primera

11150 se ve que debe al vendedor 11,150 pesos.

La población de un país asciende á 32,046,500 habitantes y siendo de 28,075,862 habitantes la población de todos sus Estados con excepción del del centro, se quiere saber ¿cuántos habitantes tiene este? Resulta que la población del Estado del centro es de 3,970,638 habitantes.

34.—PRUEBA.—La ejecución de la resta se comprueba sumando la resta con el sustraendo, y si no se ha cometido alguna equivocación la suma debe ser el minuendo. Por ejemplo:

$$\begin{array}{r} 30.070.804 \\ -17.806.975 \\ \hline \text{resta } 12.263.829 \\ \text{minuendo } 30.070.804 \end{array}$$

Sumando el sustraendo con la resta 12,263,829 se debe tener por suma el minuendo 30,070,804. Generalmente la prueba se hace sumando de abajo para arriba y se omite escribir la suma, observando solamente si ésta va dando los guarismos del minuendo.

PREGUNTAS.—¿Cuál es el objeto de la sustracción? 30.—¿Cómo se llaman las cantidades conocidas en la sustracción y cómo el resultado? 29.—¿Con qué signo se indica esta operación?—

29.—¿Por qué deben ser homogéneas las cantidades que se restan? 30.—¿Qué sucede con la diferencia entre dos cantidades cuando á ambas se les agrega ó quita un mismo número?—¿Cuál es la regla para restar los números enteros? 33.—¿Qué se hace cuando alguno de los guarismos del minuendo es menor que el correspondiente del sustraendo? 33.—¿Cómo se comprueba la resta? 34.

PROBLEMAS.

17.—Restar de 208,865,401 el número 99,683,582 y hacer la prueba.

18.—Restar de 10,000,574 el número 9,998,632 y hacer la prueba.

19.—Una persona compró una hacienda de campo en 309,000 pesos, y habiendo pagado en diversas partidas 175,458 pesos, se quiere saber ¿cuánto debe?

20.—La población total de un Estado es de 1,745,860 habitantes, de los cuales hay 962,778 mujeres y niños; se quiere determinar ¿cuántos hombres habrá?

Multiplicación.

35.—Se quiere determinar cuánto se ha de pagar por 4 quintales de cobre valiendo cada quintal 24 pesos.

Para encontrar el resultado se repetiría 24 pesos 4 veces, se sumarían estas cantidades, y la suma sería el valor del cobre. Aquí se observa que todos los sumandos son iguales, y esta operación por medio de la cual se suma un número tantas veces como unidades tiene otro, se llama multiplicación. Nuestro problema se ejecutará como sigue:

$$\$24 + \$24 + \$24 + \$24 = 96$$

y se indica $24 \times 4 = 96$, que se lee 24 multiplicado por 4 igual á 96. La cantidad 24 que se ha de multiplicar se llama *multiplicando*; la que indica las veces que se ha de sumar ó multiplicar, [4 en nuestro caso] se llama *multiplicador*; y el resultado, 96, *producto*. Al multiplicando y multiplicador se les llama *factores* del producto.

El producto es de la misma especie que el multiplicando; y el multiplicador, que en rigor puede considerarse como abstracto, las más veces es de una especie diferente á la de las unidades del multiplicando.

36.—DEFINICIÓN.—*Multiplicación es la operación por medio de la cual se suma ó se toma un número tantas veces como unidades tiene otro.*

Debemos hacer notar: 1º, que el valor del producto no se altera invirtiendo el orden de los factores. Por ejemplo: $8 \times 3 = 24$ y $3 \times 8 = 24$.

2º Si uno de los factores se hace cierto número de veces mayor, el producto resultará aumentado el mismo número de veces. Por ejemplo, si sabemos que $8 \times 3 = 24$ y hacemos uno de los factores 8, diez veces mayor, el primer producto 24 se hará diez veces mayor, esto es, $80 \times 3 = 240$; siendo $240 = 24 \times 10$.

3º Si uno de los factores se hace cierto número de veces menor, el producto resultará disminuido el mismo número de veces. Por ejemplo, si sabemos que $8 \times 3 = 24$ y hacemos á 8, que es uno de los factores, 4 veces menor, el producto 24 se hará 4 veces menor y se reducirá á 6, esto es, $2 \times 3 = 6$. Así como 2 es 4 veces menor que 8, así 6 será 4 veces menor que 24.

37.—Para ejecutar la multiplicación de los números enteros, los niños deben aprender de memoria la siguiente

29.—¿Por qué deben ser homogéneas las cantidades que se restan? 30.—¿Qué sucede con la diferencia entre dos cantidades cuando á ambas se les agrega ó quita un mismo número?—¿Cuál es la regla para restar los números enteros? 33.—¿Qué se hace cuando alguno de los guarismos del minuendo es menor que el correspondiente del sustraendo? 33.—¿Cómo se comprueba la resta? 34.

PROBLEMAS.

17.—Restar de 208,865,401 el número 99,683,582 y hacer la prueba.

18.—Restar de 10,000,574 el número 9,998,632 y hacer la prueba.

19.—Una persona compró una hacienda de campo en 309,000 pesos, y habiendo pagado en diversas partidas 175,458 pesos, se quiere saber ¿cuánto debe?

20.—La población total de un Estado es de 1,745,860 habitantes, de los cuales hay 962,778 mujeres y niños; se quiere determinar ¿cuántos hombres habrá?

Multiplicación.

35.—Se quiere determinar cuánto se ha de pagar por 4 quintales de cobre valiendo cada quintal 24 pesos.

Para encontrar el resultado se repetiría 24 pesos 4 veces, se sumarían estas cantidades, y la suma sería el valor del cobre. Aquí se observa que todos los sumandos son iguales, y esta operación por medio de la cual se suma un número tantas veces como unidades tiene otro, se llama multiplicación. Nuestro problema se ejecutará como sigue:

$$\$24 + \$24 + \$24 + \$24 = 96$$

y se indica $24 \times 4 = 96$, que se lee 24 multiplicado por 4 igual á 96. La cantidad 24 que se ha de multiplicar se llama *multiplicando*; la que indica las veces que se ha de sumar ó multiplicar, [4 en nuestro caso] se llama *multiplicador*; y el resultado, 96, *producto*. Al multiplicando y multiplicador se les llama *factores* del producto.

El producto es de la misma especie que el multiplicando; y el multiplicador, que en rigor puede considerarse como abstracto, las más veces es de una especie diferente á la de las unidades del multiplicando.

36.—DEFINICIÓN.—*Multiplicación es la operación por medio de la cual se suma ó se toma un número tantas veces como unidades tiene otro.*

Debemos hacer notar: 1º, que el valor del producto no se altera invirtiendo el orden de los factores. Por ejemplo: $8 \times 3 = 24$ y $3 \times 8 = 24$.

2º Si uno de los factores se hace cierto número de veces mayor, el producto resultará aumentado el mismo número de veces. Por ejemplo, si sabemos que $8 \times 3 = 24$ y hacemos uno de los factores 8, diez veces mayor, el primer producto 24 se hará diez veces mayor, esto es, $80 \times 3 = 240$; siendo $240 = 24 \times 10$.

3º Si uno de los factores se hace cierto número de veces menor, el producto resultará disminuido el mismo número de veces. Por ejemplo, si sabemos que $8 \times 3 = 24$ y hacemos á 8, que es uno de los factores, 4 veces menor, el producto 24 se hará 4 veces menor y se reducirá á 6, esto es, $2 \times 3 = 6$. Así como 2 es 4 veces menor que 8, así 6 será 4 veces menor que 24.

37.—Para ejecutar la multiplicación de los números enteros, los niños deben aprender de memoria la siguiente

TABLA DE MULTIPLICAR

1 por 1	1	4 por 1	4	7 por 1	7
1	2	4	2	7	2
1	3	4	3	7	3
1	4	4	4	7	4
1	5	4	5	7	5
1	6	4	6	7	6
1	7	4	7	7	7
1	8	4	8	7	8
1	9	4	9	7	9
1	10	4	10	7	10

2 por 1	2	5 por 1	5	8 por 1	8
2	2	5	2	8	2
2	3	5	3	8	3
2	4	5	4	8	4
2	5	5	5	8	5
2	6	5	6	8	6
2	7	5	7	8	7
2	8	5	8	8	8
2	9	5	9	8	9
2	10	5	10	8	10

3 por 1	3	6 por 1	6	9 por 1	9
3	2	6	2	9	2
3	3	6	3	9	3
3	4	6	4	9	4
3	5	6	5	9	5
3	6	6	6	9	6
3	7	6	7	9	7
3	8	6	8	9	8
3	9	6	9	9	9
3	10	6	10	9	10

1er. caso.—La multiplicación de dos números *digitos*, que son los que constan de una sola cifra, se hace a la memoria recordando los resultados de la tabla anterior. Por ejemplo: $4 \times 6 = 24$; $8 \times 5 = 40$.

38.—Si queremos multiplicar 6,573 por 2, la operación se ejecutará como sigue:

$$\begin{array}{r} 6,573 \\ 2 \\ \hline 13,146 \end{array}$$

se dice 2 por 3 son 6, cuyo número se escribe en la columna de las unidades: 2 por 7 son 14 decenas, se escribe el 4 a la izquierda del 6 y se retiene 1 centena para reunirla al producto siguiente: 2 por 5 son 10 y 1 retenida son 11, se escribe 1 y se retiene 1; 2 por 6 son 12 y 1 son 13, cuyo producto, siendo el último, se escribe tal como sale, siendo $6,573 \times 2 = 13,146$.

39.—2º caso.—REGLA.—Para multiplicar un número compuesto de varias cifras por un dígito, se escribe este debajo y se tira una línea horizontal. En seguida se forma el producto del multiplicador por las unidades del multiplicando. Si este producto no pasa de 9 se escribe debajo de las unidades, pero si excede de 9 se escriben las unidades y se retienen las decenas para reunir las al producto del multiplicador por las decenas del multiplicando, y así se continúa la operación hasta formar el producto de la última cifra de la izquierda, cuyo resultado se escribe tal como sale.

40.—Sea por multiplicar 42,728 por 543. La operación se dispone como se ve al lado y se ejecuta como

42728
543
128184

vamos á explicarlo. El producto 128184 del multiplicando por 3, que son las unidades del multiplicador, se forma aplicando la regla del párrafo anterior.

170912
213640
23201304

En seguida se multiplican las decenas 4 del multiplicador por todas las cifras del multiplicando; pero para que este producto parcial exprese decenas, se tiene cuidado de colocar el primer guarismo 2, de este producto, (4 por 8 son 32), en la columna de las decenas y todos los demás á su izquierda. Luego, multiplicaremos 5 centenas del multiplicador por todas las cifras del multiplicando, teniendo cuidado de colocar la primera cifra 0 de este producto, (5 por 8 son 40), en la columna de las centenas y las demás á su izquierda. Por último, se suman los productos parciales, resultando que

$$24,728 \times 543 = 23,201,304.$$

41.—3er. caso.—REGLA.—*Para multiplicar dos números compuestos de varias cifras, se escribe comúnmente el menor debajo y se tira una línea horizontal.*

Conforme á la regla correspondiente (39) se forma el producto del multiplicando por las unidades del multiplicador; en seguida se forma el producto del multiplicando por las decenas del multiplicador, colocando el primer guarismo de este producto en la columna de las decenas; luego, se forma el producto del multiplicando por las centenas del multiplicador, teniendo cuidado de colocar la primera cifra de este producto en la columna de las centenas, y así se continúa la operación. Por último, se suman los productos parciales.

42.—Sirviéndonos del ejemplo siguiente vamos á explicar cómo pueda fácilmente comprobarse si no se ha

cometido algún error en la práctica de la multiplicación.

$$\begin{array}{r} 25303 \\ 233 \\ \hline 75909 \\ 75909 \\ 50606 \\ \hline 5895599 \end{array} \quad \begin{array}{r} 4 \\ 8 \\ \hline 32=5 \\ 50=5 \end{array}$$

Se suman los guarismos que representan el multiplicando.

$$2+5+3+0+3=13$$

en seguida, sumamos los de la suma 13 que resultó hasta obtener unidades:

$$1+3=4$$

Después por separado, y de la misma manera, sumamos los guarismos del multiplicador.

$$2+3+3=8$$

Así como los del producto

$$5+8+9+5+5+9+9=50; \quad 5+0=5$$

Así es que resultó del multiplicando el número 4
" " multiplicador " 8
" " producto " 5

Ahora multiplicamos los números que procedieron de los factores, $4 \times 8 = 32$, las cifras de este producto las sumaremos hasta obtener unidades simples; $3+2$

—5, y, si no se ha cometido error, este guarismo 5 debe ser igual al que resultó de la suma de los guarismos del producto 5.895.599.

En las pruebas de la multiplicación y división de enteros entendemos por reducir una cantidad á unidades simples, sumar unas con otras sus cifras significativas; las cifras de la suma, cuando consta de decenas, centenas, etc., y si fuere necesario las de la nueva suma y las de las siguientes hasta obtener como resultado un guarismo solo que represente unidades simples.

43.—PRUEBA.—Para hacer la prueba de la multiplicación de los números enteros, se reducen á unidades simples el multiplicando, el multiplicador y el producto. Se forma el producto de la cifra que resultó del multiplicando por la del multiplicador, reduciendo, si fuese necesario este producto pequeño á unidades simples; debiendo obtenerse, cuando no ha habido error, un guarismo igual al que resultó de reducir á unidades simples el producto del multiplicando por el multiplicador.

44.—Se llaman casos las diferentes maneras de presentarse los datos de una operación, y se distinguen con el objeto de facilitar su ejecución.

45.—Casos.—Distinguiremos en la multiplicación de los números enteros siete casos.

1º Cuando ambos factores son números dígitos. Por ejemplo: 5×8

2º Cuando uno de los factores es número dígito y el otro compuesto. Por ejemplo, 3428×5 .

3º Cuando ambos factores tienen varias cifras. Por ejemplo, 328×345 .

4º Cuando uno de los factores es la unidad seguida de ceros. Por ejemplo, 328×100 .

5º Cuando uno ó ambos factores terminan en ceros. Por ejemplo: 3500×146 , ó 4800×320 .

6º Cuando entre las cifras del multiplicador hay uno ó varios ceros. Por ejemplo, 4697×8006 .

7º Cuando la primera ó la última cifra del multiplicador es la unidad. Por ejemplo, 865×14 ; ó 796×71 .

46.—REGLAS PARA RESOLVER LOS CASOS.—El 1er. caso se resuelve á la memoria, el 2º por la regla del número 39, y el 3º por la del número 41.

4º Caso.—Cuando uno de los factores es la unidad seguida de ceros, se obtiene el producto agregando al otro factor tantos ceros como son los que acompañan á la unidad: $4325 \times 100 = 432500$.

5º Caso.—Cuando uno ó ambos factores terminan en ceros, solamente se multiplican las cifras significativas, y al producto se le agregan tantos ceros como sean los que tengan los factores. En el ejemplo adjunto, al producto 25272 de las cifras significativas se le agregan á la derecha tres ceros: uno del multiplicando y dos del multiplicador.

6º Caso.—Cuando entre las cifras del multiplicador hay uno ó varios ceros, se omite la multiplicación por los ceros del multiplicador; pero se tiene cuidado de colocar el primer guarismo del producto parcial, formado por la cifra significativa que sigue á los ceros, en la columna del orden de esta cifra. En el ejemplo adjunto, después de haber obtenido el producto por 8 unidades, se omite la multiplicación por los ceros; pero el primer guarismo del producto parcial formado por 3 millares del multiplicador, se coloca debajo del 9 que en el producto anterior expresa millares.

7º Caso Cuando la primera ó la última cifra del

$$\begin{array}{r} 385 \times 16 \\ 2310 \\ \hline 6160 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 425 \times 271 \\ 2975 \\ 850 \\ \hline 115175 \end{array}$$

El multiplicador es la unidad, se escribe este factor á la derecha del multiplicando separado por el signo; se deja el multiplicando como primer producto parcial, y se multiplica sucesivamente por las demás cifras del multiplicador, teniendo cuidado de colocar la primera de cada producto parcial en la columna del orden del guarismo del multiplicador que sirve como factor. En el primero de los ejemplos adjuntos, expresando el 1 del multiplicador decenas, se ha colocado el producto parcial formado por 6 un lugar á la derecha para que indique unidades. En el segundo ejemplo, expresando el 1 del multiplicador unidades, el producto formado por 7 decenas se ha colocado de manera que indique decenas, y la primera cifra del producto formado por 2 centenas se ha colocado en la columna de las centenas.

EJEMPLOS.—Un navío recorre 142 leguas al día, ¿cuántas recorrerá en un año? esto es, en 365 días. Para encontrar el resultado multiplicaremos 142 por 365 de acuerdo con la regla anterior, y se obtiene que el navío recorrerá 51,830 leguas.

$$\begin{array}{r} 142 \\ 365 \\ \hline 710 \\ 852 \\ 426 \\ \hline 51830 \end{array}$$

Una persona paga su deuda con 27 billetes de banco de á 100 pesos cada uno. ¿Cuánto debía?

$$\begin{array}{r} 27 \\ 100 \\ \hline 2700 \end{array}$$

Debia 2700 pesos.

¿Cuántas varas son 30 leguas, teniendo cada legua 5000 5000 varas?

$$\begin{array}{r} 30 \\ 150000 \end{array} \quad 150000 \text{ varas.}$$

La manutención y equipo de un soldado cuesta 289 pesos al año, ¿cuánto costará la de 607? Multiplicando estos dos números se ve que costaría 175,423 pesos.

$$\begin{array}{r} 289 \\ 607 \\ \hline 2023 \\ 1734 \\ \hline 175423 \end{array}$$

Un carro conduce 279 fardos con peso de 18 kilogramos cada uno. ¿Cuál es el peso total de 279 $\times$ 18 la carga?

$$\begin{array}{r} 2232 \\ 5022 \end{array}$$

El peso total es de 5022 kilogramos.

Multiplicar 375.196,842 por 257 y hacer la prueba.

$$\begin{array}{r} 375196842 \\ 257 \\ \hline 2626377894 \\ 1875984210 \\ 750393684 \\ \hline 96425588394 \end{array} \quad \begin{array}{l} 45 \dots 9 \\ 14 \dots 5 \\ 45 = 9 \\ 63 = 9 \end{array}$$

47.—Usos.—Con el objeto de facilitar la resolución de los problemas numéricos se determina de una manera general las clases de cuestiones que con cada una de las operaciones fundamentales pueden resolverse, atendiendo al modo peculiar con que en cada una de ellas se forma el resultado.

Usos de una operación son las clases de cuestiones á cuya resolución puede aplicarse.

Los usos de la multiplicación son dos:

1.º Conocido el valor de una unidad determinar el de muchas.

2.º Reducir unidades de especie mayor á menor.

PREGUNTAS.—¿Qué cosa es multiplicación? 36.—¿Cómo se indica la multiplicación? 35.—¿Qué nombre se da á los datos y al resultado de la multiplicación?—¿Cuál de los dos factores es el de la especie del producto?—¿Qué sucede con el valor del producto cuando se invierte el orden de los factores? 36.—¿Qué sucede con el valor del producto cuando uno de los factores se hace mayor, y qué cuando se disminuye?—¿Cómo se ejecuta la multiplicación de dos números dígitos? 37.—¿Cómo se multiplica un número compuesto por un dígito? 39.—¿Cómo se multiplican dos números compuestos? 41.—¿Cómo se ejecuta la prueba de la multiplicación? 43.—¿A qué se llaman casos? 44.—¿Cuáles son los casos de la multiplicación? 45.—¿Cómo se multiplica una cantidad por la unidad seguida de ceros? 46.—¿Cómo se ejecuta la multiplicación cuando uno ó ambos factores terminan en ceros?—¿Cómo se hace la multiplicación cuando entre las cifras del multiplicador hay ceros?—¿Cómo se simplifica la multiplicación cuando la primera ó la última cifra del multiplicador es la unidad?—¿A qué se llaman usos de una operación? 47.—¿Cuántos y cuáles son los usos de la multiplicación? 47.

PROBLEMAS.

25.—Determinar los productos de 5×3 ; de 7×8 ; de 5×9 y de 9×7 .

26.—Id. de $9.876,543 \times 4$; de $23.456,789 \times 6$; de $24.638,570 \times 8$.

27.—Id. de $98.765,432 \times 753$; de $23.456,789 \times 846$ haciendo la prueba.

28.—Multiplicar $5,820 \times 1,000$.

29.—Id. $24.638,579 \times 9,200$; id. $48,600 \times 7,900$.

30.—Id. $9.753,123 \times 62,004$.

31.—Id. $86,725 \times 751$; id. $24,068 \times 18$.

32.—Los gastos de una nación importan 62,550 pesos al día, se quiere saber á cuánto ascenderán en el año, que consta de 365 días.

33.—Queremos reducir 875 pesos á tlacos, sabiendo que un peso tiene 64 tlacos.

División.

48.—Juan debe á Pedro \$40 y no pudiendo pagarlos en junto conviene en hacerlo en 4 abonos mensuales. Se quiere saber ¿cuánto ha de recibir Pedro cada mes?

Para determinar el resultado bastará dividir 40 en 4 partes iguales, ó buscar el número de veces que 40 contiene á 4. Esta operación, recíproca de la multiplicación, se llama *división*, la cantidad 40, que se ha de dividir se nombra *dividendo*, aquella, 4, por la cual se ha de dividir se llama *divisor*, y el resultado, 10, se denomina *cociente*. Esta operación se indica por el signo $\div$ que se lee *dividido por*. Nuestro problema se escribiría así:

$$40 \$ \div 4 = 10 \$$$

y se leería 40 \$ divididos por 4 igual á 10 \$. Esto es, Pedro debería recibir 10 \$ cada mes para quedar pagado de 40 en 4 meses.

La especie de las unidades del cociente, no siempre es de la especie del dividendo ni de la del divisor, sino que la determina la pregunta.

Por ejemplo, si se quiere saber cuántos pesos son 48 reales, dividiremos 48 reales entre 8 reales, que tiene un peso, y el cociente 6 expresará pesos; siendo en este caso de una especie diferente á la de las unidades del dividendo y del divisor.

49.—DEFINICIÓN.—La división es la operación por medio de la cual se determina cuántas veces un número contiene á otro.

Usos de una operación son las clases de cuestiones á cuya resolución puede aplicarse.

Los usos de la multiplicación son dos:

1.º Conocido el valor de una unidad determinar el de muchas.

2.º Reducir unidades de especie mayor á menor.

PREGUNTAS.—¿Qué cosa es multiplicación? 36.—¿Cómo se indica la multiplicación? 35.—¿Qué nombre se da á los datos y al resultado de la multiplicación?—¿Cuál de los dos factores es el de la especie del producto?—¿Qué sucede con el valor del producto cuando se invierte el orden de los factores? 36.—¿Qué sucede con el valor del producto cuando uno de los factores se hace mayor, y qué cuando se disminuye?—¿Cómo se ejecuta la multiplicación de dos números dígitos? 37.—¿Cómo se multiplica un número compuesto por un dígito? 39.—¿Cómo se multiplican dos números compuestos? 41.—¿Cómo se ejecuta la prueba de la multiplicación? 43.—¿A qué se llaman casos? 44.—¿Cuáles son los casos de la multiplicación? 45.—¿Cómo se multiplica una cantidad por la unidad seguida de ceros? 46.—¿Cómo se ejecuta la multiplicación cuando uno ó ambos factores terminan en ceros?—¿Cómo se hace la multiplicación cuando entre las cifras del multiplicador hay ceros?—¿Cómo se simplifica la multiplicación cuando la primera ó la última cifra del multiplicador es la unidad?—¿A qué se llaman usos de una operación? 47.—¿Cuántos y cuáles son los usos de la multiplicación? 47.

PROBLEMAS.

25.—Determinar los productos de 5×3 ; de 7×8 ; de 5×9 y de 9×7 .

26.—Id. de $9,876,543 \times 4$; de $23,456,789 \times 6$; de $24,638,570 \times 8$.

27.—Id. de $98,765,432 \times 753$; de $23,456,789 \times 846$ haciendo la prueba.

28.—Multiplicar $5,820 \times 1,000$.

29.—Id. $24,638,579 \times 9,200$; id. $48,600 \times 7,900$.

30.—Id. $9,753,123 \times 62,004$.

31.—Id. $86,725 \times 751$; id. $24,068 \times 18$.

32.—Los gastos de una nación importan 62,550 pesos al día, se quiere saber á cuánto ascenderán en el año, que consta de 365 días.

33.—Queremos reducir 875 pesos á tlacos, sabiendo que un peso tiene 64 tlacos.

División.

48.—Juan debe á Pedro \$40 y no pudiendo pagarlos en junto conviene en hacerlo en 4 abonos mensuales. Se quiere saber ¿cuánto ha de recibir Pedro cada mes?

Para determinar el resultado bastará dividir 40 en 4 partes iguales, ó buscar el número de veces que 40 contiene á 4. Esta operación, recíproca de la multiplicación, se llama *división*, la cantidad 40, que se ha de dividir se nombra *dividendo*, aquella, 4, por la cual se ha de dividir se llama *divisor*, y el resultado, 10, se denomina *cociente*. Esta operación se indica por el signo $\div$ que se lee *dividido por*. Nuestro problema se escribiría así:

$$40 \$ \div 4 = 10 \$$$

y se leería 40 \$ divididos por 4 igual á 10 \$. Esto es, Pedro debería recibir 10 \$ cada mes para quedar pagado de 40 en 4 meses.

La especie de las unidades del cociente, no siempre es de la especie del dividendo ni de la del divisor, sino que la determina la pregunta.

Por ejemplo, si se quiere saber cuántos pesos son 48 reales, dividiremos 48 reales entre 8 reales, que tiene un peso, y el cociente 6 expresará pesos; siendo en este caso de una especie diferente á la de las unidades del dividendo y del divisor.

49.—DEFINICIÓN.—La división es la operación por medio de la cual se determina cuántas veces un número contiene á otro.

La división, como operación recíproca de la multiplicación, tiene por objeto, conocido el producto y uno de sus factores, determinar el otro factor.

El producto de dos números enteros siempre es entero; pero como no todos los números provienen del producto de dos factores enteros, resulta que en el mayor número de casos el cociente es un número mixto. Así, por ejemplo, $8 \times 2 = 16$ y $8 \times 3 = 24$ de lo que resulta que todos los números comprendidos entre 16 y 24 no pueden dar un cociente entero cuando se les divide por 8, siendo necesario multiplicar este número por una cantidad mayor que 2 y menor que 3 para obtener 20 como producto. En casos como este, y que son los más frecuentes, el *dividendo* se compone de un producto más una cantidad que se llama *resta*; por ejemplo, si se divide 19 entre 8, se tendrá $19 = 8 \times 2 + 3$. Ahora, para determinar el cociente exacto observaremos que después de tener el cociente 2, quedó la resta 3 que debemos dividir entre 8. Si la resta hubiera sido 1, como la unidad dividida entre 8 da un octavo, que se representa por $\frac{1}{8}$, el cociente habría sido $\frac{1}{8}$; pero como la resta 3, es tres veces mayor que 1, el cociente será tres octavos, que se representa por $\frac{3}{8}$. Esto es, $19 \div 8 = 2 + \frac{3}{8}$.

Debemos hacer notar que el valor del cociente no se altera cuando se multiplican ó cuando se dividen el dividendo y el divisor por un mismo número.

Por ejemplo, si tenemos: $12 \div 6 = 2$
multiplicando por 10 resulta: $120 \div 60 = 2$
dividiendo por 3 resulta: $4 \div 2 = 2$

50.—Para ejecutar con facilidad la división de los números enteros, es conveniente aprender de memoria la siguiente

TABLA DE DIVIDIR.

1 entre 1 á 1	4 entre 4 á 1	7 entre 7 á 1
2	1 2	8
3	1 3	12
4	1 4	16
5	1 5	20
6	1 6	24
7	1 7	28
8	1 8	32
9	1 9	36
2	2 2	10
3	2 3	15
4	2 4	20
5	2 5	25
6	2 6	30
7	2 7	35
8	2 8	40
9	2 9	45
3	3 3	12
4	3 4	18
5	3 5	24
6	3 6	30
7	3 7	36
8	3 8	42
9	3 9	48
4	4 4	16
5	4 5	20
6	4 6	24
7	4 7	28
8	4 8	32
9	4 9	36
5	5 5	25
6	5 6	30
7	5 7	35
8	5 8	40
9	5 9	45
6	6 6	36
7	6 7	42
8	6 8	48
9	6 9	54
7	7 7	49
8	7 8	56
9	7 9	63
8	8 8	64
9	8 9	72
9	9 9	81

51.—Si tenemos que dividir 13,156 entre 52, dispondremos y ejecutaremos la operación como sigue. A la derecha del dividendo se escribe el divisor separándolo por una línea vertical, y se tira debajo del divisor otra horizontal, para poner debajo de ella el cociente.

13,156	52	Teniendo el divisor dos guarismos;
275	253	separamos las dos primeras cifras de la
156		izquierda del dividendo; pero por ser 13
00		menor que 52, tendremos que tomar otra

cifra, y para determinar el primer guarismo del cociente, que en nuestro ejemplo representará centenas, dividiremos 131 centenas entre 52. A este fin dividimos 13 entre 5, y como les toca á 2 escribimos este número debajo del divisor. En seguida multiplicaremos 2 por el divisor y el producto se irá restando de 131, á paso y medida que se forma, de la manera siguiente: 2 por 2 son 4 á 11 la diferencia es 7, que se escribe debajo de la cifra 1, correspondiente del dividendo, reteniendo una decena que contiene 11, diremos 2 por 5, 10 y una retenida son 11, á 13 la diferencia es 2 que se escribe.

Al lado de la resta 27 se baja el guarismo siguiente 5 del dividendo, y dividiendo 275 entre 52, determinaremos el segundo guarismo del cociente. A este fin dividiremos 27 entre 5, y como les toca á 5, escribimos este guarismo á la derecha del primer cociente 2. En seguida multiplicaremos 5 por el divisor, y el producto se irá restando de 275 á paso y medida que se forma, de la manera siguiente: 5 por 2, 10 á 15, 5, que se escribe y va 1; 5 por 5, 25 y 1, 26 á 27, 1 que se escribe. Al lado de la resta 15 se baja el guarismo siguiente 6, y dividiendo 156 entre 52, determinaremos el último guarismo ó las unidades del cociente. A este fin dividimos 15 entre 5, y como les toca á 3,

escribimos este guarismo á la derecha del cociente 25. En seguida multiplicaremos 3 por el divisor, y el producto se irá restando de 156 á paso y medida que se forma, de la manera siguiente: 3 por 2 son 6, á 6, 0, que se escribe; 3 por 5, 15 á 15 la diferencia es 0 que se escribe.

Por no haber quedado ninguna resta, 13,156 contiene á 52 exactamente 253 veces, y si multiplicamos 52 por 253 obtendremos 13,156 por producto.

Como cada cociente parcial se determina por tanteo, unas veces es mayor que el verdadero, y otras menor. Se conoce que el guarismo del cociente es mayor de lo que debe ser, en que al multiplicarlo por el divisor se obtiene un producto mayor que el dividendo parcial, en cuyo caso hay que disminuir una unidad al cociente y repetir la multiplicación haciendo la resta respectiva. El guarismo del cociente es menor que el verdadero cuando la resta resulta mayor que el divisor, en este caso se pone un cociente una unidad mayor y se repite la multiplicación haciendo la resta.

52.—REGLA.—Para dividir los números enteros, se escribe á la derecha del dividendo el divisor, separándolo por una línea vertical, y se tira otra horizontal para poner debajo de ella el cociente.

El primer dividendo parcial se forma separando con una coma, de la izquierda del dividendo tantos guarismos como tiene el divisor, ó uno más, para tener una cantidad mayor que el divisor. A fin de determinar el primer guarismo del cociente, se divide la primera ó las dos primeras cifras del dividendo por la primera del divisor, y el número que resulta se escribe debajo del divisor. En seguida se multiplica este guarismo del cociente por el divisor, y el producto se va restando á paso y medida que se forma, de las cifras separadas en el dividendo.

Para formar el segundo dividendo parcial, al lado de la resta se baja la cifra siguiente del dividendo y se determina el segundo guarismo del cociente lo mismo que se determinó el primero á cuya derecha se escribe. Se multiplica el divisor por el segundo guarismo del cociente, y al ir formando el producto se va restando del dividendo parcial. La operación se continúa de igual manera hasta obtener las unidades del cociente y la última resta.

Cuando alguno de los dividendos parciales es menor que el divisor, se pone cero en el cociente antes de bajar otra cifra del dividendo para continuar la operación.

Se conoce que un cociente parcial es mayor que el verdadero, en que su producto por el divisor resulta mayor que el dividendo parcial; y se conoce que la cifra del cociente es menor que la verdadera, en que la resta resulta mayor que el divisor. En cualquiera de estos dos casos, debe corregirse el cociente y repetirse la multiplicación por el divisor, restando el producto del dividendo parcial.

Mucho se simplifican los tanteos que son necesarios para determinar un cociente parcial, ejecutando á la memoria la multiplicación del cociente por las dos primeras cifras de la izquierda del divisor y la resta respectiva de las correspondientes del dividendo parcial.

53.—Por medio del siguiente ejemplo vamos á explicar cómo puede fácilmente comprobarse la ejecución de la división.

$$\begin{array}{r}
 26=8 \\
 3026,87 \mid 877 \dots 22=4 \\
 3958 \quad 345 \dots 12=3 \\
 4507 \quad 12 \mid 5=17 \dots 8 \\
 122 \dots 5
 \end{array}$$

Sumaremos los guarismos del dividendo $3+0+2$

$+6+8+7=26$, y los de la suma $2+6$ hasta obtener un número, como 8, que expresa unidades simples. Por separado y de la misma manera sumaremos los guarismos del divisor, los del cociente y los de la resta, como vamos á indicarlo.

El dividendo da 8; $3+0+2+6+8+7=26$; $2+6=8$
 el divisor da 4; $8+7+7=22$; $2+2=4$
 el cociente da 3; $3+4+5=12$; $1+2=3$
 la resta da 5; $1+2+2=5$.

En seguida multiplicamos 3 por 4 son 12 mas 5 de la resta son 17, y sumaremos los guarismos de esta cantidad $1+7=8$. Si este guarismo 8 resulta igual al que se obtuvo de las sumas de las cifras del dividendo, es señal de que no se ha cometido error en la ejecución de la división.

54.—PRUEBA.—Para hacer la prueba de la división de los números enteros, se reducen á unidades simples (42) separadamente el dividendo, el divisor, el cociente y la resta. Se forma el producto de la cifra del cociente por la del divisor y se agrega la de la resta. El resultado reducido á unidades simples debe dar un guarismo, cuando no ha habido error en la división, igual al que resultó de reducir á unidades simples el dividendo.

55.—CASOS.—Distinguiremos en la división de enteros seis casos:

1º Cuando el dividendo, no llega á 100 y constando el divisor de un solo guarismo, el cociente resulta de un solo guarismo. Por ejemplo: $35 \div 7$ igual á 5.

2º Cuando el divisor tiene un guarismo y el dividendo consta de muchos. Por ejemplo: $3964 \div 2$.

3º Cuando tanto el divisor como el dividendo constan de muchos guarismos. Por ejemplo: $42,964 \div 342$.

4º Cuando el divisor es la unidad seguida de ceros. Por ejemplo: $8,569 \div 100$.

5º Cuando el dividendo y el divisor terminan en ceros. Por ejemplo: $589,300 \div 2,500$.

6º Cuando solo el divisor termina en ceros. Por ejemplo: $69,739 \div 2,800$.

56.—REGLAS PARA RESOLVER LOS CASOS.—El 1er. caso se resuelve á la memoria.

2º Caso.—Cuando el divisor tiene un solo guarismo, la operación se simplifica disponiéndola y ejecutándola como vamos á explicarlo con el adjunto ejemplo. Se dice octava de 50 son 6, que se escribe debajo del 0 de 50; 6 por 8, 48 á 50 la diferencia

$5012 \div 8$ es 2. Esta resta que expresa centenas, $= 626 + \frac{4}{8}$ unida al guarismo siguiente del dividendo forma 21 decenas. Octava de 21 son 2, que se escribe debajo; 2 por 8, 16 á 21, 5; octava de 52, 6 que se escribe; 6 por 8, 48 á 52, 4 que es la resta; resultando que

$$5,012 \div 8 = 626 + \frac{4}{8} \text{ ó que } 5,012 = 8 \times 626 + 4$$

3er. Caso.—Cuando tanto el dividendo como el divisor constan de muchos guarismos, la operación se resuelve por la regla general. (52)

4º Caso.—Cuando el divisor es la unidad seguida de ceros, se separan en el dividendo, contando de derecha á izquierda, tantos guarismos como ceros tenga el divisor; el cociente será la cantidad expresada por los guarismos del dividendo que quedan á la izquierda, y los de la derecha representarán la resta.

Si se quiere dividir, por ejemplo, 28,346 por 100; separando á la derecha del dividendo dos de sus cifras, 283(46, el cociente será 283 y la resta será 46

5º Caso.—Cuando el dividendo y el divisor terminan

en ceros, se suprime igual número de ceros en ambos términos y se ejecuta la división con las cifras restantes.

Por ejemplo: sea por dividir 7.346,000 entre 2,800. Como el divisor tiene menos ceros que el dividendo, suprimiremos dos ceros en cada término y se dividirá

73460(00	28(00	73,460 entre 28, obteniéndose
174	2623	2,623 por cociente. El fundamen-
66		to de esta abreviación es que el
100		cociente no se altera cuando se
16		dividen por un mismo número el
		dividendo y el divisor. Aquí se

han dividido por 100 al suprimir los ceros.

6º Caso.—Cuando solo el divisor termina en ceros, se separan éstos é igual número de guarismos á la derecha del dividendo; se hace la división de las cifras de la izquierda de ambos términos, y al concluirse se escriben á continuación de la resta las cifras separadas en el dividendo, restituyendo al divisor los ceros de que consta.

Sea por dividir 437,823 entre 28,000. Se separan los tres ceros del divisor y las tres últimas cifras del dividendo. Se divide 437 entre 28; el cociente es 15, y á la derecha de la resta 17 se bajan los guarismos 823 separados en el dividendo. El cociente expresado en la forma fraccionaria es

$$15 + \frac{17823}{28000}$$

Esto es: $437,823 = 28,000 \times 15 + 17,823$.

EJEMPLOS.—Se quiere saber cuántos pesos son 36,864

reales. Como el peso tiene 8 reales, dividiremos 36,864 por 8, según se ha explicado en el 2º caso, esto es, sacaremos octava parte á este número y resulta que equivale á 4,608 pesos.

Teniendo que distribuir 690 naranjas entre 15 personas, se quiere saber ¿cuántas le tocarán á cada una?

690 | 15
90 46
0
Dividiendo 690 naranjas entre 15, resulta que cada persona recibirá 46 naranjas.

Con 8,568 pesos se han comprado 252 piezas de manta.

8568 | 252
1008 34
000
¿Cuál es el precio de la pieza?

Resolución: 34 pesos.

Para pagar una persona 2,750 pesos, quiere saber cuántos billetes necesita de á 100 pesos cada uno. Como para dividir por 27(50) 100 basta separar las dos últimas cifras de la derecha, resulta que se necesitan 27 billetes de á 100 pesos y 50 pesos más.

Se quiere saber cuántas leguas son 821,000 varas.

Para reducir las varas á leguas las dividiremos por 5,000 y suprimiendo tres ceros en el dividendo y en el divisor, la operación queda reducida á sacar quinta parte á 821, resultando que....

821,000 varas=164 leguas un quinto.

En 320 días un navio ha recorrido 50,845 leguas.

Se quiere saber cuántas leguas ha andado al día.

50845 | 320
188 158
284
285
Dividiendo 50,845 por 320, conforme á la regla del 6º caso, se encuentra que anduvo 158 leguas y $\frac{284}{320}$ de legua al día.

Sea por dividir 175,586 entre 289 y hacer la prueba.

$$\begin{array}{r} 32=5 \\ 1755,86 \overline{) 289} \dots 19=1 \\ 2186 \overline{) 607} \dots 13=4 \\ 163...1 \quad \quad \quad 4+1=5 \end{array}$$

57.—Usos.—Los usos de la división son cuatro.

1º Ver cuántas veces un número contiene á otro.

2º Reducir unidades de especie menor á mayor.

3º Conocido el valor de muchas unidades y el número de ellas, determinar el de una.

4º Conocido el valor de muchas unidades y el de una sola, determinar el número de ellas.

PREGUNTAS.—¿Qué cosa es división? 49.—¿Cuál es el objeto de esta operación considerándola como reciproca de la multiplicación?—¿Cómo se indica la división? 48.—¿Qué nombre se da á cada una de las cantidades que se consideran en la división? 48.—¿Qué cosa es lo que determina la especie de las unidades del cociente?—¿Qué forma se da al cociente cuando en la división queda una resta? 49.—¿Qué sucede con el valor del cociente cuando se multiplican ó se dividen el dividendo y el divisor por un mismo número?—¿Cuál es la regla general para dividir los números enteros? 52.—¿En qué se conoce que uno de los cocientes parciales es mayor que el verdadero?—¿En qué se conoce que es menor que el verdadero?—¿Cómo se hace la prueba de la división de enteros? 54.—¿Cuántos y cuáles son los casos de la división? 55.—¿Cómo se simplifica la división cuando el divisor es la unidad seguida de ceros? 56.—¿Cómo se ejecuta la división cuando el dividendo y el divisor terminan en ceros?—¿Cómo se simplifica la división cuando solo el divisor termina en ceros?—¿Cuáles son los usos de la división? 57.

PROBLEMAS.

34.—Determinar el cociente de $48 \div 8$; de $25 \div 5$; de $63 \div 9$; de $52 \div 7$ y de $29 \div 4$.

35.—Determinar los cocientes de $74,596 \div 4$; de $896,497 \div 6$; de $794,538 \div 8$.

36.—Dividir 8.904,745 ÷ 40,906; id. 7.743,696 ÷ 37,416 y hacer la prueba de ambas operaciones.

37.—Dividir 64,569 entre 1,000; id. 26,004 entre 100.

38.—Dividir 347,800 por 3,900; id. 2.938,000 por 43,700.

39.—Dividir 5.817,419 por 38,500; id. 4.640,806 por 587,000 y hacer las pruebas.

40.—Se quiere saber á cuántas personas pobres se podrá dar un auxilio de 50 pesos con la suma 3.509 pesos.

41.—¿Cuántos quintales son 835,000 onzas? en el concepto de que un quintal tiene 1,600 onzas.

42.—Habiéndose pagado 10,324 pesos por 356 quintales de cobre se quiere saber ¿cuál es el precio del quintal?

43.—¿Cuántas arrobas de harina pueden comprarse con 1,806 pesos valiendo 14 pesos la arroba?

44.—Un comerciante tiene en caja: en fuerte 282\$, en menudo 13\$, en billetes de banco 520\$, en oro 648\$, y en talegas 8,000\$. ¿Cuánto tiene el comerciante en junto?

45.—¿Cuántos años hace que se inventó la imprenta, habiéndolo sido en 1450 por el alemán Guttemberg?

46.—Cuatro hermanos heredan 62,510 pesos. El primero recibe 18,030\$, el segundo recibe 985\$ más que el primero; el tercero 2,000\$ más que el segundo, y el cuarto recibe el resto. ¿Cuál será la suma heredada por cada uno?

47.—Un libro tiene 322 páginas y la página 48 renglones. ¿Cuántos renglones tiene el libro?

48.—¿Cuántos minutos tiene un día?

49.—Un empleado recibe 3\$ diarios y al fin de cada mes 175 pesos. Se quiere saber cuánto gana al año?

50.—En una jaula hay 108 canarios, y teniendo

que repartirlos en 6 jaulas, se quiere saber ¿cuántos se han de poner en cada una?

51.—14 libros han costado 728\$. ¿Cuánto vale cada libro?

52.—Una libra esterlina, moneda inglesa, equivale á 25 francos. ¿Cuántas libras esterlinas son 23,850 francos?

53.—Una persona vende 64 acciones que tiene á 275 pesos cada una y con su importe compra algodón á 55\$ la paca. ¿Cuántas pacas de algodón ha comprado?

54.—¿Cuánto tiempo empleará un carruaje para atravesar una distancia de 4,920 varas andando 82 varas por minuto?

Divisores enteros.

58.—Número primo es el que no puede dividirse dando un cociente entero, mas que por sí mismo y por la unidad. Por ejemplo, 5 es primo, porque únicamente se obtiene un cociente entero sin resta, cuando se divide por sí mismo ó por la unidad. Son igualmente números primos 2, 3, 7, 11, 13....

Se llama múltiplo un número que resulta como producto de factores enteros diferentes de la unidad. Por ejemplo, 12 es múltiplo de 3 porque $3 \times 4 = 12$.

Se llama submúltiplo ó parte alicuota de una cantidad, el número que puede dividirla dando un cociente entero. Por ejemplo, 3 es submúltiplo ó parte alicuota de 12, porque $12 \div 3 = 4$.

59.—Potencia de un número es el producto que resulta de multiplicarlo varias veces por sí mismo. Por ejemplo, 36 es la segunda potencia de 6, porque $6 \times 6 = 36$; y 125 es la 3ª potencia de 5 porque $5 \times 5 \times 5 = 125$.

36.—Dividir 8.904,745 ÷ 40,906; id. 7.743,696 ÷ 37,416 y hacer la prueba de ambas operaciones.

37.—Dividir 64,569 entre 1,000; id. 26,004 entre 100.

38.—Dividir 347,800 por 3,900; id. 2.938,000 por 43,700.

39.—Dividir 5.817,419 por 38,500; id. 4.640,806 por 587,000 y hacer las pruebas.

40.—Se quiere saber á cuántas personas pobres se podrá dar un auxilio de 50 pesos con la suma 3.509 pesos.

41.—¿Cuántos quintales son 835,000 onzas? en el concepto de que un quintal tiene 1,600 onzas.

42.—Habiéndose pagado 10,324 pesos por 356 quintales de cobre se quiere saber ¿cuál es el precio del quintal?

43.—¿Cuántas arrobas de harina pueden comprarse con 1,806 pesos valiendo 14 pesos la arroba?

44.—Un comerciante tiene en caja: en fuerte 282\$, en menudo 13\$, en billetes de banco 520\$, en oro 648\$, y en talegas 8,000\$. ¿Cuánto tiene el comerciante en junto?

45.—¿Cuántos años hace que se inventó la imprenta, habiéndolo sido en 1450 por el alemán Guttemberg?

46.—Cuatro hermanos heredan 62,510 pesos. El primero recibe 18,030\$, el segundo recibe 985\$ más que el primero; el tercero 2,000\$ más que el segundo, y el cuarto recibe el resto. ¿Cuál será la suma heredada por cada uno?

47.—Un libro tiene 322 páginas y la página 48 renglones. ¿Cuántos renglones tiene el libro?

48.—¿Cuántos minutos tiene un día?

49.—Un empleado recibe 3\$ diarios y al fin de cada mes 175 pesos. Se quiere saber cuánto gana al año?

50.—En una jaula hay 108 canarios, y teniendo

que repartirlos en 6 jaulas, se quiere saber ¿cuántos se han de poner en cada una?

51.—14 libros han costado 728\$. ¿Cuánto vale cada libro?

52.—Una libra esterlina, moneda inglesa, equivale á 25 francos. ¿Cuántas libras esterlinas son 23,850 francos?

53.—Una persona vende 64 acciones que tiene á 275 pesos cada una y con su importe compra algodón á 55\$ la paca. ¿Cuántas pacas de algodón ha comprado?

54.—¿Cuánto tiempo empleará un carruaje para atravesar una distancia de 4,920 varas andando 82 varas por minuto?

Divisores enteros.

58.—Número primo es el que no puede dividirse dando un cociente entero, mas que por sí mismo y por la unidad. Por ejemplo, 5 es primo, porque únicamente se obtiene un cociente entero sin resta, cuando se divide por sí mismo ó por la unidad. Son igualmente números primos 2, 3, 7, 11, 13....

Se llama múltiplo un número que resulta como producto de factores enteros diferentes de la unidad. Por ejemplo, 12 es múltiplo de 3 porque $3 \times 4 = 12$.

Se llama submúltiplo ó parte alicuota de una cantidad, el número que puede dividirla dando un cociente entero. Por ejemplo, 3 es submúltiplo ó parte alicuota de 12, porque $12 \div 3 = 4$.

59.—Potencia de un número es el producto que resulta de multiplicarlo varias veces por sí mismo. Por ejemplo, 36 es la segunda potencia de 6, porque $6 \times 6 = 36$; y 125 es la 3ª potencia de 5 porque $5 \times 5 \times 5 = 125$.

125. A la 2ª potencia se le llama también *cuadrado*, y a la 3ª potencia se le llama *cubo* de un número.

La potencia de una cantidad se indica así:

$$6^2=36; \quad 5^3=125$$

y se lee: 6 elevado al cuadrado, ó á la 2ª potencia, igual á 36; 5 elevado al cubo, ó á la tercera potencia, igual á 125. El número pequeño que se pone arriba, y á la derecha de la cantidad se llama *exponente* é indica las veces que la cantidad entra como factor en el producto.

Se llama *raíz* de una cantidad el número que multiplicado una ó varias veces por sí mismo, produce dicha cantidad. Por ejemplo: 6, es la raíz 2ª ó cuadrada de 36; y 5 es la raíz 3ª ó cúbica de 125.

La raíz de una cantidad se indica como sigue:

$$\sqrt[2]{36}=6; \quad \sqrt[3]{125}=5$$

y se lee: raíz cuadrada de 36 igual 6; raíz cúbica de 125 igual á 5. El número pequeño puesto entre las ramas del signo, se llama *índice* de la raíz.

60.—MÁXIMO COMÚN DIVISOR.—Se llama *máximo común divisor* de varios números, el mayor número que puede dividirlos exactamente. Por ejemplo, 6 es el máximo común divisor de 12 y de 18.

Para determinar el máximo común divisor de dos cantidades se procede como sigue. Sea como ejemplo buscar el máximo común divisor entre 1,440 y 624: Di-

vidiremos 1,440 entre 624; se obtiene el cociente 2 y la resta 192. Después dividiremos 624 por la resta 192, se obtiene 3 por cociente y 48 por resta. En seguida dividiremos 192 por 48 y obteniéndose una di-

	624	1440	624
192	48	192	2
00	4	3	

visión sin resta, el último divisor 48 será el máximo común divisor de los números 1,440 y 624.

A esta serie de divisiones se les da comunmente la forma de tabla poniendo las restas á la derecha del divisor como se ve aquí, y los cocientes 2, 3 y 4 debajo de sus correspondientes divisores.

1440	624	192	48	00
	2	3	4	

61.—REGLA.—Para encontrar el máximo común divisor de dos cantidades, se divide la mayor por la menor, y si no hay resta, la cantidad menor será el máximo común divisor. En caso contrario, se divide el divisor por la resta, y se continúa la operación dividiendo sucesivamente el último divisor por la resta, hasta obtener una división exacta. El último divisor será el máximo común divisor.

EJEMPLOS.—Encontrar el máximo común divisor de los números 378 y 1,008. La operación se dispondrá y ejecutará como consta en la siguiente tabla:

1008	378	252	126	00
	2	1	2	

y resulta que el máximo común divisor es 126.

Determinar el máximo común divisor de las cantidades 1,350 y 590.

Aplicando la regla anterior, ejecutaremos la operación como sigue.

			1350	590
		590	170	2
80	170	80	3	
00	10	2		
	8			

el máximo común divisor será 10.

Encontrar el máximo común divisor de 697 y 510. Ejecutaremos la operación, disponiéndola en forma de tabla como sigue:

697	510	187	136	51	34	17	00
	1	2	1	2	1	2	

el máximo común divisor es 17.

62.—CONDICIONES PARA QUE UNA CANTIDAD SEA DIVISIBLE POR LOS NÚMEROS MENORES QUE ONCE.—*Siempre que el último guarismo de una cantidad sea cero, será divisible exactamente por 10.*

Por ejemplo 5340
Décima parte 534

Siempre que la última cifra de una cantidad sea 0 ó 5, será divisible exactamente por 5.

Por ejemplo 380 y 475
Quinta parte 76 95

Siempre que la última cifra de una cantidad sea cero ó par, será divisible exactamente por 2.

Por ejemplo 4930 y 576
Mitad 2465 288

Siempre que las dos últimas cifras de una cantidad sean ceros ó que formen un número divisible exactamente por 4, lo será toda la cantidad.

Por ejemplo 5700 7948 48
Cuarta parte 1425 1987 12

Siempre que las tres últimas cifras de una cantidad sean ceros ó que formen un número divisible exactamente por 8, lo será toda la cantidad.

Por ejemplo 15,000 183,856 856
Octava 1,875 22,982 107

Una cantidad será divisible exactamente por 9, siempre que las cifras significativas que la representan den por suma un número divisible por 9.

Por ejemplo 42,858 $4+2+8+5+8=27=9 \times 3$
Novena 4,762

Una cantidad será divisible exactamente por 3, cuando las cifras significativas que la representan den por suma un número divisible por 3.

Por ejemplo 2724 $2+7+2+4=15=5 \times 3$
Tercera 908

Una cantidad será divisible exactamente por 6 cuando lo sea por 2 y por 3.

Por ejemplo, 564 que termina en par y la suma de cuyas cifras es 15, tendrá sexta.

Sexta 564
94

Por ser complicadas y de poco uso las condiciones de divisibilidad por 7, omitimos su explicación.

PREGUNTAS.—¿A qué se llama número primo? 58.—¿A qué se llama número múltiplo y a qué submúltiplo?—¿Qué cosa es potencia de un número? 59.—¿Cómo se indica la potencia de una cantidad?—¿Qué cosa indica el exponente de una cantidad?—¿A qué se llama raíz de una cantidad?—¿Cómo se indica la raíz de una cantidad? 59.—¿Cómo se llama el número que indica el grado de una raíz?—¿A qué se llama máximo común divisor de dos números? 60.—¿Cuál es la regla para encontrar el máximo común divisor entre dos números? 61.—¿En qué se conoce que un número podrá dividirse exactamente por 10; por 5; por 2; por 4; por 8; por 9; por 3 y por 6? 62.

PROBLEMAS.

- 55.—Determinar el máximo común divisor de 493 y 1189.
 56.—Determinar el máximo común divisor de 1241 y 527.
 57.—Determinar los números que dividen exactamente á 3780 y á 7640.
 58.—¿Por qué números es divisible exactamente 43,560?
 59.—Determinar los números menores que 11 que dividen exactamente á 210,375 y á 9,360.

FRACCIONES COMUNES Y NUMEROS FRACCIONARIOS.

Sistema de numeración, principios y operaciones fundamentales.

63.—Si tuviéramos que dividir, por ejemplo, 25 pliegos de papel entre 4 personas, como $25 \div 4$ les toca á 6 y sobra 1; daríamos 6 pliegos enteros á cada persona, y debiendo repartir el pliego sobrante entre 4, lo partiríamos en cuatro pedazos iguales y daríamos uno de ellos á cada persona. Cada uno de estos pedazos es menor que la unidad y es la cuarta parte de ella. Se representa por $\frac{1}{4}$ de pliego, y se lee, un cuarto de pliego.

Si tuviéramos que repartir 29 manzanas entre 8 ni-

ños, como $29 \div 8$ les toca á 3 y sobran 5: daríamos 3 manzanas á cada niño y para distribuir entre ellos las 5 sobrantes, por ser 8 los niños, cada manzana la partiríamos en 8 pedazos iguales y dando cinco de estos pedazos á cada niño resulta que recibiría en conjunto 3 manzanas enteras y 5 octavas partes de una manzana. Este resultado se representa por $3 + \frac{5}{8}$ de manzana, y se lee, 3 mas 5 octavos de manzana.

Estos números como $\frac{1}{4}$ y $\frac{5}{8}$ menores que la unidad se llaman *quebrados*, y generalmente provienen de dividir un número por otro mayor. Los números como $3 + \frac{5}{8}$ se llaman *mixtos* ó *fraccionarios*. En un quebrado como $\frac{5}{8}$, el número 8 que indica en cuántas partes se considera dividida la unidad se llama *denominador*, y el número 5 que expresa de cuántas de estas partes consta el quebrado se llama *numerador*.

Considerando el peso dividido en 4 partes, las pesetas son fracciones del peso y se indican por $\frac{1}{4}$ \$ por $\frac{2}{4}$ \$ y por $\frac{3}{4}$ \$. Considerando el peso dividido en 8 partes, los reales son octavos de peso, y así, 5 reales equivale á $\frac{5}{8}$ \$, cinco octavos de peso.

Si el día se considera dividido en dos partes, cada una de ellas será medio día, y si lo consideramos dividido en 24 partes, cada una de ellas será un veinticuatroavo de día, y en lugar de estimar el tiempo en horas y decir 1 hora, 5 horas, podremos hacerlo dando á estos valores la forma de fracciones ó indicar $\frac{1}{24}$ día, un veinticuatroavo de día; $\frac{5}{24}$ día, cinco veinticuatroavos de día.

Se comprende que el valor de un quebrado depende de la relación que existe entre los dos números que lo representan, y que cambiando estos números podremos obtener un valor que se acerque ó que se aleje tanto como se quiera de la unidad.

64.—Se llaman *fracciones* ó *quebrados*, los números

PROBLEMAS.

- 55.—Determinar el máximo común divisor de 493 y 1189.
 56.—Determinar el máximo común divisor de 1241 y 527.
 57.—Determinar los números que dividen exactamente á 3780 y á 7640.
 58.—¿Por qué números es divisible exactamente 43,560?
 59.—Determinar los números menores que 11 que dividen exactamente á 210,375 y á 9,360.

FRACCIONES COMUNES Y NUMEROS
FRACCIONARIOS.Sistema de numeración,
principios y operaciones fundamentales.

63.—Si tuviéramos que dividir, por ejemplo, 25 pliegos de papel entre 4 personas, como $25 \div 4$ les toca á 6 y sobra 1; daríamos 6 pliegos enteros á cada persona, y debiendo repartir el pliego sobrante entre 4, lo partiríamos en cuatro pedazos iguales y daríamos uno de ellos á cada persona. Cada uno de estos pedazos es menor que la unidad y es la cuarta parte de ella. Se representa por $\frac{1}{4}$ de pliego, y se lee, un cuarto de pliego.

Si tuviéramos que repartir 29 manzanas entre 8 ni-

ños, como $29 \div 8$ les toca á 3 y sobran 5: daríamos 3 manzanas á cada niño y para distribuir entre ellos las 5 sobrantes, por ser 8 los niños, cada manzana la partiríamos en 8 pedazos iguales y dando cinco de estos pedazos á cada niño resulta que recibiría en conjunto 3 manzanas enteras y 5 octavas partes de una manzana. Este resultado se representa por $3 + \frac{5}{8}$ de manzana, y se lee, 3 mas 5 octavos de manzana.

Estos números como $\frac{1}{4}$ y $\frac{5}{8}$ menores que la unidad se llaman *quebrados*, y generalmente provienen de dividir un número por otro mayor. Los números como $3 + \frac{5}{8}$ se llaman *mixtos* ó *fraccionarios*. En un quebrado como $\frac{5}{8}$, el número 8 que indica en cuántas partes se considera dividida la unidad se llama *denominador*, y el número 5 que expresa de cuántas de estas partes consta el quebrado se llama *numerador*.

Considerando el peso dividido en 4 partes, las pesetas son fracciones del peso y se indican por $\frac{1}{4}$ \$ por $\frac{2}{4}$ \$ y por $\frac{3}{4}$ \$. Considerando el peso dividido en 8 partes, los reales son octavos de peso, y así, 5 reales equivale á $\frac{5}{8}$ \$, cinco octavos de peso.

Si el día se considera dividido en dos partes, cada una de ellas será medio día, y si lo consideramos dividido en 24 partes, cada una de ellas será un veinticuatroavo de día, y en lugar de estimar el tiempo en horas y decir 1 hora, 5 horas, podremos hacerlo dando á estos valores la forma de fracciones ó indicar $\frac{1}{24}$ día, un veinticuatroavo de día; $\frac{5}{24}$ día, cinco veinticuatroavos de día.

Se comprende que el valor de un quebrado depende de la relación que existe entre los dos números que lo representan, y que cambiando estos números podremos obtener un valor que se acerque ó que se aleje tanto como se quiera de la unidad.

64.—Se llaman *fracciones* ó *quebrados*, los números

menores que la unidad, como un cuarto de hora, dos octavos de peso.

Se llaman números mixtos ó fraccionarios, los que constan de unidades enteras y de partes de la unidad, como 4 y 3 octavos.

65.—SISTEMA DE NUMERACIÓN.—Para tener idea del valor de un quebrado, es necesario conocer dos cosas: 1ª, en cuántas partes está dividida la unidad; 2ª, de cuántas de estas partes consta el quebrado.

Los quebrados se representan por dos guarismos escribiendo uno sobre otro separados por una raya, de este modo; $\frac{5}{8}$ cinco octavos. El número que se pone encima se llama *numerador*, y expresa el número de partes de la unidad de que consta el quebrado. El número que se pone abajo se llama *denominador*, y expresa el número de partes en que está dividida la unidad. Al numerador y denominador juntos se les llama *términos del quebrado*.

Para leer ó denominar un quebrado, se lee primero el numerador como número entero, y en seguida se expresa el denominador como número partitivo, esto es; se dice medios, cuando el denominador es 2; tercios, cuando es 3; cuartos, cuando es 4; quintos, cuando es 5; sextos, cuando es 6; sétimos, cuando es 7; octavos, cuando es 8; novenos, cuando es 9; décimos, cuando es 10; y de 10 en adelante se agrega la terminación *avos* al nombre del número del denominador.

Por ejemplo $\frac{5}{9}$ se lee: cinco novenos.

$\frac{423}{515}$ se lee: 423;515 avos.

Para escribir los números fraccionarios se ponen los enteros, y á continuación los quebrados, precedidos generalmente del signo +. Se leen primero los ente-

ros y á continuación los quebrados, como acaba de explicarse.

Por ejemplo $15 + \frac{8}{16}$, se lee 15 mos 8, 16 avos.

66.—Se da el nombre de *quebrado propio* á aquel cuyo valor es menor que la unidad, lo cual se conoce en que el numerador es menor que el denominador.

Se llama *quebrado impropio* á aquel cuyo valor es mayor que la unidad, lo cual se conoce en que el numerador es mayor que el denominador.

67.—REDUCCIÓN DE LOS ENTEROS Á FRACCIONES.—Cuando se quiere dar á un entero la forma de quebrado, se le pone por denominador la unidad. $8 = \frac{8}{1}$, supuesto que en este caso se considera la unidad compuesta de una sola parte.

Para reducir un entero á fracción de determinado denominador, se multiplicará el entero por el denominador que ha de llevar la fracción, y al producto se le pondrá por denominador el número por el cual se multiplicó el entero. Por ejemplo, para reducir 6 á octavos, se multiplicará 6 por 8 y al producto 48 se le pondrá 8 por denominador, $6 = \frac{48}{8}$.

Esta regla se funda en que es un uso de la multiplicación reducir unidades de especie mayor á menor, y como la unidad se compone de 8 octavos, multiplicando 6 por 8 obtendremos el número de octavos que tienen 6 unidades, cuya especie indicaremos poniendo 8 por denominador.

Quando se quieren reducir los enteros á la forma de los quebrados que los acompañan, se multiplicará el entero por el denominador del quebrado, al producto se le agrega el numerador y á la suma se le da por denominador el del quebrado.

Por ejemplo, si se quiere dar al número mixto $7 + \frac{5}{9}$ la forma de quebrado, se multiplicará 7 por 9,

al producto 63 le agregaremos el numerador 5 dándole a la suma 68 por denominador 9. Así es que $7 + \frac{5}{9} = \frac{68}{9}$.

68.—TRANSFORMACIÓN DE LOS QUEBRADOS IMPROPIOS EN NÚMEROS MIXTOS.—Cuando se quieren determinar los enteros que contiene un quebrado impropio, se divide el numerador por el denominador, y si hay resta se le pone por denominador el del quebrado.

Sea por determinar los enteros que contiene el quebrado $\frac{387}{12}$. Dividiremos 387 entre 12, y obtendremos 32 por cociente, que serán los enteros que contiene y a la resta 3 se le pondrá 12 por denominador, resultando que $\frac{387}{12} = 32 + \frac{3}{12}$.

69.—VALOR RELATIVO DE LOS QUEBRADOS.—Supuesto que el denominador indica en cuántas partes está dividida la unidad, y el numerador expresa el número de estas partes de que consta el quebrado, si comparamos los siguientes quebrados que tienen el mismo denominador

$$\frac{1}{12}, \frac{2}{12}, \frac{3}{12}, \frac{4}{12},$$

estando en todos dividida la unidad en 12 partes, la magnitud de estas será la misma y como mientras más sean las partes de que consta una cantidad mayor será su valor, se comprende que de los quebrados que anteceden $\frac{4}{12}$ es el mayor y que $\frac{1}{12}$ es el menor, luego:

1.º Entre quebrados de iguales denominadores, es mayor el que tiene mayor numerador.

2.º Entre quebrados de iguales denominadores, es menor el que tiene menor numerador.

Si comparamos quebrados de iguales numeradores

$$\frac{1}{12}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \text{ y } \frac{1}{2}.$$

todos ellos constan de 6 de las partes en que esté dividida la unidad; pero como mientras menor sea el número de partes en que se divida la unidad mayor será cada parte, esto es, como un noveno es mayor que un treceavo, y un sétimo es mayor que un noveno, se infiere que el mayor de estos quebrados es $\frac{6}{7}$ que es el que tiene menor denominador, y que el menor es $\frac{6}{16}$. Luego:

3.º Entre quebrados de iguales numeradores, el mayor es el que tiene menor denominador.

4.º Entre quebrados de iguales numeradores, el menor es el que tiene mayor denominador.

70.—PRINCIPIOS FUNDAMENTALES DEL CÁLCULO DE QUEBRADOS.—Estos son los siguientes:

1.º El valor de un quebrado se hace tantas veces mayor, como unidades tiene el número por el cual se multiplica su numerador.

Si multiplicamos por 4 el numerador del quebrado $\frac{3}{15}$, se obtendrá el quebrado $\frac{12}{15}$, que es 4 veces mayor que $\frac{3}{15}$, esto es, se ha multiplicado por 4.

2.º El valor de un quebrado se hace tantas veces menor, como unidades tiene el número por el cual se multiplica su denominador.

Si se multiplica por 2 el denominador del quebrado $\frac{3}{5}$, se obtendrá el quebrado $\frac{3}{10}$ que es 2 veces menor que $\frac{3}{5}$, esto es, se ha dividido por 2.

3.º El valor de un quebrado se hace tantas veces menor, como unidades tiene el número por el cual se divide su numerador.

Si dividimos por 3 el numerador del quebrado $\frac{6}{15}$, nos resultará $\frac{2}{15}$ cuyo valor es tres veces menor que $\frac{6}{15}$.

4.º El valor de un quebrado se hace tantas veces ma-

yor, como unidades tiene el número por el cual se divide su denominador.

Si dividimos por 4 el denominador del quebrado $\frac{3}{24}$, resultará $\frac{3}{6}$, cuatro veces mayor que $\frac{3}{24}$, esto es, se habrá multiplicado por 4.

Estos principios pueden reasumirse como sigue:

Si se multiplica	{ el numerador	{ se multiplicará	{ el quebrado.
Si se divide		{ se dividirá	
Si se multiplica	{ el denominador	{ se dividirá	{ el quebrado.
Si se divide		{ se multiplicará	

71.—Si consideramos un quebrado cualquiera, $\frac{7}{8}$ por ejemplo, y multiplicamos por un número sus dos términos, por 3 por ejemplo, se transformará en $\frac{21}{24} = \frac{7}{8}$. En efecto, al multiplicar el numerador por 3 haremos el valor de $\frac{7}{8}$ tres veces mayor; pero al multiplicar el denominador por 3 haremos su valor tres veces menor, y por tanto no se alterará el valor de $\frac{7}{8}$. De esto resulta que el valor de un quebrado no se altera cuando se multiplican sus dos términos por un mismo número.

Como veremos próximamente, este principio sirve de fundamento á la operación de la reducción de los quebrados á un común denominador.

Si tomamos un quebrado cualquiera, $\frac{8}{12}$ por ejemplo, y dividimos sus dos términos por un mismo número, por 4 por ejemplo, se transformará en $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$. En efecto, al dividir el numerador de $\frac{8}{12}$ por 4 haremos el quebrado cuatro veces menor, pero como al dividir el denominador haremos el quebrado cuatro veces mayor, habrá perfecta compensación; luego: el valor de un quebrado no se altera cuando se dividen sus dos términos por un mismo número.

Este principio sirve para simplificar los quebrados.

72.—REDUCCIÓN DE LOS QUEBRADOS Á UN COMÚN DENOMI-

NADOR.—Reducir los quebrados á un común denominador, es transformarlos en otros de igual valor cuyos denominadores son iguales entre sí.

REGLA.—Para reducir los quebrados á un común denominador, se multiplican los dos términos de cada quebrado por el producto de los demás denominadores.

Sea por reducir á un común denominador los quebrados

$$\frac{2}{3}, \frac{1}{4} \text{ y } \frac{7}{8}$$

Multiplicaremos los dos términos del primer quebrado $\frac{2}{3}$ por 32, que es el producto 4×8 de los otros denominadores, y se convertirá en su igual $\frac{64}{96}$. Los términos del segundo quebrado $\frac{1}{4}$, los multiplicaremos por 24, producto de los otros denominadores 3×8 , y se transformará en su igual $\frac{24}{96}$. Los términos del tercer quebrado $\frac{7}{8}$, los multiplicaremos por 12, que es el producto 3×4 de los otros denominadores, y se transformará en $\frac{84}{96}$.

Así los quebrados $\frac{2}{3}, \frac{1}{4} \text{ y } \frac{7}{8}$ se transformarán en sus iguales $\frac{64}{96}, \frac{24}{96} \text{ y } \frac{84}{96}$ cuyos denominadores son iguales entre sí.

73.—SIMPLIFICACIÓN DE LOS QUEBRADOS.—Simplificar un quebrado, es transformarlo en otro de igual valor cuyos términos sean más sencillos.

REGLA.—Para simplificar un quebrado se dividen por un mismo número su numerador y su denominador.

Un quebrado puede simplificarse de dos maneras: dividiendo sucesivamente el numerador y el denominador por los divisores parciales que les sean comunes, ó buscando el máximo común divisor y dividiendo por él los dos términos del quebrado.

74.—Cuando se quiere simplificar un quebrado valiéndose de los divisores parciales de sus dos términos, se examina:

1° Si la última cifra del numerador y la del denominador es 0 ó 5. Si ambos son 0, los términos del quebrado serán divisibles por 10. Si una es 0, y la otra 5, ó si ambas son 5, los términos del quebrado tendrán quinta parte.

2° Si la última cifra del numerador y la del denominador es 0 ó par, los términos del quebrado serán divisibles por 2. Cuando se ve que esta condición está satisfecha, se examina si las dos últimas cifras del numerador y las del denominador forman un número que tiene cuarta parte, en cuyo caso los dos términos del quebrado la tendrán. Cuando se ve que esta última condición está satisfecha, se examina si las tres últimas cifras del numerador y las del denominador forman un número que tiene octava parte, en cuyo caso los dos términos del quebrado la tendrán.

3° Si la suma de los guarismos de cada uno de los términos del quebrado, da un número múltiplo de 9, se podrán dividir por 9 el numerador y el denominador; y si la suma de los guarismos es un múltiplo de 3, los términos del quebrado serán divisibles por 3.

4° Si los dos términos del quebrado tienen mitad y tercera, se podrán dividir sus dos términos por 6.

Sea por simplificar los siguientes quebrados:

$$\frac{72}{56} = \frac{9}{7}, \quad \frac{1800}{3240} = \frac{5}{9}, \quad \frac{216}{396} = \frac{6}{11}, \quad \frac{945}{1050} = \frac{7}{8}$$

75.—Cuando se quiere simplificar un quebrado valiéndose del máximo común divisor de sus dos términos se determinará este por medio de la regla dada en el párrafo 61, y en seguida se dividirán el numerador y el denominador por este máximo común divisor.

Si por este procedimiento se quiere abreviar el quebrado $\frac{742}{1643}$, después de haber determinado que el máximo común divisor es 53, dividiremos por 53 tan-

to el numerador como el denominador, resultando que

$$\frac{742}{1643} = \frac{14}{31}.$$

El objeto de la simplificación de los quebrados, es ejecutar las operaciones con más facilidad y menos probabilidad de equivocaciones.

76.—VALUACIÓN DE LOS QUEBRADOS.—Valuar un quebrado es determinar su valor en la especie de las subdivisiones de la unidad á que pertenece.

Así, sabiendo que el peso se divide en 8 reales y el real en 8 tlacos, valuar el quebrado $\frac{15}{32}$ de peso, es averiguar á cuántos reales y tlacos es igual el valor de este quebrado. Para determinarlo se multiplicará el numerador 15 por 8, que son los reales que tiene un peso, y tendremos: $\frac{15}{32} \times 8 = \frac{120}{32}$ de real. Dividiremos 120 entre 32 para determinar los enteros, que son 3 reales, y queda una resta 24. Para valuar $\frac{24}{32}$ de real, multiplicaremos el numerador 24 por 8, que son los tlacos que tiene un real y resulta que $\frac{24}{32}$ de real = $\frac{192}{32}$ de tlaco. Para determinar los enteros ó tlacos de este quebrado impropio dividiremos 192 entre 32, resultando 6 tlacos.

Por tanto se ve que $\frac{15}{32} = 3$ reales 6 tlacos.

77.—REGLA.—Para valuar un quebrado se multiplica su numerador por el número de subdivisiones de la unidad á que se refiere el quebrado y el producto se divide por el denominador.

Cuando en la división queda resta, se aplica esta regla al quebrado formado por la resta y el divisor, valiéndolo en la siguiente subdivisión.

EJEMPLOS.—Valuar el quebrado $\frac{18}{24}$ de vara; sabiendo que la vara se subdivide en 3 pies y el pie en 12 pulgadas.

$$\begin{array}{r} 18 \mid 24 \\ 3 \quad 0 \text{ varas } 2 \text{ pies } 3 \text{ pulgadas} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 54 \\ 6 \\ 12 \\ 72 \\ 00 \end{array}$$

Aplicando la regla anterior resulta que

$\frac{1}{4}$ vara = 2 pies 3 pulgadas.

Valuar el quebrado $\frac{2841}{4320}$ de día; sabiendo que el día se subdivide en 24 horas, la hora en 60 minutos y el minuto en 60 segundos.

$$\begin{array}{r} 2841 \mid 4320 \\ 24 \quad 0d. - 15h. 47m. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 11364 \\ 5682 \\ 68184 \\ 24984 \\ 3384 \end{array}$$

Aplicando la regla que antecede resulta que

$\frac{2841}{4320}$ día = 15 horas 47 minutos.

$$\begin{array}{r} 60 \\ 20304 \mid 0 \\ 3024 \\ 000 \end{array}$$

PREGUNTAS.—¿A qué se llaman quebrados? 64.—¿A qué se llaman números mixtos?—¿Cómo se representan los quebrados? 65.—¿Qué expresa el numerador?—¿Qué indica el denominador?—¿Cómo se leen los quebrados?—¿Cómo se escriben los quebrados?—¿Cómo se escriben y cómo se leen los números mixtos?—¿A qué se llama quebrado propio? 66.—¿A qué se llama quebrado impropio?—¿Cómo se le da a un entero la forma de quebrado? 67.—¿Cómo se reduce un entero a quebrado

de determinado denominador?—¿Cómo se reduce un entero a la forma del quebrado que lo acompaña?—¿Cómo se determinan los enteros que contiene un quebrado impropio? 68.—¿Entre quebrados de iguales denominadores, cuál es el mayor y cuál es el menor? 69.—¿Entre quebrados de iguales numeradores, cuál es el mayor y cuál es el menor?—¿Qué sucede con el valor de un quebrado cuando se multiplica su numerador y qué cuando se multiplica su denominador? 70.—¿Qué sucede con el valor de un quebrado cuando se divide su numerador y qué cuando se divide su denominador?—¿Qué sucede con el valor de un quebrado cuando se multiplican o se dividen sus dos términos por un mismo número? 71.—¿Qué cosa es reducir los quebrados a un común denominador? 72.—¿Cómo se reducen los quebrados a un común denominador?—¿Qué cosa es simplificar un quebrado? 73.—¿Cómo se simplifica un quebrado?—¿Qué se hace cuando se quiere simplificar un quebrado valiéndose de los divisores parciales de sus dos términos? 74.—¿Qué se hace cuando se quiere simplificar un quebrado valiéndose del máximo común divisor de sus dos términos? 75.—¿Qué cosa es valuar un quebrado? 76.—¿Cómo se valúa un quebrado? 77.

PROBLEMAS.

60.—Escribir los quebrados: un medio; cinco séptimos; veinticinco, ciento doceavos.

61. Darle a 14 la forma de quebrado.

62. Reducir 14 a quintos. Reducir 8 a 25 avos.

63. Incorporar los números mixtos: $3 + \frac{2}{6}$; $6 + \frac{7}{12}$;

$$4 + \frac{15}{20}$$

64. Sacar los enteros a los quebrados: $\frac{125}{15}$; $\frac{62}{7}$;

$$\frac{428}{32}$$

65. ¿Cuál de los quebrados $\frac{9}{18}$, $\frac{3}{18}$, $\frac{12}{18}$, $\frac{15}{18}$ y $\frac{7}{18}$ es el mayor y cuál es el menor?

66. ¿Cuál de los quebrados $\frac{6}{8}$, $\frac{6}{10}$, $\frac{6}{7}$, $\frac{6}{15}$ y $\frac{6}{12}$ es el mayor y cuál es el menor?

67. ¿De cuántas maneras podemos hacer el quebrado $\frac{2}{24}$, cuatro veces mayor, y cuáles son esos quebrados?

68.—De cuántas maneras podemos hacer el quebrado $\frac{6}{9}$ tres veces mayor, y cuáles son esos quebrados?

69.—Simplificar los quebrados: $\frac{780}{1040}$, $\frac{144}{336}$ y $\frac{2688}{3648}$ valiéndose de los divisores parciales de sus dos términos.

70.—Simplificar los quebrados: $\frac{700}{2931}$, $\frac{60}{115}$, $\frac{910}{3085}$ valiéndose del máximo común divisor de sus dos términos.

71.—Reducir á un común denominador los quebrados: $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{6}$.

72.—Reducir á un común denominador $\frac{2}{10}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{7}{8}$.

73.—Valuar los quebrados: $\frac{42}{64}$ de peso: $\frac{89}{123}$ de día.

Adición de los quebrados.

78.—CASOS DE LA ADICIÓN DE LOS QUEBRADOS.—En esta operación se presentan tres casos: 1º, sumar un quebrado con un entero y recíprocamente; 2º, sumar quebrados con quebrados; y 3º, sumar mixtos con mixtos.

En los dos últimos casos puede suceder que los quebrados tengan iguales ó diferentes denominadores.

79.—1º Caso.—Si á 7\$ queremos agregarle $\frac{3}{4}$ de peso, debiendo ser homogéneas las cantidades que se suman, reduciremos 7\$ á cuartos, para lo cual tendremos que multiplicarlo por 4, resultando 7\$ = $\frac{28}{4}$ \$. Luego estos $\frac{28}{4}$ le agregaremos $\frac{3}{4}$ y tendremos que

$$7\$ + \frac{3}{4} = \frac{7 \times 4 + 3}{4} = \frac{31}{4} \$$$

80.—REGLA.—Para sumar un quebrado con un entero, se multiplica el entero por el denominador del quebrado, al producto se le agrega el numerador, y á la suma se le pone por denominador el del quebrado.

Como el orden de los sumandos no altera el valor de la suma, la misma regla servirá para sumar un entero con un quebrado.

Por ejemplo. $\frac{3}{4} \$ + 7\$ = \frac{3 + 7 \times 4}{4} = \frac{31}{4} \$$

EJEMPLOS. 5 varas + $\frac{2}{3} = \frac{15 + 2}{3} = \frac{17}{3}$

2 horas + $\frac{5}{16} = \frac{2 \times 16 + 5}{16} = \frac{37}{16}$ hora

43 arrobas + $\frac{2}{25} = \frac{43 \times 25 + 2}{25} = \frac{1077}{25}$ arroba.

81.—2º Caso.—Una persona ha medido separadamente $\frac{3}{4}$ de vara, $\frac{7}{8}$ de vara y $\frac{5}{6}$ de vara y quiere saber cuál será la longitud total del género. Si todas estas fracciones tuvieran el mismo denominador, si todas, por ejemplo, fueran cuartas, bastaría sumar los numeradores para saber el número total de cuartas del género; pero teniendo los quebrados denominadores desiguales y siendo necesario para poder sumar las cantidades, que sean homogéneas, comenzaremos por transformar los quebrados dados en otros de igual valor, pero haciendo que tengan el mismo denominador. Aplicando la regla del párrafo 72 para reducir los quebrados á un común denominador, tendremos:

$$\frac{3}{4} + \frac{7}{8} + \frac{5}{6} = \frac{144}{192} + \frac{168}{192} + \frac{160}{192}$$

y es lo mismo que si estando dividida la vara en 192 partes iguales, la persona hubiera medido primero 144 de estas partes, luego 168, y por último 160. El total es $144 + 168 + 160 = 472$ partes, cuya magnitud indicaremos poniéndole á este número 192 por denomina-

dor. La longitud total del género será $\frac{472}{192}$ de vara, y siendo este un quebrado impropio determinaremos los enteros dividiendo el numerador por el denominador, esto es, $\frac{472}{192} = 2v. + \frac{88}{192}$.

El quebrado $\frac{88}{192}$ lo simplificaremos dividiendo por 8 sus dos términos, resultando $\frac{88}{192} = \frac{11}{24}$. Nuestra operación quedaría indicada como sigue:

$$\begin{array}{r} v. \quad v. \quad v. \quad v. \quad v. \\ 3 \quad 4 \quad 8 \quad 5 \quad 2 \\ + \quad + \quad + \quad + \quad + \\ 144 \quad 168 \quad 192 \quad 192 \quad 192 \\ \hline 472 \end{array} = 2 + \frac{88}{192} = 2 + \frac{11}{24}$$

la longitud total del género medido sería 2 varas y $\frac{11}{24}$ de vara.

82.—REGLA.—Para sumar quebrados con quebrados, cuando los denominadores son iguales, se suman los numeradores, y á la suma se le pone por denominador el de los quebrados. Cuando los quebrados tienen denominadores desiguales, se reducen previamente á un común denominador; en seguida se suman los numeradores, y á la suma se le da por denominador el denominador común.

EJEMPLOS.—Sea por sumar:

$$2\frac{5}{8} + 7\frac{5}{8} + 2\frac{5}{8} = 1\frac{15}{8} = 2\frac{7}{8}$$

$$\frac{3}{9} + \frac{7}{12} = \frac{36}{108} + \frac{63}{108} = \frac{99}{108} = 1\frac{1}{12}$$

$$\frac{3}{4} + \frac{2}{5} + \frac{2}{3} + \frac{2}{4} = \frac{360}{360} + \frac{144}{360} + \frac{120}{360} + \frac{180}{360} = \frac{604}{360} = 1\frac{9}{90}$$

83.—3^{er}. Caso.—Una persona para hacer un trabajo ha empleado en un día 3 horas y $\frac{7}{8}$; en otro día 4 horas y $\frac{4}{6}$; y en el último 8 horas y $\frac{2}{3}$, y se quiere saber cuál es el número total de horas empleadas. Como se comprende, el problema está reducido á sumar los números mixtos.

$$(3 + \frac{7}{8}) + (4 + \frac{4}{6}) + (8 + \frac{2}{3})$$

á este fin reemplazaremos cada número mixto por el

quebrado impropio á que es igual y en seguida sumaremos los quebrados impropios. Como $3 + \frac{7}{8} = \frac{31}{8}$, $4 + \frac{4}{6} = \frac{28}{6}$, y $8 + \frac{2}{3} = \frac{26}{3}$, tendremos:

$$\begin{array}{r} \text{horas.} \\ (3 + \frac{7}{8}) + (4 + \frac{4}{6}) + (8 + \frac{2}{3}) = \frac{31}{8} + \frac{28}{6} + \frac{26}{3} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{horas.} \\ \frac{31}{8} + \frac{28}{6} + \frac{26}{3} = \frac{558}{144} + \frac{672}{144} + \frac{1248}{144} = \frac{2478}{144} = 17 + \frac{30}{144} \end{array}$$

y como los términos del quebrado $\frac{30}{144}$ tienen sexta será igual á $\frac{5}{24}$ y el resultado final es que se emplean en el trabajo 17 horas y $\frac{5}{24}$ de hora.

84.—REGLA.—Para sumar números mixtos ó fraccionarios, se incorporan los enteros con los quebrados, y se suman los quebrados impropios que resulten.

EJEMPLOS.—Sean para sumar:

$$(2 + \frac{7}{8}) + (3 + \frac{4}{8}) = \frac{23}{8} + \frac{28}{8} = \frac{51}{8} = 6 + \frac{3}{8}$$

$$(4 + \frac{4}{5}) + (2 + \frac{2}{5}) + (5 + \frac{3}{5}) = \frac{24}{5} + \frac{8}{5} + \frac{23}{5} = \frac{55}{5} = 11$$

$$= \frac{288}{60} + \frac{160}{60} + \frac{240}{60} = \frac{688}{60} = 11 + \frac{28}{15}$$

Sustracción de los quebrados.

85.—CASOS DE LA SUSTRACCIÓN DE LOS QUEBRADOS.—En esta operación se presentan tres casos: 1^o, restar un quebrado de un entero; 2^o, restar un quebrado de otro, y 3^o, restar un mixto de otro.

En los dos últimos casos puede suceder que los quebrados tengan ó no iguales denominadores.

86.—1^{er}. Caso.—Queremos encontrar la diferencia entre $5\frac{5}{8}$ y $7\frac{3}{8}$. Como para restar las cantidades, es necesario que sean homogéneas reduciremos los $5\frac{5}{8}$ á octavos multiplicándolos por 8 y nuestra operación sería,

$$5\frac{5}{8} - 7\frac{3}{8} = \frac{40}{8} - \frac{7}{8} = \frac{33}{8} = 4 + \frac{1}{8}$$

pues una vez reducidas las dos cantidades, cuya diferencia se busca, á octavos, bastará restar la menor de la mayor. A la resta 33 le ponemos 8 por denominador para expresar el valor ó la magnitud de las partes, y extrayéndole los enteros al quebrado impropio $\frac{33}{8}$, obtendremos por último que la diferencia entre 5\$ y $\frac{7}{8}$ \$ es 4\$ y $\frac{1}{8}$.

REGLA.—Para restar un quebrado de un entero se multiplica el entero por el denominador del quebrado, se resta el numerador, y á la diferencia se le pone por denominador el del quebrado

EJEMPLOS.—Si de un retazo de 5 varas se quitan $\frac{2}{3}$ ¿cuánto quedará?

$$5 - \frac{2}{3} = \frac{15-2}{3} = \frac{13}{3} = 4 + \frac{1}{3} \text{ varas}$$

Si de un barril que contiene 8 jarras de aguardiente se sacan $\frac{9}{18}$ de jarra ¿cuánto quedará en el barril?

$$8 - \frac{9}{18} = \frac{144-9}{18} = \frac{135}{18} = 7 + \frac{9}{18}$$

87.—2º Caso.—De un pedazo de paño que tiene $\frac{5}{6}$ de vara se cortan $\frac{3}{4}$ de vara y se quiere saber cuál es el tamaño de lo que queda. Para averiguarlo tendremos que restar de $\frac{5}{6}$ de vara $\frac{3}{4}$; pero siendo indispensable que sean homogéneas las cantidades para que puedan restarse, convertiremos estos quebrados en otros de igual valor pero que tengan el mismo denominador. Esto es

$$\frac{5}{6} - \frac{3}{4} = \frac{20}{24} - \frac{18}{24}$$

Es lo mismo que si estando dividida la vara en 24

partes iguales y teniendo un pedazo de paño de $\frac{20}{24}$ de largo se le quitaran $\frac{18}{24}$. Para determinar lo que quedaba habría que restar 18 de 20, y para indicar la magnitud de las 2 partes que quedaron, se les pondría 24 por denominador; supuesto que son veinticuatro avos partes de la unidad. En resumen, la operación se ejecutaría como sigue:

$$\frac{5}{6} - \frac{3}{4} = \frac{20}{24} - \frac{18}{24} = \frac{2}{24} = \frac{1}{12} \text{ vara}$$

y el resultado sería que quedaba $\frac{1}{12}$ de vara.

Sumando $\frac{1}{12}$ con $\frac{3}{4}$ se debe tener $\frac{5}{6}$.

REGLA.—Para restar un quebrado de otro, cuando los denominadores son iguales, se restan los numeradores y á la resta se le pone por denominador el de los quebrados: cuando estos tienen denominadores desiguales, se reducen previamente á un común denominador, en seguida se restan los numeradores, y á la resta se le pone por denominador el común.

EJEMPLOS.—¿Cuál es la diferencia entre $\frac{3}{4}$ y $\frac{5}{6}$ de hora?

$$\frac{5}{6} - \frac{3}{4} = \frac{20}{24} - \frac{18}{24} = \frac{2}{24} \text{ hora.}$$

Si se valúa el quebrado $\frac{2}{24}$ resulta igual á 5 minutos. ¿Cuál es la diferencia entre $\frac{10}{12}$ y $\frac{2}{3}$ de mes?

$$\frac{10}{12} - \frac{2}{3} = \frac{30}{36} - \frac{24}{36} = \frac{6}{36} \text{ de mes} = 5 \text{ días.}$$

88.—3º Caso.—Una persona tiene 12 cuartillos y $\frac{2}{3}$ de aceite, y habiendo entregado 7 cuartillos y $\frac{8}{9}$ se quiere saber qué cantidad de aceite le queda. El problema se resolverá restando los números mixtos

$$\begin{array}{cc} \text{cuartillos} & \text{cuartillos} \\ (12 + \frac{2}{3}) & - (7 + \frac{8}{9}) \end{array}$$

á cuyo fin reemplazaremos: 1º, cada mixto por el quebrado impropio que le es igual, esto es, $12 + \frac{2}{3}$ por $\frac{38}{3}$ y $7 + \frac{8}{9}$ por $\frac{71}{9}$; 2º, cada quebrado impropio por su igual reducido á un común denominador, esto es, $\frac{38}{3}$ por $\frac{342}{27}$, y $\frac{71}{9}$ por $\frac{213}{27}$, y en vez de restar los números mixtos, restaremos los últimos quebrados que son iguales á ellos. Nuestra operación se dispone y ejecuta como sigue:

$$\begin{array}{r} \text{cuartillos} \quad \text{cuartillos} \\ (12 + \frac{2}{3}) - (7 + \frac{8}{9}) = \frac{38}{3} - \frac{71}{9} = \frac{342}{27} - \frac{213}{27} = \frac{129}{27} \\ \frac{129}{27} = 4 + \frac{21}{27} = 4 \text{ cuartillos y } \frac{7}{9}. \end{array}$$

REGLA.—Para restar los números mixtos se reducen los enteros á la forma de quebrados que los acompañan y se restan los quebrados impropios que resulten.

EJEMPLOS.—Una persona tiene 32 años $\frac{2}{3}$ de edad y otra tiene 24 años $\frac{3}{4}$. ¿Cuál es la diferencia entre las dos edades?

$$(32 + \frac{2}{3}) - (24 + \frac{3}{4}) = \frac{98}{3} - \frac{99}{4} = \frac{392}{12} - \frac{297}{12}$$

$$\frac{392}{12} - \frac{297}{12} = \frac{95}{12} = 7 \text{ años } 11 \text{ meses.}$$

En una bodega habia 42 cargas $\frac{1}{3}$, y habiéndose sacado 20 cargas $\frac{6}{8}$ se quiere saber cuánto ha quedado.

$$(42 + \frac{1}{3}) - (20 + \frac{6}{8}) = \frac{127}{3} - \frac{166}{8} = \frac{1016}{24} - \frac{498}{24}$$

$$\frac{1016}{24} - \frac{498}{24} = \frac{518}{24} = 21 \text{ cargas } \frac{7}{12}$$

Multiplicación de los quebrados.

89.—CASOS DE LA MULTIPLICACIÓN DE LOS QUEBRADOS.—En esta operación se presentan tres casos: 1º, multiplicar un quebrado por un entero, y reciprocamente; 2º, multiplicar un quebrado por otro, y 3º, multiplicar un mixto por otro.

90.—REGLAS PARA MULTIPLICAR LAS FRACCIONES.—Se quiere determinar cuánto valdrán 7 varas á razón de $\frac{3}{4}$ \$ la vara.

Para obtener el resultado tendremos que multiplicar el quebrado $\frac{3}{4}$ por 7; pero como hemos visto (70) que un quebrado se multiplica multiplicando su numerador, tendremos:

$$3\$ \times 7^v = \frac{21}{4} = 5\$ + \frac{1}{4}, \text{ valor de 7 varas.}$$

Reciprocamente si buscamos el valor de $\frac{5}{3}$ de vara á 6\$ la vara, tendremos que multiplicar estos dos números, y como el orden de los factores no altera el producto, tendremos:

$$6\$ \times \frac{5}{3}^v = \frac{30}{3} = 10\$ + \frac{0}{3}, \text{ valor de } \frac{5}{3} \text{ de vara.}$$

1º. Caso.—REGLA.—Para multiplicar un quebrado por un entero y reciprocamente, se multiplica el numerador por el entero, y al producto se le da por denominador el del quebrado.

EJEMPLOS.—¿Cuánto se le ha de pagar á un peón que gana 5 reales diarios, habiendo trabajado $\frac{3}{4}$ de día?

$$5 \times \frac{3}{4} = \frac{15}{4} = 3 + \frac{3}{4} \text{ reales.}$$

¿Cuántas leguas recorrerá una locomotora en $\frac{5}{6}$ de hora, andando 8 leguas por hora?

á cuyo fin reemplazaremos: 1º, cada mixto por el quebrado impropio que le es igual, esto es, $12 + \frac{2}{3}$ por $\frac{38}{3}$ y $7 + \frac{8}{9}$ por $\frac{71}{9}$; 2º, cada quebrado impropio por su igual reducido á un común denominador, esto es, $\frac{38}{3}$ por $\frac{342}{27}$, y $\frac{71}{9}$ por $\frac{213}{27}$, y en vez de restar los números mixtos, restaremos los últimos quebrados que son iguales á ellos. Nuestra operación se dispone y ejecuta como sigue:

$$\begin{array}{r} \text{cuartillos} \quad \text{cuartillos} \\ (12 + \frac{2}{3}) - (7 + \frac{8}{9}) = \frac{38}{3} - \frac{71}{9} = \frac{342}{27} - \frac{213}{27} = \frac{129}{27} \\ \frac{129}{27} = 4 + \frac{21}{27} = 4 \text{ cuartillos y } \frac{7}{9}. \end{array}$$

REGLA.—Para restar los números mixtos se reducen los enteros á la forma de quebrados que los acompañan y se restan los quebrados impropios que resulten.

EJEMPLOS.—Una persona tiene 32 años $\frac{2}{3}$ de edad y otra tiene 24 años $\frac{3}{4}$. ¿Cuál es la diferencia entre las dos edades?

$$(32 + \frac{2}{3}) - (24 + \frac{3}{4}) = \frac{98}{3} - \frac{99}{4} = \frac{392}{12} - \frac{297}{12}$$

$$\frac{392}{12} - \frac{297}{12} = \frac{95}{12} = 7 \text{ años } 11 \text{ meses.}$$

En una bodega habia 42 cargas $\frac{1}{3}$, y habiéndose sacado 20 cargas $\frac{6}{8}$ se quiere saber cuánto ha quedado.

$$(42 + \frac{1}{3}) - (20 + \frac{6}{8}) = \frac{127}{3} - \frac{166}{8} = \frac{1016}{24} - \frac{498}{24}$$

$$\frac{1016}{24} - \frac{498}{24} = \frac{518}{24} = 21 \text{ cargas } \frac{7}{12}$$

Multiplicación de los quebrados.

89.—CASOS DE LA MULTIPLICACIÓN DE LOS QUEBRADOS.—En esta operación se presentan tres casos: 1º, multiplicar un quebrado por un entero, y reciprocamente; 2º, multiplicar un quebrado por otro, y 3º, multiplicar un mixto por otro.

90.—REGLAS PARA MULTIPLICAR LAS FRACCIONES.—Se quiere determinar cuánto valdrán 7 varas á razón de $\frac{3}{4}$ \$ la vara.

Para obtener el resultado tendremos que multiplicar el quebrado $\frac{3}{4}$ por 7; pero como hemos visto (70) que un quebrado se multiplica multiplicando su numerador, tendremos:

$$3\$ \times 7^v = \frac{21}{4} = 5\$ + \frac{1}{4}, \text{ valor de 7 varas.}$$

Reciprocamente si buscamos el valor de $\frac{5}{3}$ de vara á 6\$ la vara, tendremos que multiplicar estos dos números, y como el orden de los factores no altera el producto, tendremos:

$$6\$ \times \frac{5}{3}^v = \frac{30}{3} = 10\$ + \frac{0}{3}, \text{ valor de } \frac{5}{3} \text{ de vara.}$$

1º. Caso.—REGLA.—Para multiplicar un quebrado por un entero y reciprocamente, se multiplica el numerador por el entero, y al producto se le da por denominador el del quebrado.

EJEMPLOS.—¿Cuánto se le ha de pagar á un peón que gana 5 reales diarios, habiendo trabajado $\frac{3}{4}$ de día?

$$5 \times \frac{3}{4} = \frac{15}{4} = 3 + \frac{3}{4} \text{ reales.}$$

¿Cuántas leguas recorrerá una locomotora en $\frac{5}{6}$ de hora, andando 8 leguas por hora?

$$\frac{5}{6} \times 8 = \frac{40}{6} = 6 \text{ leguas } \frac{2}{3}$$

Se quiere determinar cuánto valdrán $\frac{7}{8}$ de vara á razón de $\frac{3}{4}$ de peso la vara. Acabamos de ver que á $\frac{3}{4}$ \$ valen 7 varas, $\frac{21}{4}$. Esto es

$$\frac{3}{4} \$ \times 7 = \frac{3 \times 7}{4} \$$$

pero como no buscamos el valor de 7 varas, sino el de $\frac{7}{8}$ de vara, número 8 veces menor que 7, el producto verdadero será 8 veces menor que $\frac{3 \times 7}{4}$. Ahora bien,

como para hacer este quebrado 8 veces menor se tiene que multiplicar su denominador por 8, (70, 2º) el resultado que buscamos será:

$$\frac{3}{4} \$ \times \frac{7}{8} = \frac{3 \times 7}{4 \times 8} = \frac{21}{32} \$$$

luego para multiplicar los quebrados se deben multiplicar numerador por numerador, y denominador por denominador.

2º Caso.—REGLA.—Para multiplicar un quebrado por otro, se multiplica numerador por numerador, y denominador por denominador.

EJEMPLOS.—¿Cuánto valen $\frac{2}{3}$ de una carga de cal á razón de $\frac{6}{8}$ de peso la carga?

$$\frac{6}{8} \times \frac{2}{3} = \frac{12}{24} = 0\$ - 4 \text{ reales.}$$

¿Cuánto costarán $\frac{7}{12}$ de carga á razón de $\frac{4}{6}$ de peso la carga?

$$\frac{4}{6} \times \frac{7}{12} = \frac{28}{72} = 3\frac{1}{3} \text{ reales.}$$

Se quiere determinar cuánto hay que pagarle á un artesano que ha trabajado 6 días y $\frac{1}{2}$, ganando 3 pe-

sos y $\frac{5}{8}$ por cada día. El problema se resolvería multiplicando los números mixtos:

$$\begin{array}{cc} \text{pesos.} & \text{días.} \\ (3 + \frac{5}{8}) \times (6 + \frac{1}{2}) \end{array}$$

pero en vez de formar el producto con estos números lo haremos con sus iguales, con los quebrados impropios que resultan de la incorporación de los enteros con los quebrados. Así:

$$(3 + \frac{5}{8}) \times (6 + \frac{1}{2}) = \frac{29}{8} \times \frac{13}{2} = \frac{377}{16} = 23\$ + \frac{9}{16}$$

al artesano se le deben pagar 23 pesos y $\frac{9}{16}$ de peso.

3er. Caso.—REGLA.—Para multiplicar números mixtos por mixtos, se reducen los enteros á la forma de quebrados que los acompañan, y se multiplican los quebrados impropios que resulten.

EJEMPLOS.—¿Cuánto costarán 16 varas y $\frac{2}{3}$ de alfombra á razón de 2 pesos $\frac{3}{8}$ la vara?

$$(2 + \frac{3}{8}) \times (16 + \frac{2}{3}) = \frac{19}{8} \times \frac{50}{3} = \frac{950}{24}$$

valuando el quebrado $\frac{950}{24} = 39\$, 4 \text{ rs.}, 5\frac{5}{6} \text{ tlacos.}$

¿Cuántos cajones de arena se consumirán en una obra de 8 y $\frac{1}{3}$ metros cúbicos, entrando 2 cajones y $\frac{1}{2}$ en cada metro cúbico?

$$(2 + \frac{1}{2}) \times (8 + \frac{1}{3}) = \frac{5}{2} \times \frac{25}{3} = \frac{125}{6} = 20\frac{5}{6} \text{ cajones.}$$

91.—Debemos hacer observar que el producto de dos quebrados propios, es menor que cualquiera de sus factores. La razón es, que cuando el multiplicador es la unidad; el producto es igual al multiplicando; y que cuando disminuye uno de los factores, el producto disminuye igualmente.

División de los quebrados.

92.—CASOS DE LA DIVISIÓN DE LOS QUEBRADOS.—En esta operación se presentan cuatro casos: 1º, *dividir un quebrado por un entero*; 2º, *dividir un entero por un quebrado*; 3º, *dividir un quebrado por otro*; y 4º, *dividir un mixto por otro*.

93.—REGLAS PARA DIVIDIR LAS FRACCIONES.—Se quieren dividir $\frac{5}{6}$ de vara en tres partes iguales y determinar el largo de cada una de ellas. Nuestro problema está reducido á dividir $\frac{5}{6}$ por 3, esto es, á buscar un número 3 veces menor que $\frac{5}{6}$, y como para hacer un quebrado menor basta multiplicar su denominador, (70) nuestra operación se ejecutará como sigue:

$$\frac{5}{6} \div 3 = \frac{5}{6 \times 3} = \frac{5}{18} \text{ de vara.}$$

tal será la magnitud de cada una de las tres partes de $\frac{5}{6}$.

1º. Caso.—REGLA.—*Para dividir un quebrado por un entero, se multiplicará el denominador por el entero, y se dejará al resultado por numerador el del quebrado.*

EJEMPLOS.—Teniendo que repartir $\frac{2}{3}$ de una carga de harina entre 6 hombres ¿cuánto le tocará á cada uno?

$$\frac{2}{3} \div 6 = \frac{2}{18} = \frac{1}{9} \text{ carga.}$$

Para fraccionar $\frac{5}{6}$ de caballería entre 4 colonos ¿cuánto se le dará á cada uno?

$$\frac{5}{6} \div 4 = \frac{5}{24} \text{ de caballería.}$$

Habiendo pagado 7 pesos por $\frac{2}{3}$ de vara se quiere determinar el precio de la vara. Para ello tendremos que dividir 7 por $\frac{2}{3}$. Si hubiéramos pagado 7 pesos por 2 varas, el precio de la vara sería $\frac{7}{2}$ \$, esto es:

$$7\$ \div 2 = \frac{7}{2}\$$$

pero como el divisor no es 2, sino $\frac{2}{3}$, cuyo valor es 3 veces menor que 2, y como siendo menor el divisor el cociente deberá resultar 3 veces mayor; para determinar el cociente que buscamos tendremos que hacer el quebrado $\frac{7}{2}$ tres veces mayor, lo cual se consigue multiplicando su numerador por 3, esto es:

$$7\$ \div \frac{2}{3} = \frac{7 \times 3}{2} = \frac{21}{2}\$ = 10\$ + \frac{1}{2}$$

2º Caso.—REGLA.—*Para dividir un entero por un quebrado, se considerarán invertidos los términos del quebrado divisor, y se multiplicará el entero por el quebrado invertido.*

EJEMPLOS.—Habiendo pagado 18\$ por $\frac{3}{4}$ de quintal de cobre, se quiere saber el precio del quintal.

$$18 \div \frac{3}{4} = \frac{72}{3} = 24\$$$

Por $\frac{5}{6}$ de caballería se han pagado 960\$ ¿cuál es el valor de la caballería?

$$960 \div \frac{5}{6} = \frac{5760}{5} = 1152\$$$

Habiendo pagado $\frac{7}{8}$ \$ por $\frac{2}{3}$ de vara se quiere conocer el precio de la vara. Para esto tendremos que dividir $\frac{7}{8}$ entre $\frac{2}{3}$, y para deducir la regla racionamos como sigue:

$$\frac{7}{8} \div 2 = \frac{7}{8 \times 2}$$

pero como el divisor verdadero $\frac{2}{3}$ es tres veces menor que 2, el cociente que buscamos será 3 veces mayor que el cociente hallado $\frac{7}{8 \times 2}$, y como para hacer un quebrado 3 veces mayor basta multiplicar su numerador, tendremos:

$$\frac{7}{8} \div \frac{2}{3} = \frac{7 \times 3}{8 \times 2} = \frac{21}{16}$$

tal sería el valor de la vara, y la manera con que lo hemos determinado es el fundamento de la siguiente regla:

3^{er}. Caso.—REGLA.—Para dividir un quebrado por otro, se consideran invertidos los términos del quebrado divisor, y en seguida se multiplican numerador por numerador y denominador por denominador.

EJEMPLOS.—Habiendo recorrido $\frac{7}{8}$ de legua en $\frac{3}{4}$ de hora, ¿cuántas leguas se recorrerán en una hora?

$$\frac{7}{8} \div \frac{3}{4} = \frac{28}{24} = 1 \text{ legua } \frac{1}{6}$$

Habiendo consumido $\frac{2}{3}$ de cal en $\frac{6}{8}$ de metro cúbico de mampostería, se quiere saber ¿qué cantidad de cal entrará en un metro cúbico?

$$\frac{2}{3} \div \frac{6}{8} = \frac{16}{18} = \frac{8}{9} \text{ de carga.}$$

A un artesano que gana 2 pesos $\frac{1}{4}$ por cada día que trabaja, se le han pagado 7 pesos y $\frac{7}{8}$. Se quiere saber ¿cuántos días ha trabajado? Para determinarlo tendremos que dividir los mixtos

$$\frac{\text{pesos.}}{(7 + \frac{7}{8})} \div \frac{\text{pesos.}}{(2 + \frac{1}{4})}$$

pero en lugar de dividir estos números, dividiremos

sus iguales, los quebrados impropios que resultan de incorporar los enteros con los quebrados. Así

$$\left(7 + \frac{7}{8}\right) \div \left(2 + \frac{1}{4}\right) = \frac{63}{8} \div \frac{9}{4} = \frac{63 \times 4}{8 \times 9} = \frac{252}{72} \text{ días.}$$

y como $\frac{252}{72} = 3 + \frac{36}{72} = 3 + \frac{1}{2}$, resulta que el artesano trabajó 3 días y medio.

4^o Caso.—REGLA.—Para dividir números mixtos por mixtos se reducirán los enteros a la forma de quebrados que los acompañan, y en seguida se dividirán los quebrados impropios que resulten.

EJEMPLOS.—Habiendo pagado 25\$ $\frac{6}{8}$ por 2 varas $\frac{2}{3}$ ¿cuál es el valor de la vara?

$$\left(25 + \frac{6}{8}\right) \div \left(2 + \frac{2}{3}\right) = \frac{206}{8} \div \frac{8}{3} = \frac{618}{64}$$

valuando el quebrado $\frac{618}{64} = 9\$ - 5 \text{ rs.} - 2 \text{ tlacos.}$

Habiendo caminado 6 leguas $\frac{2}{5}$ en $\frac{3}{4}$ de hora, ¿cuántas leguas se habrían recorrido por hora?

$$\left(6 + \frac{2}{5}\right) \div \frac{3}{4} = \frac{32}{5} \div \frac{3}{4} = \frac{128}{15}$$

$$\frac{128}{15} = 8 \text{ leguas } \frac{8}{15}$$

94.—Siempre que el divisor es un quebrado propio, el cociente es mayor que el dividendo. La razón es, que cuando el divisor es la unidad, el cociente es el dividendo, y que cuando el divisor disminuye el cociente aumenta; luego siempre que el divisor sea menor que la unidad, el cociente será mayor que el dividendo.

PREGUNTAS.—¿Cuántos casos se presentan en la adición de los quebrados? 78.—¿Cómo se suma un entero con un quebra-

do, y cómo un quebrado con un entero? 80.—¿Cómo se suman quebrados con quebrados? 81.—¿Cómo se suman los números mixtos? 84.—¿Cuántos casos se presentan en la sustracción de los quebrados? 85.—¿Cómo se resta un quebrado de un entero? 86.—¿Cómo se resta un quebrado de otro? 87.—¿Cómo se restan los números mixtos? 88.—¿Cuántos casos se presentan en la multiplicación de los quebrados? 89.—¿Cómo se multiplica un quebrado por un entero, y cómo un entero por un quebrado? 90.—¿Cómo se multiplica un quebrado por otro?—¿Cómo se multiplican los números mixtos?—El producto de los quebrados propios, ¿es mayor ó menor que los factores? 91.—¿Cuántos casos se presentan en la división de los quebrados? 92.—¿Cómo se divide un quebrado por un entero? 93.—¿Cómo se divide un entero por un quebrado?—¿Cómo se divide un quebrado por otro?—¿Cómo se dividen los números mixtos?—El cociente de los quebrados propios, ¿es mayor ó menor que el dividendo? 94.

PROBLEMAS.

- 74.—Sumar $4\frac{5}{9}$; id. $\frac{3}{7}+9$.
 75.—Sumar $\frac{7}{8}+\frac{3}{4}+\frac{2}{6}$.
 76.—Determinar el valor de la suma de $\frac{1}{2}\$ + \frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \frac{7}{8}$ en pesos, reales y tlacos.
 77.—Sumar $3\frac{1}{2}+5\frac{2}{3}+1\frac{3}{4}$.
 78.—Sumar 2 varas $+7\frac{1}{3}+4\frac{2}{5}+6\frac{3}{4}$ y determinar el valor de la suma en varas, pies y pulgadas.
 79.—Restar $9-\frac{5}{8}$; id. $12-\frac{7}{9}$.
 80.—Encontrar la diferencia entre $\frac{3}{4}-\frac{5}{7}$.
 81.—Restar $2\frac{1}{2}-\frac{4}{5}$; id. $3\frac{2}{3}-2\frac{5}{6}$.
 82.—¿Cuánto valen 5 varas á $\frac{3}{4}\$$ la vara?
 83.—¿Cuánto valen $\frac{4}{5}$ de arroba á 6\$ la arroba?
 84.—Multiplicar $\frac{4}{11}\times\frac{8}{9}$; id. $\frac{3}{4}\times\frac{5}{9}$.
 85.—¿Cuánto valen $32\frac{2}{3}$ varas á $2\frac{3}{8}\$$ la vara?
 86.—¿Cuánto valen $15\frac{4}{5}$ quintales á $9\frac{5}{8}\$$ quintal?
 87.—Dividir $\frac{4}{8}$ entre 6; id. $\frac{2}{3}$ entre 4.
 88.—Dividir 4 entre $\frac{5}{6}$; id. 8 entre $\frac{2}{5}$.
 89.—Habiéndose pagado 6\$ por $\frac{4}{5}$ de vara ¿cuánto vale la vara?

- 90.—Dividir $\frac{5}{17}+\frac{3}{14}$.
 91.—Habiéndose pagado $12\frac{1}{16}\$$ por $\frac{3}{8}$ de arroba ¿cuál es el valor de la arroba?
 92.—¿Cuál es el valor del quintal, habiéndose pagado $12\frac{6}{8}\$$ por $\frac{3}{4}$ de quintal?
 93.—Dividir $25\frac{7}{8}$ entre $12\frac{1}{7}$.
 94.—Habiéndose pagado $26\frac{4}{6}\$$ por $4\frac{1}{2}$ varas ¿cuál es el valor de la vara?
 95.—Una persona tiene un retazo de alfombra de $10\frac{2}{3}$ varas, otro de $5\frac{1}{3}$ varas y otro de 12 varas. Después de haberlos unido alfombró un cuarto en el cual empleó $16\frac{1}{2}$ varas. Se quiere saber ¿cuántas varas le quedan, y cuánto deberá recibir vendiendo este resto á $11\frac{1}{4}\$$ la vara?
 96.—Un comerciante tenía en un barril $2\frac{1}{2}$ jarras de aguardiente; en otro $6\frac{3}{4}$, las reune y les agrega $\frac{6}{8}$ de jarra de agua. La mezcla total la vende á 3\$ jarra. ¿Cuánto se le ha de pagar?
 97.—A una fuente le caben $1207\frac{1}{2}$ cuartillos y se quiere saber en qué tiempo se llenará con un chorro que produce $3\frac{1}{2}$ cuartillos cada minuto.
 98.—Entre dos ciudades hay 28 leguas $\frac{2}{3}$, se quiere saber ¿cuántas leguas deberán andarse por hora para llegar en $6\frac{1}{2}$ horas?

FRACCIONES DECIMALES.

Sistema de numeración y operaciones fundamentales.

95.—Para representar las cantidades menores que la unidad y los números mixtos, así como para facilitar la ejecución de las operaciones, se han hecho di-

do, y cómo un quebrado con un entero? 80.—¿Cómo se suman quebrados con quebrados? 81.—¿Cómo se suman los números mixtos? 84.—¿Cuántos casos se presentan en la sustracción de los quebrados? 85.—¿Cómo se resta un quebrado de un entero? 86.—¿Cómo se resta un quebrado de otro? 87.—¿Cómo se restan los números mixtos? 88.—¿Cuántos casos se presentan en la multiplicación de los quebrados? 89.—¿Cómo se multiplica un quebrado por un entero, y cómo un entero por un quebrado? 90.—¿Cómo se multiplica un quebrado por otro?—¿Cómo se multiplican los números mixtos?—El producto de los quebrados propios, ¿es mayor ó menor que los factores? 91.—¿Cuántos casos se presentan en la división de los quebrados? 92.—¿Cómo se divide un quebrado por un entero? 93.—¿Cómo se divide un entero por un quebrado?—¿Cómo se divide un quebrado por otro?—¿Cómo se dividen los números mixtos?—El cociente de los quebrados propios, ¿es mayor ó menor que el dividendo? 94.

PROBLEMAS.

- 74.—Sumar $4\frac{5}{9}$; id. $\frac{3}{7}+9$.
 75.—Sumar $\frac{7}{8}+\frac{3}{4}+\frac{2}{6}$.
 76.—Determinar el valor de la suma de $\frac{1}{2}\$ + \frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \frac{7}{8}$ en pesos, reales y tlacos.
 77.—Sumar $3\frac{1}{2}+5\frac{2}{3}+1\frac{3}{4}$.
 78.—Sumar 2 varas $+7\frac{1}{3}+4\frac{2}{5}+6\frac{3}{4}$ y determinar el valor de la suma en varas, pies y pulgadas.
 79.—Restar $9-\frac{5}{8}$; id. $12-\frac{7}{9}$.
 80.—Encontrar la diferencia entre $\frac{3}{4}-\frac{5}{7}$.
 81.—Restar $2\frac{1}{2}-\frac{4}{5}$; id. $3\frac{2}{3}-2\frac{5}{6}$.
 82.—¿Cuánto valen 5 varas á $\frac{3}{4}\$$ la vara?
 83.—¿Cuánto valen $\frac{4}{5}$ de arroba á 6\$ la arroba?
 84.—Multiplicar $\frac{4}{11}\times\frac{8}{9}$; id. $\frac{3}{4}\times\frac{5}{9}$.
 85.—¿Cuánto valen $32\frac{2}{3}$ varas á $2\frac{3}{8}\$$ la vara?
 86.—¿Cuánto valen $15\frac{4}{5}$ quintales á $9\frac{5}{8}\$$ quintal?
 87.—Dividir $\frac{4}{8}$ entre 6; id. $\frac{2}{3}$ entre 4.
 88.—Dividir 4 entre $\frac{5}{6}$; id. 8 entre $\frac{2}{5}$.
 89.—Habiéndose pagado 6\$ por $\frac{4}{5}$ de vara ¿cuánto vale la vara?

- 90.—Dividir $\frac{5}{17}+\frac{3}{14}$.
 91.—Habiéndose pagado $12\frac{1}{16}\$$ por $\frac{3}{8}$ de arroba ¿cuál es el valor de la arroba?
 92.—¿Cuál es el valor del quintal, habiéndose pagado $12\frac{6}{8}\$$ por $\frac{3}{4}$ de quintal?
 93.—Dividir $25\frac{7}{8}$ entre $12\frac{1}{7}$.
 94.—Habiéndose pagado $26\frac{4}{6}\$$ por $4\frac{1}{2}$ varas ¿cuál es el valor de la vara?
 95.—Una persona tiene un retazo de alfombra de $10\frac{2}{3}$ varas, otro de $5\frac{1}{3}$ varas y otro de 12 varas. Después de haberlos unido alfombró un cuarto en el cual empleó $16\frac{1}{2}$ varas. Se quiere saber ¿cuántas varas le quedan, y cuánto deberá recibir vendiendo este resto á $11\frac{1}{4}\$$ la vara?
 96.—Un comerciante tenía en un barril $2\frac{1}{2}$ jarras de aguardiente; en otro $6\frac{3}{4}$, las reune y les agrega $\frac{6}{8}$ de jarra de agua. La mezcla total la vende á 3\$ jarra. ¿Cuánto se le ha de pagar?
 97.—A una fuente le caben $1207\frac{1}{2}$ cuartillos y se quiere saber en qué tiempo se llenará con un chorro que produce $3\frac{1}{2}$ cuartillos cada minuto.
 98.—Entre dos ciudades hay 28 leguas $\frac{2}{3}$, se quiere saber ¿cuántas leguas deberán andarse por hora para llegar en $6\frac{1}{2}$ horas?

FRACCIONES DECIMALES.

Sistema de numeración y operaciones fundamentales.

95.—Para representar las cantidades menores que la unidad y los números mixtos, así como para facilitar la ejecución de las operaciones, se han hecho di-

versas convenciones en armonía con las de nuestro sistema de numeración. En los quebrados comunes hemos visto que el denominador puede ser cualquier número 2, 3, ... y que este siempre se escribe debajo del numerador. En las fracciones decimales los denominadores no pueden ser sino los números 10, 100, 1,000, 10,000, etc., esto es, la unidad seguida de ceros, y este denominador no se escribe, sino que siempre está sobrentendido y es la unidad seguida de tantos ceros como cifras tenga la parte decimal. Por ejemplo, en lugar de $\frac{1}{2}$ se pone su igual $\frac{5}{10}$; pero se escribe 0·5 y se lee 5 décimos; por $\frac{1}{5}$ se pone $\frac{2}{10}$, se escribe 0·2 y se lee 2 décimos; por $\frac{1}{4}$ se pone su igual $\frac{25}{100}$, que se escribe 0·25 y se lee 25 centésimos.

Se llama decimal, á todo número fraccionario cuyo denominador es tácito é igual á la unidad seguida de tantos ceros, como subdivisiones tenga la cantidad.

96.—SISTEMA DE NUMERACIÓN.—Así como una centena se divide en 10 decenas, y una decena se divide en 10 unidades, del mismo modo, para expresar en el sistema decimal las partes de la unidad, esta se considera dividida en 10 partes que se llaman *décimas*; cada *décima* se considera subdividida en 10 partes que se llaman *centésimas*; cada *centésima* se subdivide en 10 partes que se llaman *milésimas*; y continuando la subdivisión siempre en 10 partes se obtienen las *diezmilésimas*, las *cientmilésimas*, las *millonésimas*, las *diezmillonésimas*, etc.

Ahora bien, así como en los enteros, las cifras escritas á la derecha de las centenas representan un orden de unidades 10 veces menor que las centenas, y así como un guarismo puesto á la derecha de las decenas representa unidades, que son 10 veces menores que las decenas; del mismo modo se ha convenido en escribir las *décimas* á la derecha de las unidades, las

centésimas á la derecha de las *décimas*, las *milésimas* á la derecha de las *centésimas* y así sucesivamente; fijándose el valor relativo de las decimales bajo la misma base que en los enteros, de que un guarismo cualquiera represente partes de la unidad 10 veces menores que las del guarismo de la izquierda, y para separar y distinguir la parte entera de la parte fraccionaria se coloca entre los enteros y las decimales una coma. Cuando no hay enteros se representan por un cero, poniendo en seguida la coma y luego las decimales. Para evitar las confusiones á que da lugar el empleo de la coma, puesta en la parte de abajo, con el signo ortográfico y con la que se usa para separar los períodos de los millares, es preferible colocar entre los enteros y las decimales la coma ó un punto en la parte superior de los números.

Por ejemplo, 5 décimas, se escribe 0·5 ó 0.5 y se lee cero enteros 5 décimas.

4 enteros 25 centésimas, se escribe: 4.25.

Además, es preciso en la parte decimal reemplazar con ceros los órdenes de que carece, unas veces entre las cifras significativas de las decimales, y otras entre las unidades de los enteros y las decimales. En el primer caso las decimales se escriben como los enteros; por ejemplo: 305 milésimas, que carecen de centésimas, se escriben 0.305. En el segundo caso se escriben después de la coma y antes de los guarismos que representan la decimal, tantos ceros como son necesarios para darle á la decimal el valor que le corresponde, valor que depende del denominador sobrentendido, esto es, de las cifras que hay después de la coma. Por ejemplo, si se quiere escribir 0 unidades 145 diezmilésimas, por el orden de la subdivisión se infiere

que el denominador ha de ser 10,000, como 145 se escribe con 3 guarismos y 10,000 tiene 4 ceros, será necesario poner un cero después de la coma y antes de 145, así: 0'0145. En efecto, el 1er. cero indica unidades, el que está después de la coma décimas, el 1 centésimas, el 4 milésimas y el 5 diezmilésimas.

$$0'0145 = \frac{145}{10000}$$

97. Para escribir con facilidad la parte decimal los alumnos deben fijarse en que para indicar

décimas	debe haber después de la coma 1 cifra.
centésimas	" " " 2 "
milésimas	" " " 3 "
diezmilésimas	" " " 4 "
diezmilésimas	" " " 5 "
millonésimas	" " " 6 "
diezmillonésimas	" " " 7 "

98.—REGLA PARA ESCRIBIR LAS CANTIDADES DECIMALES.

—Se escribirá primero la parte entera representándola por un cero cuando no la haya, y en seguida se pone en la parte superior una coma. Para escribir la parte decimal, se examina con cuántos guarismos debe representarse escrita como entero y de cuántos ceros ha de estar seguida la unidad en el denominador tácito; se ponen después de la coma los ceros necesarios para que la parte decimal conste de tantos guarismos como ceros deben seguir á la unidad en el denominador tácito; y por último, se escribe la parte decimal como si fuera entero.

Por ejemplo:

0 unidades 24 diezmilésimas, se escribe 0'0024
 28 pesos 3 millonésimas " \$28'000003
 3 enteros 3804 diezmillonésimas " 3'0003804

99.—REGLA PARA LEER LAS CANTIDADES DECIMALES.—Se

lee primero la parte entera diciendo unidades, ó la especie de éstas, al llegar á la coma, y en seguida se lee la parte decimal como si fuera entero, teniendo cuidado de nombrar al fin el orden de la última subdivisión.

Por ejemplo:

0'809 se lee 0 unidades 809 milésimas.

\$28'0030098 se lee 28 pesos 30,098 diezmillonésimas

4'030069 se lee 4 quintales 30,069 millonésimas.

100.—PRINCIPIOS FUNDAMENTALES.—Siendo las decimales fracciones cuyo denominador sobrentendido es la unidad seguida de tantos ceros como cifras tiene la parte decimal, el valor de ésta dependerá, como en los quebrados, de la relación que exista entre los valores del numerador y del denominador, y la variación en alguno de estos términos producirá en las decimales el mismo resultado que en los quebrados.

1º Cuando en una decimal se corre la coma hácia la derecha, su valor se hace diez veces mayor por cada lugar que se cambia la coma, esto es, se multiplica por 10, por 100, por 1,000, etc.

Sea la decimal 3'125, corriendo la coma dos lugares á la derecha, se transformará en 312'5 cuya cantidad será 100 veces mayor que la primera. En efecto:

$$3'125 = \frac{3125}{1000}$$

$$312'5 = \frac{3125}{10}$$

Cuando se ha corrido la coma dos lugares á la derecha en la decimal 3'125 el denominador del quebrado $\frac{3125}{1000}$ se ha dividido por 100; pero como esto hace

que su valor sea 100 veces mayor, el mismo resultado producirá en la decimal que es igual al quebrado.

2° Cuando en una decimal se corre la coma hacia la izquierda, su valor se hace diez veces menor por cada lugar que se corra la coma, esto es, se divide por 10, por 100, por 1000, etc.

Sea 0'87, corriendo la coma dos lugares hacia la izquierda, la cantidad se transforma en 0'0087 que es 100 veces menor. En efecto, siendo

$$0'87 = \frac{87}{100} \text{ y } 0'0087 = \frac{87}{10,000}$$

el correr la coma a la izquierda equivale a multiplicar el denominador tácito por 10, 100, 1,000, etc., y por lo mismo a dividir por estos números la decimal.

3° El valor de una decimal no se altera cuando se le agregan ceros a la derecha, ni cuando se le quitan.

$$\begin{array}{l} \text{Por ejemplo: } 0'375 = 0'3750 \text{ y } 0'580 = 0'58 \\ \quad \quad \quad \frac{375}{1000} = \frac{3750}{10,000} \quad \quad \frac{5800}{10,000} = \frac{58}{100} \end{array}$$

Basta observar los quebrados a que son respectivamente iguales las decimales para comprender que agregar ceros a la derecha equivale a multiplicar los dos términos de un quebrado por un mismo número, y que cuando se suprimen equivale a dividirlos por un mismo número, cuyas operaciones, como se sabe (71) no alteran el valor de un quebrado.

El 1er. principio sirve para multiplicar una decimal por la unidad seguida de ceros; el 2° para dividirla por los mismos números, y el 3° sirve para reducirlas a un común denominador y para simplificarlas.

101.—REDUCCIÓN A UN COMÚN DENOMINADOR Y SIMPLIFICACIÓN DE LAS DECIMALES.—Para reducir las decimales a

un común denominador, se hace que todas tengan igual número de cifras decimales, agregando a la derecha de la que tenga menos cifras, los ceros que sean necesarios.

Sean las decimales 0'34 0'5 0'405

reducidas a común denominador 0'340 0'500 0'405 en forma de quebrados

$$\frac{340}{1000} \quad \frac{500}{1000} \quad \frac{405}{1000}$$

se ve que las decimales no han cambiado de valor y que todas tienen el mismo denominador.

La reducción a un común denominador es una operación preparatoria para ejecutar la suma, la resta y la división, y sirve para conocer con facilidad entre varias cantidades decimales cuál es la mayor.

Si tenemos, por ejemplo, las decimales 0'6 y 0'485 no es fácil conocer a primera vista cuál es la mayor; pero reducidas a un común denominador, esto es, transformadas ambas en milésimas,

$$0'6 = 0'600 \text{ y } 0'485$$

desde luego se ve que la primera 0'6 > 0'485.

Cuando una decimal termina en ceros, se puede simplificar suprimiendo estos.

Esta operación equivale a dividir los dos términos de un quebrado por el mismo número, lo cual no altera su valor.

$$\text{La fracción decimal } 0'5800 = \frac{5800}{10,000}$$

$$\text{simplificada es } 0'58 = \frac{58}{100}$$

Como los quebrados $\frac{5800}{10000}$ y $\frac{58}{100}$ son iguales, lo serán también las decimales equivalentes a ellos.

La simplificación de las decimales facilita la ejecución de las operaciones y evita errores en los cálculos.

102.—REDUCCIÓN DE LOS QUEBRADOS A DECIMALES.—Sea por reducir $\frac{7}{8}$ á decimal. La operación se ejecuta como sigue: dividiendo 7 entre 8, el cociente es 0 enteros, que se escribe, poniendo después de él una coma en la parte superior. En seguida, para reducir 7 á décimas le agregamos un cero y dividiendo 70 entre 8 se obtiene como cociente 8 décimas y por resta 6, á la cual se agrega un cero para reducirla á centésimas. Dividiendo 60 entre 8 se obtiene por cociente 7 centésimas y por resta 4, á la que se agrega un cero para reducirla á milésimas. Dividiendo 40 entre 8 se obtiene el cociente exacto 5 milésimas, resultando que

$$\frac{7}{8} = 0.875$$

Esta operación es la valuación de un quebrado en décimas, centésimas, etc. La transformación de un quebrado en decimal rara vez conduce á un resultado exacto, pero por el procedimiento indicado puede obtenerse la aproximación que se necesite en la práctica.

REGLA.—Para reducir un quebrado á decimal, se divide el numerador por el denominador, agregando al numerador tantos ceros como cifras se quiere que tenga la decimal.

En el caso de que la operación no resulte exacta debe continuarse la división hasta obtener en el cociente la cifra del orden siguiente al de la aproximación que quiera obtenerse, y si la cifra que va á despreciarse es 5 ó un guarismo mayor que 5, se agregará una unidad á la cifra que la antecede, que se dejará sin variación cuando la cifra que va á suprimirse sea menor que 5.

Por ejemplo, si queremos convertir en decimal el quebrado $\frac{35}{64}$ llevando la aproximación hasta las milésimas, como al llegar á este orden quedan como resta 56 milésimas, llevaremos la aproximación hasta las diez milésimas, y como se obtiene que $\frac{35}{64} = 0.5468$ debiendo limitar el valor de la decimal en las milésimas, siendo la cifra 8 que se va á despreciar mayor que 5, para tener el resultado con más aproximación le agregaremos una unidad al guarismo 6 de las milésimas, y tendremos

$$\frac{35}{64} = 0.547.$$

103.—TRANSFORMACION DE LAS DECIMALES EN QUEBRADOS.—Si queremos convertir la decimal 0.375 en quebrado, prescindiendo de la coma formaremos el número 375, al cual le daremos por denominador la unidad seguida de tantos ceros como cifras tenga la parte decimal. Así,

$$0.375 = \frac{375}{1000}$$

lo cual equivale á indicar el denominador tácito. En seguida debe examinarse si puede simplificarse el quebrado. Dividiendo sucesivamente por 5 los términos del quebrado $\frac{375}{1000}$ se obtiene $\frac{3}{8}$, y por tanto

$$0.375 = \frac{3}{8}$$

REGLA.—Para transformar una decimal en quebrado, al número que resulta, prescindiendo de la coma, se le pone por denominador la unidad seguida de tantos ceros como cifras haya después de la coma, y si es posible se simplifica el quebrado.

Si se quiere convertir en quebrado la cantidad decimal 8'74562 limitando la aproximación hasta las centésimas; teniendo que despreciar la parte 0'00562, el valor será más aproximado agregando una unidad á la cifra 4 que representa centésimas, y así, deberemos transformar en quebrado la cantidad 8'75.

$$8'75 = \frac{875}{100} = \frac{35}{4} = 8 + \frac{3}{4}$$

Por tanto, limitando la aproximación hasta las centésimas $8'74562 = 8 + \frac{3}{4}$.

PREGUNTAS.—¿A qué se llama fracción decimal? 95.—¿Cuáles son las subdivisiones de la unidad en el sistema decimal? 96.—¿Cómo se distinguen los enteros de las decimales?—¿Cuántas cifras debe haber después de la coma en una cantidad decimal que expresa centésimas.—¿Cuántas en la que expresa milonésimas, cuántas en la que expresa diezmilésimas, etc? 97.—¿Cuál es la regla para escribir las decimales? 98.—¿Cuál es la regla para leer las cantidades decimales? 99.—¿Qué sucede con el valor de una decimal cuando se corre la coma hacia la derecha, y qué variación sufre cuando se corre para la izquierda? 100.—¿Qué sucede con el valor de una decimal cuando se le agregan ó quitan ceros á la derecha?—¿Cómo se reducen las decimales á un común denominador? 101.—¿Cuándo y cómo puede simplificarse una decimal?—¿Cómo se reduce un quebrado á decimal? 102.—¿Cómo se transforma una decimal en quebrado? 103.

PROBLEMAS.

99.—Escribir 4 pesos 52 milésimas; id. 49 cienmilésimas; id. 2 arrobas 309 millonésimas.

100.—Escribir 22004 diezmillonésimas; id. 506 quintales 39 diezmillésimas.

101.—Leer las cantidades 0'86; 2'345; 0'40408.

102.—Leer las cantidades 23'025; 218'003804; ^{metros}
_{libras} 14'0908.

103.—Hacer 1000 veces mayor la cantidad 45'1089.

104.—Multiplicar por 100 la decimal 0'805.

105.—Dividir por 10 la cantidad 516'24.

106.—Reducir á milésimas las cantidades \$14'82 y \$7'5.

107.—Simplificar las decimales ^{varas} 44'8800 y ^{varas} 151'806000.

108.—Dividir por 1000 las decimales 0'45 y 0'029.

109.—Multiplicar por 100 las decimales 0'00785 y 0'0008.

110.—Reducir á un común denominador las decimales 22'45; 8'048; 17'7, y 0'20.

111.—¿Cuál de las decimales 0'32; 0'4; 0'3092, y 0'109 es la mayor?

112.—¿Cuál de las decimales 0'085; 0'0046; 0'05846 y 0'00062 es la menor?

113.—Transformar los quebrados $\frac{8}{25}$, $\frac{2}{5}$ y $\frac{206}{625}$ en decimales.

114.—Convertir los quebrados $\frac{7}{13}$ y $\frac{5}{11}$ en decimales, limitando la aproximación hasta las milésimas.

115.—Convertir en quebrados las decimales 0'625 y 15'125.

116.—Transformar en decimal el número mixto $7 + \frac{5}{16}$.

117.—Convertir en quebrados las decimales... 0'545404 y 0'34984 limitando la aproximación hasta las milésimas.

118.—Convertir en quebrados las decimales 8'55
 y 14'875.

Adición de las decimales.

104.—Sea por sumar las siguientes cantidades:

varas.
 325'305
 45'620
 377'730
 78'446
 262'220
 16'800

1700'021

Las cantidades se escriben unas debajo de otras teniendo cuidado de que queden en una misma columna vertical las cifras que indican el mismo orden, así como la coma; esto es, se escriben las unidades debajo de las unidades, las décimas debajo de las décimas, las centésimas debajo de las centésimas, etc. Se hace que todas las decimales tengan igual número de cifras agregando ceros á la derecha de las que tengan menos; se tira una línea, y por ser el sistema de numeración de las decimales el mismo que el de los enteros, se ejecuta la operación como en estos y se pone en el resultado la coma en la misma columna de los sumandos.

REGLA.—Para sumar las decimales, se escriben las cantidades unas debajo de otras, lo mismo que en los enteros, teniendo cuidado de que la coma se corresponda en una columna así como las unidades del mismo orden. Se agregan ceros á la derecha de las decimales que tienen menos cifras, y se ejecuta la suma como si los sumandos

fueran enteros; poniendo en la suma la coma en la misma columna que ocupa en los sumandos.

La prueba se ejecuta lo mismo que en la suma de los enteros.

EJEMPLOS.—Un carro lleva cuatro bultos; el 1º pesa 47'825; el 2º pesa 145'25, el 3º pesa 28'5 y el 4º pesa 39'552. ¿Cuál será la carga total?

kilo
 47'825
 145'250
 28'500
 39'552

Total de la carga 261'127

Una persona que ha hecho ventas por valor de 250'48, de 28'02, de 550, de 36'48 y de 356'56, quiere saber á cuánto asciende el importe total de sus ventas.

250'48
 28'02
 550'00
 36'48
 356'56

Total. \$ 1221'54

Sustracción de las decimales.

105.—Sean por restar las siguientes cantidades:

345'037200
 — 89'380465
 255'656735

Siendo el sistema de numeración de las decimales el mismo que el de los enteros, la resta se ejecutará conforme á la siguiente:

REGLA.—Para restar las cantidades decimales, se escribe el sustraendo debajo del minuendo, teniendo cuidado de que tanto la coma, como las unidades de igual orden queden en la misma columna. Se agregan ceros á la derecha de la decimal que tenga menos cifras, y se ejecuta la resta como si las cantidades fueran números enteros; poniendo la coma en el resultado en la misma columna.

La prueba se ejecuta como la de la resta de los números enteros.

EJEMPLOS.—Una persona que necesita pagar 22845.²⁵ tiene en caja 16792.⁸⁵. ¿Cuánto le falta?

$$\begin{array}{r} 22845.25 \\ -16792.85 \\ \hline \text{Le faltan } 6052.40 \end{array}$$

En una bodega hay 18609.² de tabaco, y habiendo vendido 8890.⁷⁶⁵ se quiere saber qué existencia queda.

$$\begin{array}{r} 18609.200 \\ -8890.765 \\ \hline \text{La existencia era de } 9718.435 \text{ arrobas.} \end{array}$$

Multiplicación de las decimales.

106.—Sea por multiplicar las siguientes cantidades.

cargas	3'075	varas	0'000456
á	\$ 48'75		0'023
	15375		1368
	21525		912
	24600		\$ 0'000010438
	12300		
	\$ 149'90625		

La operación se ejecutará por medio de la siguiente:

REGLA.—Para multiplicar las decimales se hace abstracción de la coma, se ejecuta la operación lo mismo que si las cantidades fueran números enteros, y en el producto se separan tantas decimales como hay en ambos factores juntos, contando de derecha á izquierda.

Refiriéndonos al primer ejemplo, como al prescindir de la coma en el factor 3'075 hacemos el producto 1000 veces mayor, y como al prescindir de la coma en el factor 48'75 hacemos el producto otras 100 veces mayor, para restituírle el valor que le corresponde deberemos separar de derecha á izquierda 3 + 2 = 5 cifras; que es lo que prescribe la regla.

En el segundo ejemplo se ve que cuando en el producto hay menos cifras significativas que decimales en ambos factores, es necesario antes de poner la coma agregar en el producto á la izquierda ceros para igualar el número de decimales que hay en ambos factores.

La prueba de la multiplicación de las decimales, las abreviaciones correspondientes á los casos, y sus usos, son los mismos que se han explicado en la multiplicación de enteros.

EJEMPLOS.—Una persona compra 25'58 metros á 2'56 el metro. ¿Cuánto tiene que pagar?

	25'58
	3'56
	15348
	12790
	7674
Hay que pagar	91'0648

Un obrero ha colocado en un día 125'85 metros de rieles; se quiere saber cuántos metros hará en $6\frac{1}{2}$ días?

	125'85
	6'5
	62925
	75510
Colocará: metros	818'025

División de las decimales.

107.—Habiendo pagado 345'22 por 44'035 ^{varas} se quiere saber el valor de la vara. Con el objeto de poder prescindir de las decimales, y ejecutar la operación como si los números fueran enteros, haremos que el dividendo y el divisor tengan igual número de cifras decimales, agregando un 0 á la derecha del dividendo, lo cual no altera el valor de este término (100), y en seguida prescindiendo de la coma en el dividendo y en el divisor ejecutaremos la división como si los números fueran enteros; pues al hacer abstracción de la coma en el dividendo haremos el cociente 1000 veces ma-

345'220	44'035
36 9750	7'839
1 74700	
425950	
29635	

yor; pero como al prescindir de la coma en el divisor lo hacemos igual número de veces menor, habrá compensación y el cociente será el verdadero. Después de haber obtenido el cociente para indicar que representa unidades, ponemos la coma, y para valuar la resta 36975 en décimas le agregamos un cero y obtenemos el cociente 8 décimas. Agregando sucesivamente, un cero á las restas, vamos determinando las centésimas, las milésimas, etc.

Sea por dividir 0'0345 entre 0'87; como el divisor tiene menos cifras decimales le agregamos dos ceros. Dividiendo 345 entre 8700, se

0'034500	0'8700
84000	0'039
5700	

obtiene 0 unidades. Agregamos un cero y dividiendo 3450 entre 8700 se obtiene 0 décimas. Agregamos otro 0 y dividiendo 34500 entre 8700 su obtienen 3 centésimas, y por el mismo procedimiento se obtienen 9 milésimas y 5700 de resta que podría convertirse en diez milésimas si fuera necesario.

REGLA.—Para dividir las cantidades decimales, se hará que tanto el dividendo como el divisor tengan igual número de cifras decimales, para lo cual se agregarán los ceros que sean necesarios á la derecha del término que tenga menos cifras decimales. En seguida, haciendo abstracción de la coma, se dividirán como si fueran enteros.

Puede suceder que el cociente tenga ó no parte entera. Cuando se puede dividir el dividendo por el divisor, el cociente constará de enteros, y para determinar su parte decimal se irá agregando un cero á cada resta y se dividirá por el divisor.

Cuando, después de igualadas las cifras decimales y de prescindir de la coma, el dividendo sea menor que el divisor, se pondrá un cero en el cociente y la coma para

indicar que no consta de enteros; comenzándose desde luego la aproximación por decimales.

La prueba de la división de decimales, las abreviaciones correspondientes á los casos y sus usos son los mismos que los de la división de enteros.

EJEMPLOS.—Habiendo pagado 1395'75 por 62'5 quintales de cobre, ¿cuál es el valor del quintal con un centavo de aproximación?

$$\begin{array}{r} 1395'75 \\ 14575 \\ 20750 \\ 20000 \\ 1250 \end{array} \quad \begin{array}{l} | 62'50 \\ 22'33\text{\$ valor del quintal.} \end{array}$$

A una fuente, cuya capacidad es 3845'5 ^{litros}, le entran 0'161 por minuto, ¿en cuánto tiempo se llenará?

$$\begin{array}{r} 3845'500 \\ 625 \\ 1425 \\ 1370 \\ 820 \\ 15 \end{array} \quad \begin{array}{l} | 0'161 \\ 23885 \text{ minutos} \end{array}$$

23885 minutos = 16 días, 14 horas, 5 minutos.

PREGUNTAS.—¿Cuál es la regla para sumar las decimales? 104.—¿Cuál es la regla para restar las decimales? 105.—¿Cómo se multiplican las decimales? 106.—¿Cómo se ejecuta la división de las decimales? 107.

PROBLEMAS.

119.—Sumar $\$5648'075 + 92'08 + 57'75 + 504\$ + 68'5 + 42'027$.

120.—Ejecutar la sustracción $16403'2 - 4875'45$.

121.—Restar $\$11772 - 2691'75$.

122.—¿Cuánto valen @45'735 á \$92'87 la arroba?

123.—¿Cuánto valen 0'075 onzas á \$0'55 la onza?

124.—Habiéndose pagado \$54'84 por 21'3 varas se quiere saber ¿cuál es el valor de la vara con $\frac{1}{100}$ de aproximación?

125.—Siendo 0'838 metros la longitud de 36 pulgadas ¿cuál será la longitud de una pulgada limitando la aproximación á las milésimas?

126.—Teniendo el metro 39'371 de pulgadas; queremos saber cuántas pulgadas tendrán 5'25 de metro.

127.—Un fardo pesó 225'58 de quintales ingleses. Se quiere saber cuál será su peso expresado en kilogramos, sabiendo que un quintal equivale á 50'78 de kilogramo.

128.—La distancia entre dos lugares es de 42'75 de millas. Se quiere saber cuál será esta distancia expresada en kilómetros, en el concepto de que una milla tiene 1'6093 de kilómetro.

Sistema métrico-decimal y medidas antiguas.

108.—Se llama sistema métrico-decimal al conjunto de convenciones hechas para establecer y uniformar las unidades de pesos y medidas en Francia, y que otras Naciones, como México, han adoptado.

109.—DIVERSAS UNIDADES DEL SISTEMA MÉTRICO-DECIMAL.—Consideraremos: 1º Unidades lineales; 2º Unidades de superficie; 3º Unidades de volumen; 4º Unidades de peso, y 5º Unidades de moneda.

110.—UNIDADES LINEALES.—Se ha tomado como base el metro, cuya longitud es igual á la diezmillonésima parte del cuadrante del meridiano terrestre.

El metro es igual á 1 vara 193 milésimos.

Para formar los nombres de las unidades superiores, se ha convenido en anteponer las raíces griegas deca, hecto, kilo y miria, al nombre de la unidad que se considera. Deca, significa diez; hecto, cien; kilo, mil; y miria, diez mil.

Para denominar las unidades inferiores, se antepone al nombre de la unidad uno de los radicales latinos deci, centi y mili, para expresar partes ó unidades diez, cien, mil veces menores que la unidad principal.

Las unidades mayores que el metro, son:

el decámetro	= 10	metros
el hectómetro	= 100	"
el kilómetro	= 1000	"
y el miriámetro.	= 10.000	"

Las unidades lineales menores que el metro son:

el decímetro	= la décima parte del metro,
el centímetro	= la centésima " "
y el milímetro	= la milésima " "

Se ve, pues, que las unidades lineales van siendo sucesivamente diez veces mayores que su inmediata menor, y siendo esta convención la adoptada para los números enteros y las decimales, naturalmente la escritura de las unidades lineales del sistema métrico, así como las operaciones que con ellas tengamos que ejecutar, estarán sujetas á las reglas dadas para el cálculo de los enteros y de las decimales. Para reducir unidades lineales de especie mayor á menor, bastará correr la coma á la derecha; y á la izquierda en caso contrario.

Así, pues, $3745^m 876^k = 3745876$
 $3745^m 876^k = 3745876$ milímetros.

UNIDADES DE SUPERFICIE.—La base de las unidades superficiales es la ara, que es la superficie de un cuadrado que tiene diez metros por cada lado.

Las unidades superficiales mayores que la ara, son: la hectara, que es la superficie de un cuadrado que tiene 100 metros por lado, y

la miriara, que es la superficie de un cuadrado que tiene 1000 metros por lado.

Las unidades superficiales menores que la ara, son: la centiara ó metro cuadrado, que es la superficie de un cuadrado de un metro por lado.

el decímetro cuadrado, que es la superficie de un cuadrado de un decímetro por lado,

el centímetro cuadrado, que es la superficie de un cuadrado de un centímetro por lado,

y el milímetro cuadrado, que es la superficie de un cuadrado de un milímetro por lado.

Las relaciones entre estas diversas unidades son las siguientes:

La miriara	= 100 hectaras,
la hectara	= 100 aras,
la ara	= 100 centiaras,

la centiara ó metro cuadrado=100 decímetros cuadrados.

el decímetro cuadrado=100 centímetros cuadrados,
el centímetro cuadrado=100 milímetros cuadrados.

En consecuencia, las unidades superficiales van siendo 100 veces mayores que la unidad inmediata menor, por lo cual, *para reducir unidades superficiales de especie menor á su inmediata mayor, es preciso correr la coma dos lugares á la izquierda, y á la derecha en caso contrario.* Por ejemplo:

aras	hectaras	miriaras
32584'7961	=325'8479 61	=3'25847961
32584'7961	=325 8479'61	metros cuadrados.

Es de la mayor importancia, en la valuación de las superficies, no confundir las fracciones y los múltiplos del metro cuadrado con la superficie de los cuadrados formados sobre las fracciones ó sobre los múltiplos del metro lineal. Asi, por ejemplo, acabamos de ver que un metro cuadrado es igual á 100 decímetros cuadrados, mientras que el mismo metro cuadrado solo tiene 10 *décimas de metro cuadrado*. Igualmente, un decámetro cuadrado es igual á 100 y no á 10 metros cuadrados.

111.—UNIDADES DE VOLUMEN.—Estas son: el *esterio* y el *litro*. El *esterio ó metro cúbico*, es el volumen de un cubo de un metro por lado.

El *litro* es el volumen de un cubo que tiene un decímetro por lado.

Los múltiplos del *esterio* no son usados.

Las unidades de volumen menores que el *esterio* son:

el *decímetro cúbico ó litro*, que, como acabamos de decir, es el volumen de un cubo que tiene un decímetro por lado,

el *centímetro cúbico*, que es el volumen de un cubo que tiene un centímetro por lado y
el *milímetro cúbico*, que es el volumen de un cubo que tiene un milímetro por lado.

La relación entre estas unidades es la siguiente:

El *esterio ó metro cúbico*=1000 litros
el *litro ó decímetro cúbico* =1000 centímetros cúbicos.
el *centímetro cúbico* =1000 milímetros cúbicos.

Por tanto, las unidades de volumen van siendo 1000 veces mayores que la que se deduce de la unidad lineal inmediata menor, por lo que, *para reducir las de especie mayor á su inmediata menor, habrá que correr la coma tres lugares á la derecha, y á la izquierda en caso contrario.*

m.cub.	lit.
32'465179	=32465'179
32'465179	=32465 179 cent. cub.

Al estimar el volumen es preciso tener cuidado de no confundir las fracciones y los múltiplos del metro cúbico con los volúmenes formados sobre las fracciones ó sobre los múltiplos del metro lineal. En efecto, un metro cúbico es mil veces mayor que un decímetro cúbico. Un decámetro cúbico es igual á 1000, y no á 10 metros cúbicos.

Las unidades de volumen mayores que el *litro* son.®

el decálitro = 10 litros,
el hectólitro = 100 „
el kilólitro = 1000 „

Las unidades de volumen menores que el *litro* son:

el decilitro = la décima parte del litro,
 el centilitro = la centésima „ „
 el mililitro = la milésima „ „

UNIDADES DE PESO.—En el sistema métrico-decimal la unidad de peso es el gramo, que es el peso de un centímetro cúbico de agua. (*)

Supuesto que 1 litro = 1000 centímetros cúbicos, y que un metro cúbico = 1000 litros, tendremos que:
 un centímetro cúbico de agua pesa un gramo;
 un litro ó decímetro cúbico de agua pesa un kilogramo, y
 un metro cúbico de agua pesa 1000 kilogramos, ó una tonelada métrica.

Las unidades de peso mayores que el gramo son:

el decágramo	=	10 gramos,
el hectógramo	=	100 „
el kilógramo	=	1000 „
el quintal métrico	=	100 kilogramos.
y la tonelada métrica	=	1000 „

Las unidades menores que el gramo son:

el decígramo	=	la décima parte del gramo,
el centígramo	=	la centésima „ „
el milígramo	=	la milésima „ „

UNIDADES DE MONEDA.—En el sistema métrico se ha tomado por unidad el franco, cuya moneda pesa cinco gramos, estando compuesta de $4\frac{1}{2}$ gramos de plata y $\frac{1}{2}$ gramo de cobre; y tiene 23 milímetros de diámetro.

112.—MEDIDAS ANTIGUAS DE MÉXICO.—1º La unidad de longitud es la vara, igual á 838 milímetros.

(*) La agua debe ser pura y pesarse á la temperatura de 4º á la cual tiene mayor densidad.

Como unidad mayor que la vara, se tiene la legua = 5000 varas.

La vara se divide en 3 pies; el pie en 12 pulgadas; la pulgada en 12 líneas, y la línea en 12 puntos.

La vara también se divide en 4 cuartas ó palmos y la cuarta en 12 dedos. Por último, suele dividirse la vara en 6 sesmas.

2º Para las superficies pequeñas se usa la vara cuadrada = 702 milésimos de metro cuadrado. La vara cuadrada tiene 9 pies cuadrados, y el pie cuadrado 144 pulgadas cuadradas.

Para las superficies de gran extensión, las unidades que más comunmente se usan, son: el sitio de ganado mayor, el criadero de ganado mayor, la caballería de tierra y la fanega de sembradura. El sitio de ganado mayor es la superficie de un cuadrado de 5,000 varas por lado, y se divide en 4 criaderos de ganado mayor. La caballería de tierra es la superficie de un rectángulo de 1104 varas de largo por 552 de ancho, y se subdivide en 12 fanegas de sembradura.

3º Para el volumen de los cuerpos se usa la vara cúbica = 588 milésimos de metro cúbico; el cuartillo para la medida de líquidos; y la fanega para la de los granos.

La vara cúbica tiene 27 pies cúbicos; y el pie cúbico 1728 pulgadas cúbicas.

El barril tiene 9 jarras, y la jarra 18 cuartillos. El cuartillo contiene una libra de agua.

La carga se divide en 2 fanegas, la fanega en 2 medias, la media en 2 cuartillas, la cuartilla en 3 almudes y el almud en 4 cuartillos. Este cuartillo, que se hace de madera para la medida del maíz, tiene 150 pulgadas cúbicas de capacidad.

4º Para la medida del agua de los manantiales se

usa el buey, que se divide en 48 surcos, el surco en 8 naranjas, la naranja en 8 reales ó limones, y el limón en 18 pajas. La paja produce en un minuto un cuartillo de agua de á una libra.

5° Para estimar el peso se usa la libra=460 gramos, que es lo que pesa el agua que le cabe á un cuartillo.

Para los usos comunes, el quintal se divide en 4 arrobas, la arroba en 25 libras, la libra en 16 onzas, la onza en 16 adarmes, el adarme en 3 tomines y el tomin en 12 granos.

Para pesar la plata, la libra tiene 2 marcos, el marco 8 onzas, la onza 8 ochavas, lo ochava 6 tomines y el tomin 12 granos.

Para pesar el oro, la libra se divide en 2 marcos, el marco en 50 castellanos, el castellano en 8 tomines y el tomin en 12 granos.

Para pesar las sustancias medicinales, la libra se divide en 16 onzas, la onza en 8 dracmas, la dracma en 3 escrúpulos y el escrúpulo en 24 granos.

6° La unidad de moneda en México es el peso. La moneda de plata que vale un peso pesa $\frac{1}{17}$ de libra, y contiene $\frac{5}{7}$ de plata pura y $\frac{2}{7}$ de cobre. La moneda de oro que vale un peso, pesa $\frac{1}{17}$ de onza y contiene $\frac{7}{8}$ de oro puro y $\frac{1}{8}$ de cobre.

En las antiguas monedas de oro la onza tenía 8 escudos, y el escudo 2 pesos. Actualmente se acuñan monedas con el valor de \$20, 10, 5, 2½ y 1 peso.

El peso se dividía en 8 reales, y el real en 8 tlacos ó 12 granos. Hoy se divide el peso en 100 centavos.

7° Para medir el tiempo la unidad es el día.

El siglo tiene 100 años, el año 12 meses, el mes se computa en el comercio compuesto de 30 días, el día

tiene 24 horas, la hora 60 minutos y el minuto 60 segundos.

Un lustro tiene 5 años. El año cuando no es bisiesto tiene 365 días, y cuando lo es, consta de 366 días.

REGLA.—Para reducir las unidades usadas en México de especie mayor á menor, es necesario multiplicarlas por el número de subdivisiones de que consta la mayor. Por ejemplo, si queremos reducir 325 pesos á reales multiplicaremos 325 por 8, que son los reales de que consta 1 peso; y tendremos que

\$
325=2600 reales. Si estos reales queremos reducirlos á tlacos, los multiplicaremos por 8, por constar el real de 8 tlacos, y tendremos que 2600 reales.....=20800 tlacos.

Por el contrario, si tratamos de reducir unidades de especie menor á mayor, las dividiremos por el número de unidades que forman una mayor. Por ejemplo, si queremos reducir 266 pulgadas á pies, dividiremos 266 por 12, que es el número de pulgadas que forman un pie, y tendremos 266 pulgadas=22 pies 2 pulgadas. Si queremos reducir 22 pies á varas dividiremos 22 por 3, que es el número de pies que forman una vara, resultando 22 pies=7 varas 1 pie. Se ve, pues, que 266 pulgadas=7 varas, 1 pie, 2 pulgadas.

113.—CORRESPONDENCIA ENTRE LAS UNIDADES ANTIGUAS Y LAS DEL SISTEMA MÉTRICO.—A continuación vamos á poner las equivalencias entre las unidades principales del sistema métrico y las antiguas de México, limitando la aproximación hasta las milésimas, las cuales podrán retener en la memoria los alumnos, ó consultarlas para convertir los valores expresados en un sistema, en unidades del otro.

1 metro = 1,193

1 vara cúbica = 0·588 metro cúbico
1 carga = 1·816 hectolitros
1 pala = 0·460 litro por minuto

1 metro cúbico=1'699 vara cúbica.
1 hectolitro=0'551 cargas.
1 litro agua por minuto = 2'173 pajas.

1 kilógramo = 2'173 libras.

1	peso = 5'431	francos valor intrins.	plata	1 fr.=0'184	peso valor intrins.	plata.
1	peso= 5'100	"	"	1 fr.=0'196	"	" oro.

PREGUNTAS.—108. ¿A qué se llama sistema métrico decimal?—110. ¿Cuál es la unidad que sirve de base á este sistema?—¿A qué cosa es igual la longitud del metro?—¿Por medio de qué voces griegas se forman los nombres de las unidades superiores?—110. ¿Cuáles son las unidades lineales mayores que el metro, y qué valor tiene cada una de ellas?—¿Cuáles son las unidades menores que el metro, y qué valores tienen?—¿Cómo se reducen las unidades lineales de especie mayor á menor y viceversa?—¿Cuál es la unidad principal de superficial?—¿Qué cosa es la ara?—¿Cuáles son las unidades mayores y cuáles las menores que el ara?—¿Cómo van siendo entre sí los valores de las unidades superficiales del sistema métrico?—¿Cómo se reducen las unidades superficiales de especie mayor á menor y vice-versa?—111. ¿Cuáles son las unidades principales de volumen?—¿Qué cosa es el esterio?—¿Qué cosa es el litro?—¿Cuáles son las unidades de volumen menores que el esterio?—¿Qué relacion tienen entre sí las unidades de volumen inmediatas?—¿Cómo se reducen las unidades de volumen de especie mayor á menor y vice-versa?—¿Cuáles son los nombres y valores de las unidades mayores y menores que el litro?—¿Cuál es la unidad principal de peso en el sistema métrico?—¿Qué cosa es el gramo?—¿Cuánto pesa un centímetro cúbico de agua?—¿Cuánto pesa un litro de agua?—¿Cuánto pesa un metro cúbico de agua?—¿Cuáles son los nombres y valores de las unidades mayores y menores que el gramo?—¿Cuál es la unidad principal de moneda en Francia?—¿Cuánto pesa el franco y cuánto contiene de plata y cuánto de cobre?—112. 1º En las medidas usadas antiguamente en México, ¿cuál es la unidad de longitud?—¿En qué se divide la legua?—¿Cuáles son las subdivisiones de la vara?—2º ¿Cuántos pies cuadrados tiene la vara cuadrada?—¿Cuántas pulgadas tiene el pie cuadrado?—¿Cuáles son las unidades más usadas para estimar las superficies de gran extensión?—¿Qué cosa es el sitio de ganado mayor y en cuántos criaderos se divide?—¿Qué cosa es la caballería de tierra?—¿Cuántas fanegas tiene la caballería?—3º ¿Cuáles son las unidades de volumen usadas comunmente en México?—¿Cuáles son las subdivisiones de la vara cúbica?—¿Cuáles son las subdivisiones del barril?—¿Cuáles son las subdivisiones de la carga para medir los granos?—4º ¿Cuáles son las subdivisiones del buey?—5º ¿Cuáles son las subdivisiones del quintal para los usos comunes?—¿Cuáles son las subdivisiones de la libra para pesar la plata?—¿Cuáles son las subdivisiones de la libra para pesar el oro?—¿Cuáles son las subdivisiones de la libra para pesar las sustancias medicinales?—6º ¿Cuál es la unidad de moneda en Méxi-

co?—¿Cuánto debe pesar el peso y de qué se compone?—¿Cuáles son las subdivisiones del peso?—7º ¿Cuál es la unidad del tiempo?—¿Cuáles son las unidades mayores que el día?—¿Cuáles son las subdivisiones del día?—113. ¿A cuántos milímetros es igual una vara?—¿A cuántas varas equivale un metro?—¿Una libra á cuántos gramos equivale?—¿Un kilogramo á cuántas libras equivale?

PROBLEMAS.

129. Reducir 325'475 á centímetros: id. 385'04 á milímetros.
130. Reducir 32580 metros á kilómetros: id. 6367400 metros á miriámetros.
131. Reducir 82704 centímetros á metros: id. 2304'5 milímetros á metros.
132. Reducir 18748'5 miriáras á aras: id. 4082'5 miriáras á hectaras.
133. Reducir 26'784 aras á decímetros cuadrados: id. 47'285 metros cuadrados á centímetros cuadrados.
134. Reducir 63825'42 metros cuadrados á hectaras: id. 268472 hectaras á miriáras.
135. Reducir 79'5 metros cúbicos á litros: id. 3'25 metros cúbicos á centímetros cúbicos.
136. Reducir 845'49 metros cúbicos á decímetros cúbicos: id. 8406 litros á metros cúbicos.
137. Reducir 4309406 centímetros cúbicos á metros cúbicos: id. 9604786 milímetros cúbicos á litros.
138. Reducir 405'46 hectólitos á litros: id. 9634'5 litros á kilólitos.
139. ¿Cuánto pesarán 625 centímetros cúbicos de agua? ¿Cuánto pesarán 82'5 decímetros cúbicos de agua?
140. ¿Cuánto pesarán 25 metros cúbicos de agua? ¿Cuánto pesarán 18'5 litros de agua?

141. Reducir 76'84 kilogramos á gramos: id. 29'15 kilogramos á hectogramos.
142. Reducir 26'405 toneladas á quintales métricos: id. 16405 gramos á kilogramos.
143. Reducir 2945 hectogramos á kilogramos: id. 17890645 gramos á toneladas.
144. Reducir 35 varas á pulgadas: id. 11088 líneas á varas.
145. Reducir 17 varas á dedos.
146. Reducir 25 varas cuadradas á pies cuadradas: id. 15 varas cuadradas á pulgadas cuadradas.
147. ¿A cuántas fanegas de sembradura equivalen 28 caballerías?
148. Reducir 15 varas cúbicas á pies cúbicos: id. 116 pies cúbicos á pulgadas cúbicas.
149. Reducir 21 barriles á cuartillos.
150. ¿Cuántos cuartillos tienen 28 cargas de maíz?
151. Reducir 3 bueyes á pajas.
152. Reducir 20 quintales 2 arrobas á onzas: id. 15 libras comunes 9 onzas á granos.
153. Reducir 60 marcos 4 onzas de plata á granos.
154. Reducir 16 marcos 40 castellanos de oro á granos.
155. Reducir 5 libras medicinales á escrúpulos: id. 6 dracmas á granos.
156. Reducir 25 pesos á tlacos: id. 6 pesos 4 reales á tlacos.
157. Reducir 16 años á meses: id. 3 días á segundos.
158. Convertir 5000 varas en metros: id. 260'5 varas en metros.
159. Convertir 4190 metros en varas: id. 16'065 metros en varas.
160. Convertir 265'25 varas cuadradas en metros cuadrados.

161. Convertir 16'860 metros cuadrados en varas cuadradas.

162. Convertir 27'75 caballerías en hectaras.

163. Convertir 16000 hectaras en caballerías.

164. Convertir 625'5 varas cúbicas en metros cúbicos.

165. Convertir 504'50 metros cúbicos en varas cúbicas.

166. Convertir 28'5 cargas de maíz en hectolitros.

167. Convertir 200 hectolitros en cargas.

168. Convertir 112'5 libras en kilogramos.

169. Convertir 2066'45 kilogramos en libras.

170. Determinar el valor intrínseco de 21000 pesos en francos de plata.

171. Determinar el valor intrínseco de 14600 francos de plata en pesos.

Cálculo de los números complejos.

DEFINICIONES, PRINCIPIOS Y OPERACIONES FUNDAMENTALES.

114.—Se llaman números complejos ó denominados, los que se componen de varias partes expresadas como números enteros y concretos de diferentes especies, pero relativas todas á una misma clase de unidades. Por ejemplo: 3 varas, 2 pies, 5 pulgadas. La vara, los pies y las pulgadas son partes que están expresadas en la forma de enteros de diferentes especies, pero relativas todas á la clase de unidades lineales.

115. SUBDIVISIONES, NOMENCLATURA Y ESCRITURA.—El sistema de subdivisiones usado en el cálculo de los núme-

ros complejos ó denominados, así como la nomenclatura, es convencional, y en consecuencia, varía en razón de las necesidades y de las costumbres de los pueblos. En el párrafo 112 hemos explicado las unidades usadas en México, su nomenclatura y las subdivisiones de cada una.

En cuanto á la escritura, se indica separadamente cada una de las partes, relativa á la clase de unidad que se considera, como número entero, marcando su especie encima, por medio de un signo convencional ó por alguna abreviatura. Por ejemplo; 728 pesos 6 reales 4 tlacos, se escribe así.

\$ rs tla
728—6—4

En cuanto al número de partes de que consta cada especie de unidades es necesario saberlo de memoria para ejecutar los cálculos correspondientes.

116.—OPERACIONES FUNDAMENTALES.—Las de los números denominados son dos: reducir unidades de especie mayor á menor, y reducir unidades de especie menor á mayor.

La primera operación se ejecuta multiplicando las unidades de especie mayor por el número de unidades menores de que consta una unidad mayor, y agregando á este producto las unidades de su especie.

Por ejemplo: sea por reducir 32 — 2 — 20

Se multiplicarán los quintales por 4 para reducirlos á arrobas, y se le agregará 2 arrobas al producto, siendo 32 quintales 2 arrobas, igual á 130 arrobas. Este número se multiplicará por 25 para reducirlo á libras, y se le agregará 20 libras; siendo 32 quintales, 2 arrobas, 20 libras = 3270 libras.

	qq.	ars.	lbs.
32	—	2	— 20
Se multiplicarán los quintales por 4 para reducirlos á arrobas,	4		
y se le agregará 2 arrobas al producto, siendo 32 quintales 2 arrobas, igual á 130 arrobas.	@	130	
Este número se multiplicará por 25 para reducirlo á libras, y se le agregará 20 libras; siendo 32 quintales, 2 arrobas, 20 libras = 3270 libras.		25	
		650	
		260	
		20	
	lb	3270	

161. Convertir 16'860 metros cuadrados en varas cuadradas.

162. Convertir 27'75 caballerías en hectaras.

163. Convertir 16000 hectaras en caballerías.

164. Convertir 625'5 varas cúbicas en metros cúbicos.

165. Convertir 504'50 metros cúbicos en varas cúbicas.

166. Convertir 28'5 cargas de maíz en hectolitros.

167. Convertir 200 hectolitros en cargas.

168. Convertir 112'5 libras en kilogramos.

169. Convertir 2066'45 kilogramos en libras.

170. Determinar el valor intrínseco de 21000 pesos en francos de plata.

171. Determinar el valor intrínseco de 14600 francos de plata en pesos.

Cálculo de los números complejos.

DEFINICIONES, PRINCIPIOS Y OPERACIONES FUNDAMENTALES.

114.—Se llaman números complejos ó denominados, los que se componen de varias partes expresadas como números enteros y concretos de diferentes especies, pero relativas todas á una misma clase de unidades. Por ejemplo: 3 varas, 2 pies, 5 pulgadas. La vara, los pies y las pulgadas son partes que están expresadas en la forma de enteros de diferentes especies, pero relativas todas á la clase de unidades lineales.

115. SUBDIVISIONES, NOMENCLATURA Y ESCRITURA.—El sistema de subdivisiones usado en el cálculo de los núme-

ros complejos ó denominados, así como la nomenclatura, es convencional, y en consecuencia, varía en razón de las necesidades y de las costumbres de los pueblos. En el párrafo 112 hemos explicado las unidades usadas en México, su nomenclatura y las subdivisiones de cada una.

En cuanto á la escritura, se indica separadamente cada una de las partes, relativa á la clase de unidad que se considera, como número entero, marcando su especie encima, por medio de un signo convencional ó por alguna abreviatura. Por ejemplo; 728 pesos 6 reales 4 tlacos, se escribe así.

\$ rs tla
728—6—4

En cuanto al número de partes de que consta cada especie de unidades es necesario saberlo de memoria para ejecutar los cálculos correspondientes.

116.—OPERACIONES FUNDAMENTALES.—Las de los números denominados son dos: reducir unidades de especie mayor á menor, y reducir unidades de especie menor á mayor.

La primera operación se ejecuta multiplicando las unidades de especie mayor por el número de unidades menores de que consta una unidad mayor, y agregando á este producto las unidades de su especie.

Por ejemplo: sea por reducir 32 — 2 — 20

Se multiplicarán los quintales por 4 para reducirlos á arrobas, y se le agregará 2 arrobas al producto, siendo 32 quintales 2 arrobas, igual á 130 arrobas. Este número se multiplicará por 25 para reducirlo á libras, y se le agregará 20 libras; siendo 32 quintales, 2 arrobas, 20 libras = 3270 libras.

	qq.	ars.	lbs.
	32	2	20
Se multiplicarán los quintales por 4 para reducirlos á arrobas, y se le agregará 2 arrobas al producto, siendo 32 quintales 2 arrobas, igual á 130 arrobas. Este número se multiplicará por 25 para reducirlo á libras, y se le agregará 20 libras; siendo 32 quintales, 2 arrobas, 20 libras = 3270 libras.			

Para reducir unidades de especie menor á mayor, se dividen las unidades menores por el número de que se compone una mayor; el cociente indica el número de unidades mayores, y la resta el de las menores.

Por ejemplo, se quiere reducir á varas 589 pulgadas.

pulg.	589	12		Dividiendo 589
	109	pies 49	3	pulgadas entre 12,
	1	19	16 vs.	se obtienen 49 pies
		1		1 pulgada. Los 49

pies los reduciremos á varas, dividiéndolos por 3, y se obtienen 16 varas y 1 pie.

En definitiva, resulta que:

589 pulgadas = 16 vs. — 1 pie — 1 pulgada.

117.—CONVERSIÓN DE LOS DENOMINADOS EN QUEBRADOS Ó DECIMALES, Y RECÍPROCAMENTE.—Los problemas que frecuentemente se ofrecen entre los números quebrados, decimales y denominados, ya para ejecutar las operaciones, ya para expresar el resultado de ellas en la forma conveniente, son cuatro: 1º Convertir un denominado en quebrado: 2º un quebrado en denominado: 3º un denominado en decimal, y 4º una decimal en denominado.

1º Para convertir un número denominado en quebrado, se reduce á la especie menor y se le pone por denominador el número de unidades menores de que se compone la mayor.

h.	m.	s.
36	48	40
60		
2208		
60		
132520		

Si se quiere convertir en quebrado 36 h.—48 m.—40 s., se reducirán las horas á minutos y estos á segundos, resultando 132520 segundos, á cuyo número se le dará por denominador el número de segundos que tiene una hora, esto es, 3600, y se tendrá:

36 h.—48 m.—40 s. = $\frac{132520}{3600}$ horas.

2º Para convertir un quebrado en denominado, se divide el numerador por el denominador, y si hay resta se valúa (84) en la siguiente subdivisión.

Por ejemplo, si se quiere transformar en denominado el quebrado $\frac{875}{225}$ de barril se ejecutarán las operaciones que constan al lado, y resulta que:

875	325
225	2 bars.-6 jars.-4 cts.
9	
2025	
75	18
600	
1350	
50	

barril bars. js. cs.
 $\frac{875}{225} = 2-6-4\frac{2}{3}$

3º Para convertir un denominado en decimal, se transforma el denominado en quebrado, y en seguida éste en decimal.

Por ejemplo, se quiere convertir en decimal:

8^s—4^{rs}—4^{ts}.

Se convertirá primero en quebrado, resultando igual á $\frac{844}{100}$ \$. En seguida se transforma este quebrado en decimal, resultando igual á \$ 8.5625. Supuesto que el valor del denominado es igual al del quebrado, y el de éste á la decimal, en el caso de que nos ocupamos:

8 ^s —4 ^{rs} —4 ^{ts} = 8.5625	548	64
	360	\$ 8.5625
	400	

4º Para convertir una cantidad decimal en denominado, se tomará la parte entera con su especie, y la parte decimal

160
320
00

se multiplicará por el número de subdivisiones de que conste la unidad á que corresponde, separando en el producto igual número de cifras decimales.

La parte decimal que resulte se multiplicará por el número de subdivisiones de la unidad á que corresponda, y así se continuará la operación hasta llegar á la última subdivisión.

Por ejemplo, si se quiere transformar en número complejo, 135'8675 marcos.

	135'8675
	8
onzas	6'9400
	8
ochavas	7'52
	6
tomines	3'12 × 12
	24
grano	1'44

y por último, 12 centésimas de tomínes las reducimos á granos. Obteniéndose que:

Marcos. Marcas. Onz. Och. Ta. Gr.
135'8675 = 135 — 6 — 7 — 3 — 1'44

PREGUNTAS.—114. ¿A qué se llaman números complejos ó denominados?—115. ¿Cómo se escriben los números denominados?—116. ¿Cómo se reducen las unidades de especie mayor á menor?—¿Cómo se reducen las unidades de especie menor á mayor?—117. 1º ¿Cómo se convierte un denominado en quebrado?—2º ¿Cómo se convierte un quebrado en denominado?—3º ¿Cómo se convierte un denominado en decimal?—4º ¿Cómo se convierte una decimal en denominado?

Problemas.

172.—Reducir á cuartillos 15 cargas, 1 fanega, 1 media, 1 cuartilla, 2 almudes, 2 cuartillos.

173.—Reducir á especie mayor 235332 granos medicinales.

174.—Transformar en quebrado 20 pesos, 4 reales, 4 tlacos.

175.—Transformar en denominado el quebrado $\frac{36}{64}$ libra.

176.—Convertir en decimal 16 varas, 2 pies, 8 pulgadas, 6 líneas.

177.—Convertir en denominado 29'5625 pesos.

178.—Convertir en quebrado 16 surcos, 2 naranjas, 6 limones, 9 pajas.

179.—Convertir en denominado $\frac{35}{6}$ barril.

180.—Convertir en decimal 15 días, 12 horas, 30 minutos.

181.—Convertir en denominado 19'87325 arrobas.

Adición de los denominados.

118.—Por una venta de arroz un comerciante debe recibir \$ 35—2 reales—6 tlacos; por otra de frijol \$ 6—4 reales—4 tlacos, y por otra de cacao \$ 12—5 reales—2 tlacos.—Se quiere conocer el importe total de la venta.

Para determinarlo tendremos que sumar estas cantidades y para hacerlo escribiremos las cantidades unas debajo de las otras colocando en la misma columna las de igual especie, por ser necesario que sean homogéneas las cantidades que se suman.

35\$—2 ^{rs} —6 ^{tl}	12 ^{tl} =1 real y 4 tlacos.
6—4—4	12 ^{rs} =1 peso y 4 reales.
12—5—2	
54—4—4	

Comenzaremos la operación por las unidades de menor especie: los tlacos.—Siendo esta suma de 12

tlacos, la reduciremos á reales dividiéndola por 8, y como 12 tlacos=1 real y 4 tlacos; escribimos 4 debajo de la columna de los tlacos y el real lo retenemos para reunirlo con los números de su especie.— La suma es 12 reales= \$ 1 y 4 reales; escribimos 4 debajo de la columna de los reales y el 1 \$ lo reunimos con los números de su especie, cuya suma resulta ser 54 \$.— La suma total es 54^s—4^{rs}—4^{ts}.

REGLA.—Para sumar los números denominados, se colocan las cantidades unas debajo de otras, lo mismo que en los enteros, teniendo cuidado de poner separadamente cada especie de unidades formando una columna vertical. Se tira una línea horizontal para separar el resultado, y se comienza la suma por las unidades de especie menor; si la suma no consta del número de unidades que componen una mayor, se escribe la suma debajo de la columna de su especie, y en caso contrario, se reduce la suma á la especie inmediatamente mayor, escribiéndose el número de unidades menores que resulten como resta en la división debajo de la columna correspondiente, y se retienen las unidades mayores para reunir las á las de su especie. Con cada clase de unidades se repite la misma operación, y en las de mayor especie se escribe la suma tal como sale.

Sean por sumar las siguientes cantidades:

cargas.	fs.	alms.	cts.
345	— 1	— 9	— 3
200	— 0	— 10	— 2
175	— 1	— 8	— 2
875	— 1	— 6	— 1
100	— 0	— 9	— 2
50	— 1	— 3	— 1
90	— 1	— 2	— 2
162	— 1	— 11	— 3
2002	— 1	— 2	— 0

16 cts. = 4 alms.

62 alms. = 5 fs. — 2 alms.

11 fs. = 5 cgs. — 1 fs.

Se comienza la operación sumando los cuartillos, lo cual da 16 cuartillos; y como un almud se compone de 4 cuartillos, dividiendo 16 por 4, se obtiene 4 almudes, que se retienen para reunirlos á la columna de los almudes, y se pone 0 en la de los cuartillos.

Sumando los cuatro almudes retenidos con los de la columna correspondiente, se obtienen 62 almudes que se reducen á fanegas dividiendo por 12, de lo que resultan 2 almudes que se escriben debajo, y 5 fanegas que se agregan á la columna correspondiente. La suma de las fanegas da 11, que reducidas á cargas, dan 5 cargas y 1 fanega. Este último número se escribe en la columna que le corresponde, y las 5 cargas se agregan á las unidades de esta especie, cuya suma es 2002 cargas y la suma total es:

2002 cargas, 1 fanega, 2 almudes.

La prueba de esta operación se hace como la de los enteros; repitiéndola en sentido contrario, esto es, si se sumó de arriba para abajo, se suma de abajo para arriba, y debe obtenerse el mismo resultado; ó se dividen los sumandos en varias porciones, se hace la suma de cada porción, y en seguida se suman las sumas parciales, debiéndose obtener un resultado igual al primero, si no se ha cometido ninguna equivocación.

Sustracción de los denominados.

119.—Una persona á quien le deben 45\$—2 reales 6 tlacos, recibe á buena cuenta 22 \$—5 reales—4 tlacos, y se quiere saber cuánto se le queda á deber?

Para averiguarlo restaremos la segunda cantidad de la primera, y para ello las escribiremos como en la suma.

$$\begin{array}{r} 45^{\text{t}} - 2^{\text{rs}} - 6^{\text{tl}} \\ 22 - 5 - 4 \\ \hline 22 - 5 - 2 \end{array}$$

Comenzaremos la resta por las cantidades de menor especie.—De 4 á 6 la diferencia es 2 tlacos que se escribe en la columna respectiva.—Continuando con los reales, como 5 es mayor que la cifra 2 correspondiente del minuendo, le agregaremos á este número un peso reducido á reales, esto es, 8, y decimos de 5 á 10 la diferencia es 5 reales, que se escriben en la columna respectiva, y para no alterar el valor de la resta, al continuar la operación agregaremos 1 peso al sustraendo; por lo cual decimos: 1 y 2 son 3, á 5 la diferencia es 2 que se escribe en la columna de las unidades de los pesos.—Por último, de 2 á 4 son 2 que se escribe en la columna de las decenas.—Resultado que á la persona se le quedaban á deber 22^t—5^{rs}—2^{tl}.

REGLA.—Para restar los números denominados, se colocan las cantidades unas debajo de otras lo mismo que en los enteros, teniendo cuidado de poner separadamente cada especie y las del sustraendo debajo de las correspondientes del minuendo. Se tira una línea horizontal y se comienza á ejecutar la resta por las unidades de menor especie, restando cada parte del sustraendo de la superior del minuendo.

Cuando alguna de las partes del sustraendo es mayor que la correspondiente del minuendo, para poder ejecutar la resta, se agrega al minuendo una unidad de la especie inmediatamente mayor reducida á la menor, y para no alterar el valor de la diferencia, se le agrega una unidad á la parte inmediatamente mayor del sustraendo, al continuar la resta.

Sea como ejemplo encontrar la diferencia entre

$$\begin{array}{r} 2078\$ - 4 \text{ rs.} - 5 \text{ tls.} \\ 894 - 6 - 6 \\ \hline 1183 - 5 - 7 \end{array}$$

Como de 5 tlacos no se pueden restar 6, se le agrega á la parte 5 tlacos del minuendo un real reducido á tlacos, y la diferencia de 6 á 13 tlacos, que es 7, se escribe debajo, reteniéndose un real para agregarlo á los reales del sustraendo y no alterar la diferencia. Así se dice; 6 y 1 son 7, que no pudiendo restarse de 4, se le agrega á este último número 1 peso reducido á reales, y la diferencia 5, entre 7 y 12 reales se escribe debajo, reteniendo 1 peso para agregarlo á los pesos del sustraendo al continuar la operación. Así se dice; 4 y 1 son 5, á 8, la diferencia es 3; de 9 á 17, 8 y va 1; de 9 á 10, 1 y va 1, á 2 la diferencia es 1. La diferencia total es 1183\$—5 rs.—7 tlacos.

La prueba de esta operación se ejecuta como la de enteros, sumando el sustraendo con la resta, y cuando no se ha cometido equivocación, la suma debe ser el minuendo.

Multiplicación de denominados.

120.—Se quiere saber cuál será el valor de 8 varas 2 pies á razón de 5\$—4 reales la vara.

Para obtener el resultado que buscamos tendremos que multiplicar 5\$—4 rs. por 8 varas 2 pies, y para ello trasformaremos estos denominados en quebrados, cuyos valores son respectivamente iguales á los denominados; multiplicaremos los quebrados y el resultado lo valuaremos en pesos y reales.—La operación se dispone y ejecuta como sigue:

$$5\text{\$ } 4 \text{ rs. } \times 8 \text{ vs. } 2 \text{ pies.}$$

$$\frac{4}{8} \times \frac{26}{3} = \frac{114}{24} \$ = 47\$ - 5\frac{1}{3} \text{ reales}$$

En primer lugar, reducimos los pesos á reales y poniéndoles 8 por denominador, resulta que.....
 $5\$ 4 \text{ rs.} = \frac{44}{8} \$$. En seguida, reducimos las varas á pies y poniéndoles 3 por denominador, resulta que 8 varas 2 pies = $\frac{26}{3}$ vara. Luego, multiplicamos estos quebrados y valuamos el producto $\frac{114}{24} \$$; obteniéndose por fin que el valor de las 8 varas 2 pies es $47\$ 5\frac{1}{3}$ reales.

REGLA.—Para multiplicar un denominado por otro: 1º, se convierten el multiplicando y el multiplicador en quebrados; 2º, se multiplican los quebrados, y 3º se transforma el quebrado que resulte en denominado, valuándolo en la especie de las unidades de que deba ser el producto.

Antes de multiplicar los quebrados se abrevian cuando es posible.

Por ejemplo, se quiere saber cuánto valdrán 32@ 8 lb. 12 onzas de cobre, á razón de 7\\$—2 rs.—4 tlaeos la arroba.

La operación se dispone y ejecuta como sigue:

ars.	lb.	onz.	×	\\$	rs.	tlacos
32	8	12		7	2	4
25				8		
160				58		
648				8		
808			× 16	468		
4848						
12						
12940						

$$\frac{647}{12940} \times \frac{117}{468} = \frac{647}{400} \times \frac{117}{64} = \frac{647}{20} \times \frac{117}{16} = 236\frac{1}{4} - 4\text{rs} - 3\text{tlac} - \frac{1}{5}$$

647 × 117	
647	4
4529	32
75699	256
116	320
209	40
179	5
8	
1432	
152	
8	
1216	
256	

Después de haber reducido el multiplicando y el multiplicador á su menor especie, se convierten en los quebrados $\frac{12940}{400}$ de arroba, y $\frac{468}{64}$ de peso. Estos quebrados se abrevian y se multiplican $\frac{647}{20}$ @ por $\frac{117}{16}$ \$. Como el producto debe expresar pesos, al quebrado que resulta de la multiplicación se le sacan los enteros y se valúa en reales y tlacos, obteniéndose que el valor del cobre es

$$236\$ - 4 \text{ rs.} - 3 \text{ tlacos } \frac{1}{5}$$

Después de haber convertido los denominados en quebrados, la multiplicación de éstos también puede hacerse trasformándolos previamente en decimales.

La prueba de esta operación se hace tomando la mitad de un factor y debe obtenerse la mitad del pro-

ducto si no ha habido error en la multiplicación ó en su prueba.

En la multiplicación de los complexos es preciso fijar cuál de los factores es el multiplicando para valuar el producto en la especie de unidades que le corresponde conforme á la naturaleza de la cuestión.

120 bis.—MULTIPLICACIÓN DE LOS DENOMINADOS POR PARTES ALICUOTAS.—Si descomponemos, por ejemplo, 7 reales en 4 reales, más 2 reales, más 1 real, cuyos valores respectivamente son: 4 reales = $\frac{1}{2}$ \$, 2 reales = $\frac{1}{4}$ \$ y 1 real = $\frac{1}{8}$ \$, por ser las partes equivalentes á fracciones comunes que tienen por numerador la unidad, diremos que 4 reales, 2 reales y 1 real son las partes alicuotas de 7 reales.

Se llaman partes alicuotas de un denominado, aquellas en que puede descomponerse y cuyos valores respectivamente son fracciones comunes que tienen por numerador la unidad.

Si se quiere descomponer 10 pulgadas en sus partes alicuotas; como 1 pie tiene 12 pulgadas dividiendo 12 entre 2 se obtiene el cociente exacto 6. Por tanto, 6 pulgadas = $\frac{1}{2}$ pie es una de las partes alicuotas de 10 pulgadas. Dividiendo 12 entre 3 se obtiene por cociente exacto 4, y por tanto 4 pulgadas = $\frac{1}{3}$ pie es la otra parte alicuota de 10 pulgadas.....
= 6 + 4 = $\frac{1}{2}$ pie + $\frac{1}{3}$ pie.

REGLA.—Para determinar las partes alicuotas de un denominado se dividirá el número de subdivisiones de la especie inmediata mayor sucesivamente por 2, por 3, por 4, etc., y cuando la división resulte exacta los cocientes serán las partes alicuotas buscadas.

Quando la unidad tiene 8 subdivisiones sus alicuotas son 4, 2 y 1. Quando la unidad tiene 12, sus alicuotas son 6, 4, 3, 2 y 1. Quando tiene 16, sus ali-

cotas son 8, 4, 2 y 1. Quando tiene 25 sus alicuotas son 5 y 1.

PROBLEMA.—¿Cuál es el valor de 15 varas á 5 reales vara? Siendo las partes alicuotas de 5 reales 4 reales y 1 real, determinaremos sucesivamente el valor de las 15 varas á 4 reales y á 1 real, y sumando estos valores tendremos resuelto el problema.

Como el producto ha de expresar pesos y reales, el multiplicando es 0\$ 5 reales y el multiplicador 15 varas.

0\$	5 rs.
vs. 15	
7\$	4 rs.
1	— 7
9\$	3 rs.

Dispondremos la operación como se ve aquí al lado, y la ejecutaremos como sigue. Si la vara valiese á 1 peso, las 15 varas costarían 15\$, y por lo mismo para obtener el valor de 15 varas á 4 reales, diremos: mitad de 15\$ son 7\$ que escribimos debajo del número 15, y como sobra 1\$ = 8 reales, diremos: mitad de 8 reales son 4, que escribimos á la derecha en la columna de los reales. Para determinar el valor de 15 varas á 1 real, raciocinaremos como sigue: si 15 varas á 4 reales valen 7\$ 4 reales, á 1 real valdrán la cuarta parte de 7\$ 4 rs. y por lo mismo le sacaremos cuarta parte á esta cantidad como sigue: cuarta parte de 7\$ es 1\$, que escribiremos en la columna respectiva y sobran 3 = 24 rs. y 4 son 28; cuarta de 28 son 7 reales. Sumando 7\$ 4 rs. con 1\$ 7 rs. se obtiene que el valor de 15 varas á 5 reales es 9\$ 3 rs.

PROBLEMA.—¿Cuál será el valor de 10 pulgadas á razón de 7\$ 4 rs. el pie.

Siendo las partes alicuotas de 10 pulgadas, 6 pulgadas, más 3 pulgadas, más 1 pulgada; determinaremos sucesivamente el valor de cada una de estas partes, y sumándolos tendremos el resultado que busca-

mos. Como el producto ha de expresar pesos, el multiplicando es 7\$ 4 rs. y el multiplicador 10 pulgadas. Dispondremos la operación como se ve aquí al lado y la ejecutaremos como sigue: si un pie vale 7\$ 4 rs., 6

	7\$ 4 rs.	pulgadas que son $\frac{1}{2}$ pie
	0 ^r 10 pulgs.	valdrán la mitad de 7\$ 4
valor de 6 ps. 3\$ 6 rs.		rs. y por lo mismo saca-
" 3 1 7		remos la mitad de esta
" 1 0 5		cantidad, diciendo: mitad
	6\$ 2 rs.	de 7\$ son 3\$, que se escri-
		ben en la columna respec-

tiva, y sobra 1\$=8 reales, más 4 son 12, mitad de 12 son 6 reales, que se escriben á la derecha en la columna de los reales. Para determinar el valor de 3 pulgadas, raciocinaremos como sigue: si 6 pulgadas valen 3\$ 6 rs., 3 pulgadas que es la mitad de 6 pulgadas valdrán la mitad de 3\$ 6 rs. y por esto diremos: mitad de 3\$ es 1\$, que se escribe en la columna respectiva, y sobra 1\$=8 reales, y 6 son 14 reales, mitad de 14 son 7 reales, que se escriben en la columna respectiva. Para determinar el valor de 1 pulgada, que es la tercera parte de 3 pulgadas, le sacaremos tercera parte á 1\$ 7 rs. diciendo: tercera de 1\$ es 0, que se escribe en la columna respectiva, sobra 1\$=8 reales, y 7 son 15 reales, tercera de 15 son 5 reales que se escriben en la columna respectiva; sumando los tres productos parciales se obtiene que las 10 pulgadas valdrán 6\$ 2 reales.

Como se habrá observado, en la multiplicación de los denominados es indispensable determinar cuál de los dos factores es el multiplicando, que como se sabe es el término de la especie del resultado que se busca, pues de esta misma especie deben ser los productos parciales.

En la multiplicación de los denominados por partes

alienotas es conveniente distinguir dos casos: 1º cuando el multiplicador es incomplexo; 2º cuando el multiplicador es complejo.

PRIMER CASO.—PROBLEMA.—¿Cuánto costarán 85 libras á razón de 15\$ 6 reales, 4 tlacos la libra? Supuesto que el resultado que se busca ha de expresar pesos, la última cantidad será el multiplicando, y el multiplicador 85 libras es incomplexo.

	15\$ 6 rs. 4 tl.
	lb 85
	75
	120
Valor de 85 lb á 15\$.....	1275\$
85 „ á 4 rs.	42 4 rs.
85 „ á 2 rs.	21 2
85 „ á 4 tlacos	5 2 4 tl.
85 „ á 15 \$ 6 rs. 4 tl.=1344	0 rs. 4 tl.

La ejecución de la operación debe concebirse como sigue: si cada libra valiera solo 15\$ el valor de las 85 libras sería 1275\$=15×85; pero como la libra vale 15\$ 6 rs. 4 tl. es preciso agregar al producto anterior el valor de 85 libras á razón de 6 reales 4 tlacos. Si la libra valiera un peso, 85 libras valdrían 85 pesos y de este valor, que es un producto auxiliar, deduciremos el de las mismas libras á 6 reales 4 tlacos. Descompondremos 6 reales en sus partes alienotas, 4 rs.= $\frac{1}{2}$ \$ y 2 reales que es la mitad de 4 reales; y decimos, si 85 libras á 1 peso valen 85\$, á 4 reales valdrán la mitad de 85\$, por lo que tomaremos la mitad de este número que es 42\$ 4 rs. y lo escribiremos debajo del 1º producto 1275\$. Si 85 lb. á 4 reales valen 42\$ 4 rs.

á 2 reales valdrán la mitad de esta suma, esto es, 21\$ 2 rs. que escribimos debajo del anterior producto. Si 85 lb. á 2 rs. valen 21\$ 2 rs., á 4 tlacos, que es la cuarta parte de 2 rs. valdrán la cuarta parte de 21\$ 2 rs. esto es, 5\$ 2 rs. 4 tl. que escribimos debajo del producto anterior. Sumando todos los productos parciales se obtiene que el valor de 85 lb. á 15\$ 6 rs. 4 tl. es 1344\$ 0 rs. 4 tl.

REGLA DEL PRIMER CASO.—Cuando el multiplicador es incomplexo, se multiplicará este término como los números enteros, por las unidades de especie mayor del multiplicando, y en seguida por cada una de las unidades de especie menor del mismo multiplicando descompuestas en sus partes alicuotas.

EJEMPLOS.—¿Cuál es el valor de 33 quintales de cobre á razón de 25\$ 7 rs. 3 tlacos el quintal.

La operación, conforme á la regla anterior, se dispone y ejecuta como sigue:

			25 \$ 7 rs. 3 tl.	
qtles.	33			
	75			
	75			
valor de 33 qtles. á 25\$.....	825 \$			
" " 33 " " 4 rs.	16	4 rs.		
" " 33 " " 2 rs.	8	2		
" " 33 " " 1 rs.	4	1		
" " 33 " " 2 tl.	1	0	2 tl.	
" " 33 " " 1 tl.	0	4	1 tl.	
	Valor total=	\$855	3	3

¿Cuál es el valor de 29 toneladas de carbón á razón de 11\$ 3 rs. 7 tl. la tonelada?

			11\$ 3 rs. 7 tl.	
ton.	29			
	99			
	22			
	319\$			
valor de 29 ton. á 11 \$				
" " 29 " " 2 rs.	7	2 rs.		
" " 29 " " 1 rs.	3	5		
" " 29 " " 4 tl.	1	6	4 tl.	
" " 29 " " 2 tl.	0	7	2 tl.	
" " 29 " " 1 tl.	0	3	5 tl.	
	Valor total=	\$333	0	3

SEGUNDO CASO.—PROBLEMA.—¿Cuál es el valor de 27 varas 2 pies 5 pulgadas á razón de 15\$ 5 rs. 4 tl. la vara?

			15\$ 5 rs. 4 tl.	
vs.	27	2 P. 5 p.		
	105			
	30			
	405\$			
valor de 27 vs. á 15\$				
" " 27 " " 4 rs.	13	4 rs.		
" " 27 " " 1 rl.	3	3		
" " 27 " " 4 tl.	1	5	4 tl.	
" " 27 vs. á 15\$ 5 rs. 4 tl.	423	4	4	
1 P. á 15 \$ 5	5	1	6 $\frac{2}{3}$	=24/36
1 P. á id.	5	1	6 $\frac{2}{3}$	=24/36
4 p. á id.	1	5	7 $\frac{5}{9}$	=20/36
1 p. á id.	0	3	3 $\frac{2}{3}$	=32/36
valor de 27 vs. 2 P. 5 p. á 15\$ 5 rs. 4 tl.=	436\$	1	47 $\frac{100}{36}$	=27 $\frac{100}{36}$

Al principio hemos prescindido de los 2 pies 5 pulgadas y considerando el multiplicador 27 varas como

incomplejo hemos determinado, aplicando la regla del 1.^{er} caso, el valor de las 27 varas á 15\$ 5 rs. 4 tl. cuyo valor, para aclarar más el procedimiento, lo hemos sumado y es igual á 423\$ 4 rs. 4 tl. En seguida, se determina el valor de las partes del multiplicador como sigue: supuesto que una vara vale 15\$ 5 rs. 4 tl., 1 pie que es la tercera parte de una vara, valdrá la tercera parte de esta cantidad, que es 5\$ 1 rl. $6\frac{2}{3}$ tlacos. El otro pie tendrá el mismo valor y por eso repetimos este producto parcial. Para determinar el valor de 5 pulgadas, las descomponemos en sus partes alicuotas 4 y 1. Si 1 pie vale 5\$ 1 rl. $6\frac{2}{3}$ tl., 4 pulgadas valdrán la tercera parte, la que sacamos diciendo: tercera de 5\$ es 1, que se escribe, y sobran 2 pesos igual á 16 reales, y 1 son 17, tercera de 17 son 5 rs. que se escriben, y sobran 2 reales = 16 tlacos y 6 son 22, tercera de 22 son 7 tlacos que se escriben y sobra 1 tlaco que debemos sumar con $\frac{2}{3}$; 1 por 3 son 3 y 2 son $\frac{5}{3}$, tercera de $\frac{5}{3}$ son $\frac{5}{9}$, que se escriben. Para determinar el valor de 1 pulgada, sacamos cuarta parte al último producto parcial, que es el valor de 4 pulgadas, y se notará que al concluir decimos: cuarta de 15 tlacos 3, que se escribe, y sobran 3, que por 9 son 27 y 5 son $\frac{32}{9}$, cuarta de $\frac{32}{9}$ son $\frac{32}{36}$. Para sumar los quebrados los reducimos todos á 36 avos, para lo cual decimos: 36 entre 3 á 12, y multiplicando los dos términos del primer quebrado por 12 se transforma en su igual $\frac{24}{36}$; para el tercero decimos: 36 entre 9 á 4 y multiplicando por 4 los dos términos del quebrado $\frac{5}{9}$ se transforma en su igual $\frac{20}{36}$. Sumando los quebrados reducidos á un común denominador se obtiene por resultado $\frac{100}{36}$ = 2 tl. $\frac{4}{9}$; escribimos la fracción en la columna que le corresponde, se reúnen los dos tlacos con los números de su especie y se continúa la suma. El valor es \$436 1 rl. 4 tl. $\frac{4}{9}$. *

REGLA DEL SEGUNDO CASO.—*Quando el multiplicador es complejo, se ejecuta la operación como si fuere incomplejo, conforme á la regla dada para el primer caso, prescindiendo al principio de las unidades de menor especie que acompañan al multiplicador. En seguida se descomponen las unidades menores del multiplicador en sus partes alicuotas, y se multiplica todo el multiplicando por cada una de ellas. Por último, se suman los productos parciales.*

Las partes de la última subdivisión se estiman en fracciones comunes, y para dividir estas fracciones se sigue el método de multiplicar su denominador por el divisor.

EJEMPLO.—¿Cuál es el valor de 35 arrobas 10 libras 2 onzas á razón de 425\$ 6rs. 4 tls. la arroba?

Este problema nos va á servir para explicar que á veces en la multiplicación por partes alicuotas, hay que tomar un producto auxiliar que no debe figurar en el resultado.

425 \$ 6 rs. 4 tl.
35 @ 10 lb. 2 onz.

2125
1275

valor de 35 @ á 425\$..... 14875\$

id. " 4 rs..... 17 4

id. " 2 rs..... 8 6

id. " 4 tl..... 2 1 4

valor de 35 @ á 425\$ 6 rs. 4 tl. 14903 3 4

5 lb. á id. 85 1 2

5 lb. á id. 85 1 2

1 lb. á id. 17 0 2

2 onz á id. 2 1 0

Valor total. \$15075 7 rs 1 tl. 3/50 2/3 = 150

Producto auxiliar

2/5 = 80/200
2/5 = 80/200
2/25 = 16/50
2/25 = 16/50

Después de haber obtenido el valor de 5 libras á 425\$ 6 rs. 4 tl., cuyo producto parcial es 85\$ 1 rl. 2 tl. $\frac{3}{4}$, para determinar el valor de 2 onz., que es $\frac{1}{4}$ de 5 libras, y evitar lo molesto que sería tomar á la memoria la 40 ava parte del producto anterior, se forma uno auxiliar, el de una libra, 17\$ 0 rs. $2\frac{2}{5}$, del cual tomando la octava parte se deduce fácilmente el de 2 onzas; pero se debe tener cuidado de tachar ó señalar ese producto auxiliar para no sumarlo.

División de denominados.

121—PROBLEMA.—Habiendo pagado 120\$ 4 rs. por 8 quintales 2 arrobas de fierro, se quiere saber el precio del quintal?

Para resolver la cuestión trasformaremos los denominados en quebrados, cuyos valores son iguales á los de estos números, y en seguida dividiremos los quebrados. Dispondremos la operación y la ejecutaremos como sigue:

120\$ 4 rs. ÷ 8 qtles. 2@

$$\frac{964}{8} \div \frac{34}{4} = \frac{3856}{272} \$ = 14\$ 1 \text{ rl. } 3 \text{ tl. } \frac{5}{17}$$

$$\begin{array}{r} 3856 \overline{) 272} \\ 1136 \quad 14\$ 1 \text{ rl. } 3 \text{ tl. } \frac{5}{17} \\ \underline{48} \\ 8 \\ \underline{384} \\ 112 \\ \underline{8} \\ 896 \\ \underline{80} \end{array}$$

5
10
80
272
34
17

Siendo 120\$ 4 rs. = $\frac{964}{272}$ \$ y 8 qq. $2\omega = \frac{34}{17}$ qq. el cociente de estos quebrados $\frac{2856}{272}$ \$ será el de los denominados. Como valuando este quebrado se obtiene que es igual á 14\$ 1 rl. 3 tl. $\frac{5}{17}$, se infiere que este será el precio del quintal.

REGLA.—Para dividir un denominado por otro; 1º se convierten el dividendo y el divisor en quebrados; 2º se dividen estos quebrados, y 3º se trasforma el quebrado que resulta en denominado, valuándolo en la especie de unidades que deba expresar el cociente.

Antes de dividir los quebrados se abrevian cuando es posible.

Por ejemplo, se han pagado 845\$—4 rs.—2 tlacos por 105 marcos—6 onzas—4 ochavas—4 tomines de plata, y se quiere conocer el valor del marco.

La operación se ejecuta como sigue:

$$\begin{array}{r} 845^{\$} - 4^{rs} - 2^{tla.} + 105^{marcos} - 6^{onz.} - 4^{och.} - 4^{toma.} \\ \underline{8} \qquad \qquad \qquad \underline{8} \\ 6764 \qquad \qquad \qquad 846 \\ \underline{8} \qquad \qquad \qquad \underline{8} \\ 54114 \qquad \qquad \qquad 6772 \\ \qquad \qquad \qquad \underline{6} \\ \qquad \qquad \qquad 40636 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 27057 \quad 10159 \quad 3 \\ 54114 \quad 40636 \quad 27057 \times 96 \quad 81171 \quad \$ = \frac{8 \text{ rs}}{7-7-7} \frac{11}{7} \quad 3695 \\ \underline{64} \quad \underline{384} \quad \underline{10159 \times 32} \quad \underline{10159} \quad \underline{10159} \\ 32 \quad 96 \quad 4 \\ 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 27057 \\ \underline{3} \\ 81171 \quad 10159 \\ 10058 \quad \underline{7^s 7^{rs} 7^u} \\ 8 \\ 80464 \\ 9351 \\ \underline{8} \\ 74808 \\ 3695 \end{array}$$

La prueba de la división puede hacerse multiplicando el cociente por el divisor, y agregando la resta, el resultado deberá ser igual al dividendo; ó bien, se dividen el dividendo y el divisor por un mismo número, y el nuevo cociente deberá ser igual al anterior.

NOTA.—Todas las operaciones de los números complejos, pueden ejecutarse convirtiéndolos previamente en decimales.

PREGUNTAS.—118. ¿Cuál es la regla para sumar los números denominados? ¿Cómo se hace la prueba de la suma de los denominados?—119. ¿Cuál es la regla para restar los números denominados? ¿Cómo se ejecuta la prueba de la resta de los denominados?—120. ¿Cómo se multiplican los números denominados? ¿Cómo se ejecuta la prueba de la multiplicación de los denominados?—120 bis. ¿A qué se llaman partes alícuotas de un denominado? ¿Cómo se pueden determinar las partes alícuotas de un denominado? ¿Cuántos y cuáles son los casos que se distinguen en la multiplicación de los denominados por partes alícuotas? ¿Cuál es la regla para resolver el primer caso de la multiplicación por partes alícuotas? ¿Cuál es la regla para resolver el segundo caso?—121. ¿Cómo se dividen los números denominados? ¿Cómo puede hacerse la prueba de la división de los denominados?

Problemas.

182. Determinar la suma de las cantidades 385 varas, 2 pies, 6 pulgadas, 4 líneas + 28 v. 1 P. 8 p. 6 l. + 404 v. 2 P. 9 p. 3 l. + 59 v. 2 P. 7 p. 5 l. + 345 v. 2 P. 6 p. 9 l. + 116 v. 1 P. 3 p. 10 l. + 46 v. 1 P. 9 p. 8 l. y hacer la prueba.

183. De 428 quintales, 2 arrobas, 18 libras, 6 onzas, 10 adarmes, 2 tomines, 6 granos, restar 119 qtles. 3 ars. 12 lb. 8 onzas, 8 adarmes, 2 tomines, 9 granos y hacer la prueba.

184. Determinar el valor de 425 varas, 2 pies, 5 pulgadas, á razón de 36\$ 5 rs. 10 granos la vara.

185. Por 4 quintales, 6 libras, 8 onzas de cobre se han pagado 115\$ 6 rs. 4 tlacos, y se quiere saber el valor del quintal.

186. ¿Cuánto costarán 22 libras, 8 onzas, 8 adarmes á 15\$ 4 rs. la libra?

187. ¿Cuántas libras podrán comprarse con 349\$ 1 real, 7 tlacos, pagándose á 15\$ 4 rs. la libra?

Cuadrado y raíz cuadrada.

122. ELEVACIÓN DE UN NÚMERO AL CUADRADO.—Se llama *cuadrado de un número*, el producto que resulta de multiplicarlo por sí mismo. Por ejemplo, 64 es el cuadrado de 8, supuesto que $8 \times 8 = 64$.

La elevación de un número al cuadrado, se indica poniendo el exponente 2 arriba y á la derecha de la cantidad, la cual algunas veces se pone debajo de una raya y otras dentro de un paréntesis, de la manera siguiente:

$$25^2 \text{ ó } \overline{25} \text{ ó } (25)^2 = 625$$

y se lee 25 elevado al cuadrado igual á 625.

Para elevar un número al cuadrado, basta multiplicarlo por sí mismo.

Si el número es entero, su cuadrado será también número entero. Si el número es un quebrado, para obtener el cuadrado se elevará por separado el numerador y el denominador, supuesto que para multiplicar los quebrados se multiplica numerador por numerador y denominador por denominador, v. g.:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{3^2}{4^2} = \frac{9}{16}$$

en este caso, el resultado es quebrado, y además, es menor que el quebrado que se eleva al cuadrado, porque el producto de los quebrados propios, es menor que cualquiera de los factores.

Si el número que se eleva es mixto, su cuadrado también lo será; y si está compuesto de enteros y decimales, el cuadrado constará de un número doble de cifras decimales. (106.)

Cuando la cantidad que se eleva al cuadrado solo es decimal, el cuadrado consta de un número doble de cifras que la decimal, y su valor numérico es menor que el de la cantidad que se eleva al cuadrado.

123.—ELEVACIÓN AL CUADRADO DE UN NÚMERO COMPUESTO DE DECENAS Y UNIDADES.—Si queremos elevar al cuadrado el número $36 = 30 + 6$, su cuadrado será igual al producto que resulte de multiplicar $30 + 6$ por $30 + 6$, de la manera siguiente:

$$\begin{array}{r} 30 + 6 \\ 30 + 6 \\ \hline 36 = 6^2 \quad \text{cuadrado de las unidades.} \\ 180 = 30 \times 6 \quad \text{Doble producto de dec. por unid.} \\ 180 = 30 \times 6 \\ 900 = 30 \times 30 \quad \text{Cuadrado de las decenas.} \\ \hline 1296 = 30^2 + 2.(30 \times 6) + 6^2 \end{array}$$

Problemas.

182. Determinar la suma de las cantidades 385 varas, 2 pies, 6 pulgadas, 4 líneas + 28 v. 1 P. 8 p. 6 l. + 404 v. 2 P. 9 p. 3 l. + 59 v. 2 P. 7 p. 5 l. + 345 v. 2 P. 6 p. 9 l. + 116 v. 1 P. 3 p. 10 l. + 46 v. 1 P. 9 p. 8 l. y hacer la prueba.

183. De 428 quintales, 2 arrobas, 18 libras, 6 onzas, 10 adarmes, 2 tomines, 6 granos, restar 119 qtles. 3 ars. 12 lb. 8 onzas, 8 adarmes, 2 tomines, 9 granos y hacer la prueba.

184. Determinar el valor de 425 varas, 2 pies, 5 pulgadas, á razón de 36\$ 5 rs. 10 granos la vara.

185. Por 4 quintales, 6 libras, 8 onzas de cobre se han pagado 115\$ 6 rs. 4 tlacos, y se quiere saber el valor del quintal.

186. ¿Cuánto costarán 22 libras, 8 onzas, 8 adarmes á 15\$ 4 rs. la libra?

187. ¿Cuántas libras podrán comprarse con 349\$ 1 real, 7 tlacos, pagándose á 15\$ 4 rs. la libra?

Cuadrado y raíz cuadrada.

122. ELEVACIÓN DE UN NÚMERO AL CUADRADO.—Se llama *cuadrado de un número*, el producto que resulta de multiplicarlo por sí mismo. Por ejemplo, 64 es el cuadrado de 8, supuesto que $8 \times 8 = 64$.

La elevación de un número al cuadrado, se indica poniendo el exponente 2 arriba y á la derecha de la cantidad, la cual algunas veces se pone debajo de una raya y otras dentro de un paréntesis, de la manera siguiente:

$$25^2 \text{ ó } \overline{25} \text{ ó } (25)^2 = 625$$

y se lee 25 elevado al cuadrado igual á 625.

Para elevar un número al cuadrado, basta multiplicarlo por sí mismo.

Si el número es entero, su cuadrado será también número entero. Si el número es un quebrado, para obtener el cuadrado se elevará por separado el numerador y el denominador, supuesto que para multiplicar los quebrados se multiplica numerador por numerador y denominador por denominador, v. g.:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{3^2}{4^2} = \frac{9}{16}$$

en este caso, el resultado es quebrado, y además, es menor que el quebrado que se eleva al cuadrado, porque el producto de los quebrados propios, es menor que cualquiera de los factores.

Si el número que se eleva es mixto, su cuadrado también lo será; y si está compuesto de enteros y decimales, el cuadrado constará de un número doble de cifras decimales. (106.)

Cuando la cantidad que se eleva al cuadrado solo es decimal, el cuadrado consta de un número doble de cifras que la decimal, y su valor numérico es menor que el de la cantidad que se eleva al cuadrado.

123.—ELEVACIÓN AL CUADRADO DE UN NÚMERO COMPUESTO DE DECENAS Y UNIDADES.—Si queremos elevar al cuadrado el número $36 = 30 + 6$, su cuadrado será igual al producto que resulte de multiplicar $30 + 6$ por $30 + 6$, de la manera siguiente:

$$\begin{array}{r} 30 + 6 \\ 30 + 6 \\ \hline 36 = 6^2 \quad \text{cuadrado de las unidades.} \\ 180 = 30 \times 6 \quad \text{Doble producto de dec. por unid.} \\ 180 = 30 \times 6 \\ 900 = 30 \times 30 \quad \text{Cuadrado de las decenas.} \\ \hline 1296 = 30^2 + 2.(30 \times 6) + 6^2 \end{array}$$

Al multiplicar 6 por 6, formamos el cuadrado de las unidades; al multiplicar 6 por 30, obtenemos un producto de las decenas por las unidades; al multiplicar 30 por 6 formamos otro producto de decenas por unidades, igual al anterior, y al multiplicar 30 por 30, se forma el cuadrado de las decenas. En consecuencia, el cuadrado de todo número compuesto de decenas y unidades, consta de tres partidas: 1ª, cuadrado de las decenas, 2ª, doble producto de las decenas por las unidades, y 3ª, cuadrado de las unidades.

Debe observarse: 1º, que decenas cuadradas producen centenas, supuesto que terminando cada uno de los factores en un cero, el producto debe llevar dos, esto es, debe expresar centenas; 2º el doble producto de decenas por unidades, debe expresar decenas, supuesto que uno de los factores, las decenas, termina en un cero; y en fin, la 3ª partida, el cuadrado de las unidades, siempre expresa unidades, aunque conste de dos ó más guarismos.

124. RAÍZ CUADRADA.—Se llama raíz cuadrada de un número, á la cantidad que, multiplicada por sí misma, produce el número propuesto.

Por ejemplo, la raíz cuadrada de 81 es 9, supuesto que $9 \times 9 = 81$.

La raíz cuadrada se indica poniendo la cantidad dentro del signo $\sqrt{\quad}$ de la manera siguiente:

$\sqrt{7298}$: se lee, raíz cuadrada de 7,298.

125. Si se trata de conocer la raíz cuadrada de la cantidad 55298, la operación se dispondrá y ejecutará como sigue:

$\sqrt{5,52,98}$	235
2.....	4
3 $\times$ 43.....	15,2
5 $\times$ 465.....	43
	465
	129
	239,8
	232 5
	73
1ª resta.....	23 < 2 $\times$ 23
2ª resta.....	73 < 2 $\times$ 235

Dividida la cantidad en periodos de dos en dos guarismos, se busca el mayor cuadrado contenido en 5, que es 4, cuya raíz es 2. El cuadrado de este número, restado de 5, da 1 por resta, al lado de la cual bajamos el periodo 52. Separando el 2, dividimos 15 por 4, duplo de la raíz, y el cociente 3 lo escribimos al lado de la raíz 2 y del 4. El cociente 3 se multiplica por 43, cantidad formada con el duplo de las decenas de la raíz y sus unidades, y el producto 129 se resta, comunmente á paso y medida que se forma, de 152. Al lado de la resta 23, bajamos el periodo 98; separando el guarismo 8, dividimos 239 entre 46, duplo de la raíz, y el cociente 5 lo ponemos al lado de 23 y de 46. En seguida multiplicamos las 5 unidades de la raíz por 465, número formado con el duplo de 23 (decenas de la raíz) más 5 unidades, y el producto lo restamos de 2398, quedando la resta 73.

Este resultado nos indica que la raíz cuadrada de 55298 no es un número exacto, estando comprendida entre 235 y 236. La extracción de la raíz cuadrada pocas veces conduce á un resultado exacto, y el verdadero valor en nuestro ejemplo, debe concebirse así:

$$55298 = 235^2 + 73$$

Esta resta 73 es el exceso de 55298 sobre el cuadrado de 235.

126. REGLA PARA EXTRAER LA RAÍZ CUADRADA.—Para extraer la raíz cuadrada de un número, se divide este en periodos de dos guarismos, contando de derecha á izquierda; se busca la raíz del mayor cuadrado contenido en el periodo de la izquierda, que podrá constar de uno ó dos guarismos; se escribe esta raíz á la derecha de la cantidad, separándola por una línea vertical, como en la división; se forma el cuadrado de la raíz hallada, y se resta del primer periodo de la izquierda. Al lado de la resta se baja el periodo siguiente; se separa el último guarismo de la derecha, y los que quedan á la izquierda se dividen por el duplo de la raíz hallada, poniendo el cociente al lado de la raíz; debajo de esta se pone el duplo de las decenas de la raíz, y á continuación las unidades; se multiplica la cantidad así formada por las unidades de la raíz, y se resta el producto de la cantidad formada con la resta y el periodo que se bajó á su derecha.

Si el guarismo de las unidades es mayor que el verdadero, la resta no podrá ejecutarse; y si es menor, la resta resultará mayor que el duplo de la raíz. Al lado de la resta se baja el periodo siguiente, y se continúa la operación conforme á lo prescrito en la segunda parte de la regla.

Por cada periodo que se baja, se pone un guarismo ó cero en la raíz, y si la cantidad es un cuadrado perfecto, la última resta será 0.

EJEMPLOS.—¿Cuál será el lado de un patio cuadrado que tiene 625 metros cuadrados de superficie?

Para resolver el problema tendremos que extraer, conforme á la regla anterior, la raíz cuadrada de 625.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{6,25} & 25 \\ 4 & 45 \\ \hline 22,5 & \\ 22\ 5 & \\ \hline 00\ 0 & \end{array}$$

El lado del patio es de 25 metros.

¿Cuál es el lado de una tierra de labor, cuadrada, cuya superficie es de 138384 varas cuadradas?

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{13,83,84} & 372 \\ 9 & 67 \\ \hline 48,3 & 742 \\ 1\ 48,4 & \\ \hline 00\ 0 & \end{array}$$

El lado del cuadrado será de 372 varas.

127.—En los dos ejemplos anteriores no hubo resta, pero cuando la hay, y se quiere aproximar por decimales, como por cada cifra decimal de la raíz, al multiplicarla por sí misma, tiene que haber dos en el cuadrado, continuaremos la operación agregando á cada resta dos ceros.

Por ejemplo $\sqrt{896}$

$\sqrt{8,96}$	$29,93$
49,6	49
5 50,0	589
19 90,0	5983
1 95 1	

Al obtener la resta 55 hemos agregado dos ceros para obtener como raíz 9 décimas.—La siguiente resta fué 1'99 y le hemos agregado dos ceros para obtener 3 centésimas.—Limitando hasta aquí la aproximación, la raíz de 896 es 89'93 y la resta 0'1951.

APROXIMACIÓN DE LA RAÍZ CUADRADA.—Cuando el resultado de la raíz cuadrada de un número entero no es exacto, se aproxima por decimales, agregando sucesivamente á cada resta dos ceros por cada decimal que se quiere obtener en la raíz, y se continúa la operación hasta alcanzar la aproximación apetecida, teniendo cuidado de separar con una coma la parte entera de la decimal.

Sea, por ejemplo, extraer la raíz cuadrada á 698.

Ejecutando la operación como se ha dicho, encontraremos la raíz 26 unidades y la resta 22. Para encontrar las décimas de la raíz, agregamos dos ceros al lado de 22, ponemos la coma después de la raíz 26, y procediendo como antes, encontramos 4 décimas en la raíz y 104 centésimas de resta. A esta agregamos dos ceros, y encontramos 1 centésima en la raíz y 0' 5119 por resta.

128. EXTRACCIÓN DE LA RAÍZ CUADRADA DE LAS DECIMALES.—Ocurren dos casos: cuando hay enteros juntos con decimales, y cuando solo hay decimales.

1º Cuando hay enteros con decimales, antes de comenzar la operación, se examina si el número de cifras decimales es par, y cuando no lo es, se agrega á la derecha un cero. En seguida, se ejecuta la operación conforme á la regla general (126) teniendo cuidado de poner la coma de separación entre los enteros y las decimales, en la raíz, al bajar el primer período de cifras decimales.

Sea como ejemplo extraer la $\sqrt{235'273}$

$\sqrt{698}$	26'41
298	46
2200	524
10400	5281
5119	

Comenzamos por agregar un cero á la derecha de las decimales para que estas sean pares, y luego ejecutamos la operación por la regla general, teniendo cuidado de distinguir en la raíz las decimales de los enteros.

2º Caso.—Cuando solo hay decimales, se hace que el número de estas sea par, con cuyo objeto se agrega un cero á la derecha cuando sea necesario. Se pone en la raíz 0 como raíz de la parte entera, una coma, y en seguida se extrae la raíz de las decimales como si fueran enteros.

Por ejemplo:

$\sqrt{0'87,50}$	0'93
65,0	0'183
101	
0'875	=(0'93)² + 0'0101

La prueba de la raíz cuadrada se ejecuta elevando al cuadrado la raíz encontrada, y agregando al producto la resta, debe obtenerse el número propuesto.

129. EXTRACCIÓN DE LA RAÍZ CUADRADA DE LOS QUEBRADOS.—Se presentan tres casos: 1º, cuando los dos términos del quebrado tienen raíz exacta; 2º, cuando solo uno de sus términos tiene raíz exacta; y 3º, cuando ni el numerador ni el denominador tienen raíz exacta.

En el primer caso se extrae la raíz del numerador y la del denominador separadamente, y el quebrado formado con estas raíces será la raíz del quebrado propuesto, una vez que para elevar un quebrado al cuadrado, se eleva su numerador y su denominador.

Por ejemplo: $\sqrt{\frac{16}{49}} = \frac{4}{7}$

2º Cuando sólo uno de los términos del quebrado tiene raíz exacta, se le extrae exacta al que la tenga y aproximada al otro término, con lo cual se obtiene un quebrado en el que uno de sus términos es entero y el otro se compone de enteros y decimales. A este quebrado se le da la forma común, agregando al término entero, tantos ceros como cifras decimales tenga el otro, suprimiendo en seguida la coma y abreviándolo cuando sea posible.

Por ejemplo: $\sqrt{\frac{16}{8}} = \frac{4}{\sqrt{8}} = \frac{400}{\sqrt{8}}$

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{58} & 7.61 \\ 90.0 & 14.6 \\ 240.0 & 15.21 \\ 87.9 & \end{array}$$

3º Cuando ninguno de los dos términos del quebrado tiene raíz exacta, se reduce al segundo caso, multiplicando ambos términos por el numerador ó por el denominador, y en seguida se ejecuta la regla antes dada.

Si se quiere extraer la raíz cuadrada de $\frac{5}{7}$, multiplicaremos por el denominador sus dos términos; lo cual no altera su valor, y diremos:

$$\sqrt{\frac{5}{7}} = \sqrt{\frac{35}{49}} = \frac{\sqrt{35}}{7} = \frac{5.91}{7} = \frac{591}{700}$$

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{35} & 5.91 \\ 10.00 & 10.9 \\ 190.0 & 11.81 \\ 71.9 & \end{array}$$

Por último, la raíz cuadrada de un quebrado puede obtenerse convirtiéndolo previamente en decimal y extrayéndole á ésta la raíz, conforme á la regla dada. (128)

EJEMPLOS.—Se quiere determinar la raíz cuadrada del quebrado $\frac{676}{1024}$

$$\sqrt{\frac{676}{1024}} = \frac{\sqrt{676}}{\sqrt{1024}} = \frac{26}{32} = \frac{13}{16}$$

Extraer la raíz cuadrada del quebrado $\frac{49}{700}$.

$$\sqrt{\frac{49}{700}} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{700}} = \frac{7}{\sqrt{700}} = \frac{700}{\sqrt{700}} = \frac{158}{175}$$

Extraer la raíz cuadrada del quebrado $\frac{12}{15}$.

$$\sqrt{\frac{12}{15}} = \sqrt{\frac{12 \times 15}{15 \times 15}} = \frac{\sqrt{180}}{15} = \frac{13.4}{15} = \frac{134}{150}$$

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{180} & 13.4 \\ 0.80 & 23 \\ 110.0 & 264 \\ 44 & \end{array}$$

Extraer la raíz de $\frac{3}{8}$ convirtiéndolo previamente en decimal.

$$\sqrt{\frac{3}{8}} = \sqrt{0.375} = 0.612 = \frac{612}{1000} = \frac{153}{250}$$

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{0.3750} & 0.612 \\ 15.0 & 121 \\ 290.0 & 1222 \\ 45.6 & \end{array}$$

PREGUNTAS.—122. ¿A qué se llama cuadrado de un número? ¿Cómo se indica que un número se ha de elevar al cuadrado?—¿Qué se hace para elevar un número al cuadrado? ¿De cuántas decimales consta el cuadrado de un número compuesto de enteros y decimales?—¿De cuántas cifras consta el cuadrado de una decimal?—123. ¿Cuáles son las partidas de que consta el cuadrado de un número compuesto de decenas y unidades?—124. ¿A qué se llama raíz cuadrada de una cantidad?—¿Cómo se indica la raíz cuadrada?—125. ¿Cuál es la regla para extraer la raíz cuadrada de un número entero?—126. ¿Cómo se aproxima la raíz cuadrada de un entero por decimales cuando no es exacta?—127. ¿Cómo se extrae la raíz cuadrada de enteros juntos con decimales?—¿Cómo se extrae la raíz cuadrada de una decimal?—¿Cómo se hace la prueba de la raíz cuadrada?—128. ¿Cuántos casos se presentan en la extracción de la raíz cuadrada de los quebrados?—¿Cómo se ejecuta la operación en el primer caso?—¿Cómo se extrae la raíz cuadrada de un quebrado cuando uno de sus términos no tiene raíz exacta?—¿Cómo se extrae la raíz cuadrada de un quebrado cuando ninguno de sus términos la tiene exacta? ¿De qué otra manera puede extraerse la raíz cuadrada á un quebrado?

PROBLEMAS.

188. Elevar al cuadrado 793; id. $\frac{5}{11}$; id. $2\frac{3}{4}$.
 189. Elevar al cuadrado 2'032; id. 0'47.
 190. Elevar al cuadrado por sus partidas á 45; id. á 83.
 191. Extraer la raíz cuadrada de 11664; id. de 628849.
 192. Aproximando hasta las centésimas, extraer la raíz cuadrada de 639; id. de 580 hasta las milésimas.
 193. Extraer la raíz cuadrada de 8'8; id. de 0'899.
 194. Extraer la raíz cuadrada de $\frac{441}{16}$; id. de $\frac{16}{18}$; id. de $\frac{3}{15}$.
 195. Extraer la raíz cuadrada de $\frac{5}{7}$, convirtiéndolo previamente en decimal.

Cubo y raíz cúbica.

130. ELEVACIÓN DE UN NÚMERO AL CUBO.—Se llama *cubo ó tercera potencia de un número, el producto que resulta de multiplicarlo por su cuadrado*. En consecuencia, el cubo de un número es un producto formado por tres factores iguales. Por ejemplo: 125 es el cubo de 5, supuesto que 5×5^2 , ó $5 \times 5 \times 5 = 125$.

La elevación de un número al cubo, se indica poniendo el exponente 3 á la derecha y arriba de la cantidad, la cual suele colocarse debajo de una raya ó dentro de un paréntesis.

$$15^3, \text{ ó } \overline{15}, \text{ ó } (15)^3 = 3375,$$

se lee: 15 elevado al cubo, igual á 3375.

Un número se eleva al cubo multiplicándolo por su cuadrado, ó dos veces sucesivas por sí mismo.

Cuando el número es entero, también lo será su cubo. Si el número es quebrado, para obtener su cubo habrá que elevar separadamente su numerador y denominador, supuesto que para multiplicar los quebrados se multiplica numerador por numerador y denominador por denominador.

$$\left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{4^3}{5^3} = \frac{64}{125}$$

En este caso, el cubo es quebrado y menor que el propuesto, porque el producto de la multiplicación de los quebrados propios es menor que cualquiera de sus factores.

PREGUNTAS.—122. ¿A qué se llama cuadrado de un número? ¿Cómo se indica que un número se ha de elevar al cuadrado?—¿Qué se hace para elevar un número al cuadrado? ¿De cuántas decimales consta el cuadrado de un número compuesto de enteros y decimales?—¿De cuántas cifras consta el cuadrado de una decimal?—123. ¿Cuáles son las partidas de que consta el cuadrado de un número compuesto de decenas y unidades?—124. ¿A qué se llama raíz cuadrada de una cantidad?—¿Cómo se indica la raíz cuadrada?—125. ¿Cuál es la regla para extraer la raíz cuadrada de un número entero?—126. ¿Cómo se aproxima la raíz cuadrada de un entero por decimales cuando no es exacta?—127. ¿Cómo se extrae la raíz cuadrada de enteros juntos con decimales?—¿Cómo se extrae la raíz cuadrada de una decimal?—¿Cómo se hace la prueba de la raíz cuadrada?—128. ¿Cuántos casos se presentan en la extracción de la raíz cuadrada de los quebrados?—¿Cómo se ejecuta la operación en el primer caso?—¿Cómo se extrae la raíz cuadrada de un quebrado cuando uno de sus términos no tiene raíz exacta?—¿Cómo se extrae la raíz cuadrada de un quebrado cuando ninguno de sus términos la tiene exacta? ¿De qué otra manera puede extraerse la raíz cuadrada á un quebrado?

PROBLEMAS.

188. Elevar al cuadrado 793; id. $\frac{5}{11}$; id. $2\frac{3}{4}$.
 189. Elevar al cuadrado 2'032; id. 0'47.
 190. Elevar al cuadrado por sus partidas á 45; id. á 83.
 191. Extraer la raíz cuadrada de 11664; id. de 628849.
 192. Aproximando hasta las centésimas, extraer la raíz cuadrada de 639; id. de 580 hasta las milésimas.
 193. Extraer la raíz cuadrada de 8'8; id. de 0'899.
 194. Extraer la raíz cuadrada de $\frac{441}{16}$; id. de $\frac{16}{18}$; id. de $\frac{3}{15}$.
 195. Extraer la raíz cuadrada de $\frac{5}{7}$, convirtiéndolo previamente en decimal.

Cubo y raíz cúbica.

130. ELEVACIÓN DE UN NÚMERO AL CUBO.—Se llama *cubo ó tercera potencia de un número, el producto que resulta de multiplicarlo por su cuadrado*. En consecuencia, el cubo de un número es un producto formado por tres factores iguales. Por ejemplo: 125 es el cubo de 5, supuesto que 5×5^2 , ó $5 \times 5 \times 5 = 125$.

La elevación de un número al cubo, se indica poniendo el exponente 3 á la derecha y arriba de la cantidad, la cual suele colocarse debajo de una raya ó dentro de un paréntesis.

$$15^3, \text{ ó } \overline{15}, \text{ ó } (15)^3 = 3375,$$

se lee: 15 elevado al cubo, igual á 3375.

Un número se eleva al cubo multiplicándolo por su cuadrado, ó dos veces sucesivas por sí mismo.

Cuando el número es entero, también lo será su cubo. Si el número es quebrado, para obtener su cubo habrá que elevar separadamente su numerador y denominador, supuesto que para multiplicar los quebrados se multiplica numerador por numerador y denominador por denominador.

$$\left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{4^3}{5^3} = \frac{64}{125}$$

En este caso, el cubo es quebrado y menor que el propuesto, porque el producto de la multiplicación de los quebrados propios es menor que cualquiera de sus factores.

Si el número que se eleva al cubo consta de enteros y decimales, su cubo será un número mixto compuesto en la parte decimal de un número de cifras triple de las que formen el propuesto, porque el cuadrado contiene un número doble, y en el producto del cuadrado por el número propuesto se deben separar tantas decimales como hay en ambos factores juntos.

Cuando la cantidad que se eleva al cubo sólo es decimal, su cubo constará de un número triple de cifras decimales, y su valor será menor que el de la decimal propuesta.

131. PARTIDAS DE QUE CONSTA EL CUBO DE UN NÚMERO COMPUESTO DE DECENAS Y UNIDADES.—Si queremos elevar al cubo el número $75=70+5$, tendremos que multiplicarlo por su cuadrado, esto es:

$$(70+5)^3=(70+5)^2 \times (70+5).$$

pero como $(70+5)^2=70^2+2(70 \times 5)+5^2$ (123) tendremos que multiplicar las tres partes del cuadrado, primero por 70 y luego por 5, para formar el cubo de $70+5$; ejecutando esta multiplicación, tendremos:

$$\begin{array}{r} \text{por} \quad \begin{array}{c} (70+5)^2=70^2+2(70 \times 5)+5^2 \\ 70+5 \end{array} \\ \hline \text{producto por } 70=70^3+2(70^2 \times 5)+70 \times 5^2 \\ \text{id. por } 5=70^2 \times 5+2(70 \times 5^2)+5^3 \\ \hline \text{sumando } (70+5)^3=70^3+3(70^2 \times 5)+3(70 \times 5^2)+5^3 \end{array}$$

pero como 70 representa las decenas, y 5 las unidades del número 75 inferiremos: que el cubo de un número compuesto de decenas y unidades, consta de cuatro partidas: 1ª, cubo de las decenas; 2ª, tres veces de-

cenas cuadradas multiplicadas por las unidades; 3ª, tres veces decenas multiplicadas por las unidades cuadradas; y 4ª, cubo de las unidades.

Debe observarse: 1º, que decenas cúbicas producen millares, porque al multiplicar el cuadrado de las decenas, que expresa centenas, por decenas, que terminan en un cero, el producto ó cubo terminará en tres ceros; 2º, la segunda partida expresa centenas, porque decenas cuadradas producen centenas; 3º, la tercera partida compuesta de decenas multiplicadas por tres veces las unidades cuadradas, expresa decenas; 4º, el cubo de las unidades, consta de unidades simples, aunque se representen por más de un número. Vamos á elevar al cubo por sus partidas el número $64=60+4$.

$$\begin{array}{r} d^3=216000=60^3 \\ 3d^2 \times u=43200=3 \times 60^2 \times 4 \\ 3d \times u^2=2880=3 \times 60 \times 4^2 \\ u^3=64=4^3 \\ \hline 262144=64^3 \end{array}$$

132. RAÍZ CÚBICA.—Se llama raíz cúbica de un número, aquel que multiplicado por su cuadrado produce el propuesto.

Así, supuesto que $4 \times 4^2=64$, 4 será la raíz cúbica de 64.

La raíz cúbica de una cantidad se indica poniéndola debajo del signo radical con el número 3 entre las ramas del radical, á cuyo número se le llama índice de la raíz: $\sqrt[3]{872}$, se lee, raíz cúbica de 872.

133. Si se quiere determinar la raíz cúbica de 22.873.456, la operación se dispondrá y ejecutará como sigue:

$$\begin{array}{r}
 \sqrt[3]{22,873,456} \quad 283 \\
 2^3 = 8 \quad 12 \dots = 3.2^3 \\
 \hline
 148,73 \quad 2352 \dots = 3.(28)^3 \\
 3.(20)^3 \times 8 = 9600 \\
 3.(20) \times 8^2 = 3840 \\
 8^3 = 512 \\
 \hline
 13952 \\
 9214,56 \\
 3.(280)^3 \times 3 = 705600 \\
 3.(280) \times 3^2 = 7560 \\
 3^3 = 27 \\
 \hline
 713187 \\
 208269 \\
 \hline
 28 \\
 28 \\
 224 \\
 56 \\
 784 \\
 3 \\
 2352 \\
 3 \times (28)^2 = 2352 \\
 3 \times 28 = 84
 \end{array}$$

La resta..... 921 < 2436 - 1

Resulta que: $22873456 = (283)^3 + 208269$.

Dividida la cantidad en periodos de á tres guarismos, se ve que el mayor cubo contenido en el periodo 22 de la izquierda es 8, cuya raíz es 2; restando el cubo de la raíz, 8, de 22, se obtiene 14 por resta, á cuyo lado se baja el periodo 873; se separan las decenas y unidades, 148 se divide por 12, triple del cuadrado de las decenas de la raíz, y aunque el cociente

es 12, como este sólo debe constar de unidades, y si ponemos 9 no se pueden restar las tres partidas restantes de 14873, pondremos 8 por unidades. Se forman las tres últimas partidas del cubo de 28, y su suma, 13952, se resta de 14873, obteniéndose la resta 921. Si el guarismo 8 de las unidades de la raíz no es menor que el verdadero, la resta 921 no será mayor que 3 veces 28^2 más 3 veces 28, esto es:

$$921 < 3 \times 28^2 + 3 \times 28 + 1 \text{ ó } 921 < 2437.$$

Al lado de la resta 921, se baja el periodo 456: se separan las decenas y unidades, se divide 9214 por 2352, triple del cuadrado de la raíz hallada, y el cociente 3 se pone como unidades: se forman las tres últimas partidas del cubo de 283, y restando su suma 713187 de 921456, se obtiene la resta 208269, que es el exceso que tiene el número propuesto sobre el cubo de 283.

134. REGLA PARA EXTRAER LA RAÍZ CÚBICA.—Para ejecutar esta operación nos valemus de las cuatro partidas del cubo, y buscamos las partes de la raíz por medio de ellas.

Para extraer la raíz cúbica de un número, se divide en periodos de á tres cifras, contando de derecha á izquierda, pudiendo constar el último de la izquierda de uno, dos ó tres guarismos; se busca la raíz del mayor cubo contenido en el periodo de la izquierda, y se escribe á la derecha de la cantidad separándola por una raya vertical como en la división; se forma el cubo de la raíz hallada, y se resta del primer periodo de la izquierda. Al lado de la resta se baja el periodo siguiente; se separan los dos guarismos de la derecha, y los que quedan á la izquierda se dividen por el triple del cuadrado de la raíz hallada, poniendo el cociente como unidades al

lado del guarismo de la raíz; una vez encontradas las decenas y unidades de la raíz, se forman con ellas las tres partidas restantes del cubo, que son: tres veces decenas cuadradas multiplicadas por las unidades; tres veces decenas por el cuadrado de las unidades, y cubo de las unidades; se suman estas tres partidas y se resta la suma de la cantidad formada con la primera resta y el período bajado al lado de ella.

Si el guarismo de las unidades es mayor que el verdadero, la resta no podrá ejecutarse, y si es menor, la resta será mayor que la suma del triple del cuadrado de la raíz, más tres veces esta raíz. Al lado de la resta se baja el período siguiente, se separan los dos últimos guarismos, y se continúa la operación conforme a lo prescrito al fin del párrafo anterior.

Por cada período que se baja se pone 0 ó una cifra significativa en la raíz, y si la cantidad es un cubo perfecto, la última resta será 0.

EJEMPLOS.—¿Cuál es la raíz cúbica del núm. 15625? Conforme a la regla anterior, dispondremos y ejecutaremos la operación como sigue:

$$\begin{array}{r}
 \sqrt[3]{15,625} \quad 25 \\
 2^3 = 8 \quad 12 \\
 \hline
 3 \times 20^2 \times 5 \quad 60 \ 00 \\
 3 \times 20 \times 5^2 \quad 15 \ 00 \\
 5^3 \quad 1 \ 25 \\
 \hline
 76 \ 25 \\
 \hline
 0 \ 00
 \end{array}$$

La raíz cúbica de 15625 es 25.

¿Cuál es la raíz cúbica de 48.228,544?

$$\begin{array}{r}
 \sqrt[3]{48,228,544} \quad 364 \\
 3^3 = 27 \quad 27 = 3.3^3 \\
 \hline
 212,28 \quad 3888 = 3.36^3 \\
 3.30^3 \times 6 = 162 \ 00 \\
 3.30 \times 6^2 = 32 \ 40 \\
 6^3 = 2 \ 16 \\
 \hline
 196 \ 56 \\
 15 \ 72 \ 5,44 \\
 3.360^3 \times 4 = 15 \ 55 \ 200 \\
 3.360 \times 4^2 = 17 \ 280 \\
 4^3 = 64 \\
 \hline
 15 \ 72 \ 544 \\
 \hline
 0 \ 00 \ 000
 \end{array}$$

La raíz cúbica de 48.228,544 es 364.

135.—En los dos ejemplos anteriores la raíz cúbica fué exacta porque no hubo resta; pero cuando la hay y quiere aproximarse la operación por decimales, teniendo presente que una fracción decimal expresada por una sola cifra elevándola al cubo, produce milésimas, para obtener las décimas de la raíz es necesario reducir las unidades de la resta á milésimas, lo cual se consigne agregando tres ceros, y en seguida se continúa la operación conforme á la regla general. La aproximación se continúa, agregando tres ceros á cada una de las siguientes restas.

Sea como ejemplo extraer la raíz cúbica á 416.

$$\begin{array}{r}
 \sqrt[3]{416} \\
 7^3 \quad 343 \\
 \hline
 730,00 \\
 3 \times 70^2 \times 4 \quad 588,00 \\
 3 \times 70 \times 4^2 \quad 33,60 \\
 4^3 \quad 64 \\
 \hline
 622,24 \\
 107,760,00 \\
 3 \times 740^2 \times 6 \quad 98,568,00 \\
 3 \times 740 \times 6^2 \quad 799,20 \\
 6^3 \quad 216 \\
 \hline
 99,369,36 \\
 8,390,64
 \end{array}$$

la raíz cúbica de 416 es 7'46 y se tiene por resta 0'839064, supuesto que hemos agregado dos veces tres ceros.

REGLA PARA LA APROXIMACIÓN DE LA RAÍZ CÚBICA.—Cuando al concluir de extraer la raíz cúbica de un número, queda una resta y se quiere aproximar el resultado por decimales, se agregan sucesivamente tres ceros á cada resta, por cada decimal que se quiera obtener en la raíz, y se continúa la operación conforme á la regla general, hasta tener el grado de aproximación que se desea, teniendo cuidado de separar en la raíz con una coma la parte entera de la decimal.

Sea por ejemplo extraer la raíz cúbica de 12345.

$$\begin{array}{r}
 \sqrt[3]{12,345} \\
 8 \\
 \hline
 43,45 \\
 36,00 \\
 5,40 \\
 27 \\
 \hline
 178,000 \\
 158,700 \\
 690 \\
 1 \\
 \hline
 18,609
 \end{array}$$

$$12345 = (23'1)^3 + 18'609.$$

Ejecutando la operación conforme á la regla, se llega á obtener la raíz 23 y como resta 178. Para aproximar por decimales, se agregan tres ceros y se pone una coma á la derecha de 23 unidades de la raíz, y después se determinan las décimas, ejecutando la operación conforme á la regla general.

136. **EXTRACCIÓN DE LA RAÍZ CÚBICA DE LAS DECIMALES.**—Ocurren dos casos: cuando hay enteros juntos con decimales, ó cuando sólo hay decimales.

1.^{er} CASO.—Cuando hay enteros y decimales, antes de comenzar la operación, se examina si el número de cifras decimales es múltiplo de tres, teniendo cuidado cuando no lo es, de agregar á la derecha uno ó dos ceros para satisfacer esta condición. En seguida se extrae la raíz de los enteros, se pone una coma á la derecha de las unidades de la raíz, y luego se bajan sucesivamente los periodos decimales para determinar la parte decimal de la raíz.

Sea como ejemplo extraer la raíz cúbica de 36'4.

No siendo el número de decimales múltiplo de 3, comenzamos por hacerlo, agregando dos ceros, y en seguida ejecutamos la operación conforme á la regla.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt[3]{36'400} & 3'3 \\ 27 & 27 \\ \hline & 9'400 \\ & 8100 \\ & 810 \\ & 27 \\ \hline & 463 \end{array}$$

$$36'4 = (3'3)^3 + 0'463$$

2º caso.—Cuando sólo hay decimales, se comienza por hacer que el número de estas sea tres ó un múltiplo de tres, á cuyo fin se agregan, cuando sea necesario, uno ó dos ceros á la derecha. En seguida se pone cero en la raíz para representar su parte entera, una coma, y se extrae la raíz de las decimales, como si fueran enteros, por la regla general.

Si se quiere extraer la raíz cúbica de 0'7654, se comienza por agregar dos ceros á la derecha.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt[3]{0'765,400} & 0'91 \\ 729 & 243 \\ \hline & 364,00 \\ & 243 00 \\ & 270 \\ & 1 \\ \hline & 11829 \end{array}$$

$$0'7654 = (0'91)^3 + 0'011829.$$

Se pone 0 enteros en la raíz, y se determina la de la parte decimal que es 0'91,

La prueba de la raíz cúbica se hace elevando al cubo la raíz hallada, y agregando la resta debe obtenerse el número propuesto.

137.—EXTRACCIÓN DE LA RAÍZ CÚBICA DE LOS QUEBRADOS.—Ocurren tres casos: 1º, cuando los dos términos del quebrado tienen raíz exacta; 2º cuando sólo uno la tiene; y 3º, cuando ni el numerador ni el denominador tienen raíz exacta.

En el primer caso se extrae la raíz del numerador y la del denominador, y el quebrado formado con las raíces respectivas será la raíz cúbica del quebrado propuesto, supuesto que para elevar un quebrado al cubo, se eleva separadamente su numerador y su denominador.

$$\sqrt[3]{\frac{8}{64}} = \frac{2}{4}$$

En el segundo caso se extrae la raíz exacta al término que la tenga, y la del otro se aproxima por decimales. En el quebrado que se obtiene, se agregan al término entero tantos ceros como cifras decimales tenga el otro, se suprime la coma, y se simplifica el quebrado si es posible.

$$\sqrt[3]{\frac{8}{12}} = \frac{2}{2'2} = \frac{20}{22} = \frac{10}{11}$$

El tercer caso se reduce al segundo, multiplicando los dos términos del quebrado, por el cuadrado del numerador, ó por el cuadrado del denominador.

$$\sqrt[3]{\frac{5}{6}} = \sqrt[3]{\frac{5 \times 6^2}{6 \times 6^2}} = \sqrt[3]{\frac{180}{6^3}} = \frac{5'6}{6} = \frac{56}{60}$$

La raíz cúbica de un quebrado puede también obtenerse convirtiéndolo previamente en decimal y extrayéndole á esta la raíz cúbica, conforme á la regla dada en el número 136.

EjemPLOS.—Se quiere determinar la raíz cúbica del quebrado $\frac{19683}{32768}$.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt[3]{19,683} & 27 \\ 8 & 12 \\ \hline 116,83 & \\ 84,00 & \\ \hline 29,40 & \\ 3,43 & 8 \\ \hline 116,83 & 57,68 \\ 0,00 & 0,00 \end{array}$$

$$\sqrt[3]{\frac{19683}{32768}} = \frac{27}{32}$$

Extraer la raíz cúbica del quebrado $\frac{4}{27}$.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt[3]{82} & 4,3 \\ 64 & 48 \\ \hline 180,00 & \\ 144,00 & \\ \hline 10,80 & \\ 27 & \\ \hline 155,07 & \\ 24,93 & \end{array}$$

$$\sqrt[3]{\frac{64}{82}} = \frac{4}{4,3} = \frac{40}{43}$$

Extraer la raíz cúbica del quebrado $\frac{14}{18}$.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt[3]{\frac{14}{18}} = \sqrt[3]{\frac{14 \times 18^2}{18 \times 18^2}} = \sqrt[3]{\frac{4536}{18^3}} & \sqrt[3]{\frac{4,536}{18^3}} = \frac{16,5}{3} \\ 18,00 & 768 \\ 10,80 & \\ 2,16 & \\ \hline 30,96 & \\ 44,00,00 & \\ \hline 3840,00 & \\ 120,00 & \\ 1,25 & \\ \hline 3961,25 & \\ 438,75 & \end{array}$$

En consecuencia:

$$\sqrt[3]{\frac{14}{18}} = \frac{16,5}{18} = \frac{165}{180} = \frac{11}{12}$$

Extraer la raíz cúbica de $\frac{3}{4}$ convirtiéndolo previamente en decimal.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt[3]{\frac{3}{4}} = \sqrt[3]{0,75} & \sqrt[3]{0,750} = \frac{0,908}{2,43} \\ 729 & \\ \hline 210,000,00 & 24300 \\ 194,400,00 & \\ \hline 15,600,00 & \\ 5,12 & \\ \hline 196,133,12 & \\ 13,866,88 & \end{array}$$

PREGUNTAS.—130. ¿A qué se llama cubo de un número? ¿Cómo se indica que un número se ha de elevar á la tercera potencia? ¿Cómo se eleva al cubo un número? ¿De cuántas cifras consta en la parte decimal el cubo de un número compuesto de enteros y decimales? ¿De cuántas cifras consta el cubo de una decimal?—131. ¿Cuáles son las partidas del cubo de un número compuesto de decenas y unidades?—132. ¿A qué

se llama raíz cúbica de una cantidad? ¿Cómo se indica la raíz cúbica de un número?—134. ¿Cuál es la regla para extraer la raíz cúbica de un número entero?—135. ¿Cómo se aproxima la raíz cúbica de un número entero cuando no es exacta?—136. ¿Cómo se extrae la raíz cúbica de un entero junto con decimales? ¿Cómo se extrae la raíz cúbica a una decimal? ¿Cómo se hace la prueba de la raíz cúbica?—137. ¿Cuántos casos se presentan en la extracción de la raíz cúbica de los quebrados? ¿Cómo se extrae la raíz cúbica de un quebrado en el primer caso? ¿Cómo se extrae la raíz cúbica de un quebrado cuando uno de sus términos no tiene raíz exacta? ¿Cómo se extrae la raíz cúbica de un quebrado cuando ninguno de sus términos tiene raíz exacta? ¿De qué otro modo puede extraerse la raíz cúbica de un quebrado?

PROBLEMAS.

196. Elevar al cubo 365; id. $4\frac{1}{2}$; id. $4 + \frac{5}{8}$.
 197. Elevar al cubo 5'08; id. 0'375.
 198. Elevar al cubo por sus partidas á 25; id. 86.
 199. Extraer la raíz cúbica de 24389; idem de 636056.
 200. Aproximar la raíz cúbica de 75 hasta las centésimas.
 201. Extraer la raíz cúbica de 82'3; id. de 0'5855.
 202. Extraer la raíz cúbica de $\frac{514125}{834736}$; id. de $\frac{5}{8}$; id. de $\frac{5}{8}$.
 203. Extraer la raíz cúbica de $\frac{3}{12}$ convirtiéndolo previamente en decimal.

Razones y proporciones.

133.—Se llama razón á la relación que existe entre dos cantidades homogéneas que se comparan, y también se da este nombre al número que expresa la relación. Algunas veces que los términos de la razón son heterogéneos, se consideran como abstractos.

La comparación puede hacerse averiguando la diferencia que hay entre las dos cantidades, ó bien el número de veces que una contiene á la otra. Las cantidades que se comparan forman los términos de la razón, llamándose antecedente al primero y consecuente al segundo.

139.—RAZÓN ARITMÉTICA.—Se llama razón aritmética la diferencia que hay entre dos cantidades homogéneas.

La razón aritmética se indica poniendo un punto entre las dos cantidades que se comparan;

$$22 \cdot 14$$

se lee: 22 es á 14. Otras veces se indica poniendo el signo menos entre las dos cantidades: $22 - 14 = 8$. Las dos cantidades 22 y 14, forman los términos de la razón, llamándose á la primera, 22, antecedente, y á la segunda, 14, consecuente de la razón.

La razón aritmética no se altera cuando se agregan ó quitan á sus dos términos cantidades iguales.

140. RAZÓN GEOMÉTRICA.—Se llama razón geométrica el cociente que resulta de dividir una por otra dos cantidades homogéneas.

La razón geométrica, que suele llamarse por cociente, se indica poniendo dos puntos entre las cantidades comparadas;

$$24 : 8;$$

y se lee, 24 es á 8. Otras veces se indica en forma de quebrado poniendo el antecedente de la razón como numerador, así $\frac{24}{8}$, y en ambos casos se determina la razón dividiendo el antecedente por el consecuente.

La razón geométrica no se altera cuando se multiplican ó dividen sus dos términos por un mismo número.

141. PROPORCIONES.—Se llama proporción la igual-

se llama raíz cúbica de una cantidad? ¿Cómo se indica la raíz cúbica de un número?—134. ¿Cuál es la regla para extraer la raíz cúbica de un número entero?—135. ¿Cómo se aproxima la raíz cúbica de un número entero cuando no es exacta?—136. ¿Cómo se extrae la raíz cúbica de un entero junto con decimales? ¿Cómo se extrae la raíz cúbica a una decimal? ¿Cómo se hace la prueba de la raíz cúbica?—137. ¿Cuántos casos se presentan en la extracción de la raíz cúbica de los quebrados? ¿Cómo se extrae la raíz cúbica de un quebrado en el primer caso? ¿Cómo se extrae la raíz cúbica de un quebrado cuando uno de sus términos no tiene raíz exacta? ¿Cómo se extrae la raíz cúbica de un quebrado cuando ninguno de sus términos tiene raíz exacta? ¿De qué otro modo puede extraerse la raíz cúbica de un quebrado?

PROBLEMAS.

196. Elevar al cubo 365; id. $4\frac{1}{2}$; id. $4 + \frac{5}{8}$.
 197. Elevar al cubo 5'08; id. 0'375.
 198. Elevar al cubo por sus partidas á 25; id. 86.
 199. Extraer la raíz cúbica de 24389; idem de 636056.
 200. Aproximar la raíz cúbica de 75 hasta las centésimas.
 201. Extraer la raíz cúbica de 82'3; id. de 0'5855.
 202. Extraer la raíz cúbica de $\frac{514125}{834736}$; id. de $\frac{5}{8}$; id. de $\frac{5}{8}$.
 203. Extraer la raíz cúbica de $\frac{3}{12}$ convirtiéndolo previamente en decimal.

Razones y proporciones.

133.—Se llama razón á la relación que existe entre dos cantidades homogéneas que se comparan, y también se da este nombre al número que expresa la relación. Algunas veces que los términos de la razón son heterogéneos, se consideran como abstractos.

La comparación puede hacerse averiguando la diferencia que hay entre las dos cantidades, ó bien el número de veces que una contiene á la otra. Las cantidades que se comparan forman los términos de la razón, llamándose antecedente al primero y consecuente al segundo.

139.—RAZÓN ARITMÉTICA.—Se llama razón aritmética la diferencia que hay entre dos cantidades homogéneas.

La razón aritmética se indica poniendo un punto entre las dos cantidades que se comparan;

$$22 \cdot 14$$

se lee: 22 es á 14. Otras veces se indica poniendo el signo menos entre las dos cantidades: $22 - 14 = 8$. Las dos cantidades 22 y 14, forman los términos de la razón, llamándose á la primera, 22, antecedente, y á la segunda, 14, consecuente de la razón.

La razón aritmética no se altera cuando se agregan ó quitan á sus dos términos cantidades iguales.

140. RAZÓN GEOMÉTRICA.—Se llama razón geométrica el cociente que resulta de dividir una por otra dos cantidades homogéneas.

La razón geométrica, que suele llamarse por cociente, se indica poniendo dos puntos entre las cantidades comparadas;

$$24 : 8;$$

y se lee, 24 es á 8. Otras veces se indica en forma de quebrado poniendo el antecedente de la razón como numerador, así $\frac{24}{8}$, y en ambos casos se determina la razón dividiendo el antecedente por el consecuente.

La razón geométrica no se altera cuando se multiplican ó dividen sus dos términos por un mismo número.

141. PROPORCIONES.—Se llama proporción la igual-

dad de dos razones. La proporción será aritmética ó geométrica, según sea la clase de las razones que la forman.

Una proporción consta de cuatro términos: dos que forman la primera razón, y dos la segunda.

142.—PROPORCIÓN ARITMÉTICA.—*Se llama proporción aritmética, la igualdad de dos razones aritméticas.*

La proporción aritmética se indica como sigue:

$$11.7:9.5$$

y se lee: 11 es á 7, como 9 es á 5. Suele llamarse equidiferencia, é indicarse $11-7=9-5$.

Se llaman *antecedentes* en la proporción, á los números que en las razones que la constituyen, forman los antecedentes: 11 es el primer antecedente y 9 el segundo antecedente. Igual distinción se hace con los *consecuentes*. A 7 y á 5 se les llama *medios* de la proporción; y á 11 y 9 *extremos*, indicando estos últimos nombres, la posición relativa de los cuatro términos en la proporción. Se llama *proporción continua*, la que tiene los medios iguales, por ejemplo:

$$12.8:8.4;$$

en este caso, 8 es un medio aritmético entre los números 12 y 4, y la proporción suele indicarse de esta manera:

$$-12.8.4;$$

debiendo repetirse el término medio al leerla.

La propiedad fundamental de la proporción aritmética es, que la suma de los extremos es igual á la suma de los medios.

Recíprocamente, siempre que en cuatro cantidades la suma de dos de ellas sea igual á la de las otras dos, las

cuatro cantidades formarán una proporción aritmética, en la que los extremos serán dos de los sumandos y los medios serán los otros dos.

La propiedad fundamental nos sirve para resolver dos problemas: encontrar el cuarto término de una proporción cuando se conocen los otros tres; y hallar un medio aritmético entre dos cantidades.

Para encontrar el cuarto término de una proporción aritmética, si el término que se busca es un extremo, se suman los medios, y de la suma se resta el extremo conocido; si lo que se busca es un medio, se sumarán los extremos y se restará el medio conocido.

Si se quiere encontrar el cuarto término de una proporción aritmética, cuyos tres primeros son:

$$15.7:10.x.$$

sumaremos 7 y $10=17$, y de esta suma restaremos el extremo conocido 15, y como $17-15=2$, este número será el cuarto término de la proporción $15.7:10.2$. Lo mismo que se acostumbra en álgebra, aquí hemos representado por x la cantidad desconocida.

Para hallar un medio aritmético entre dos números dados, se suman estos y se toma la mitad de la suma.

Para hallar un medio aritmético entre los números 9 y 17, se suman $9+17=26$, y la mitad, 13, de 26, será el medio aritmético buscado.

$$9.13:13.17$$

143.—PROPORCIÓN GEOMÉTRICA.—*Se llama proporción geométrica, la igualdad de dos razones geométricas.*

La proporción geométrica se indica así:

$$24:8::27:9,$$

y se lee: 24 es á 8, como 27 es á 9. Se suele llamar

proporción por cociente, é indicarse, $\frac{2^4}{3} = \frac{2^7}{9}$, leyéndose siempre del mismo modo. Las denominaciones de antecedentes, consecuentes, medios, extremos, primera y segunda razón, son las mismas que en la proporción aritmética (142).

Se llama proporción geométrica continua, la que tiene los medios iguales, y suele indicarse así:

$$\div 16 : 8 : 4,$$

y se lee: 16 es á 8, como 8 es á 4.

La propiedad fundamental de la proporción geométrica, es que el producto de los extremos es igual al producto de los medios.

Recíprocamente, siempre que en cuatro cantidades el producto de dos de ellas sea igual al de las otras dos, las cuatro cantidades estarán en proporción geométrica, en la que los extremos serán dos de los factores, y los medios los otros dos.

La propiedad fundamental sirve para resolver dos problemas: encontrar un término cuando se conocen los otros tres: hallar un medio geométrico entre dos números dados.

Para encontrar un extremo en una proporción geométrica, se multiplican los medios y el producto se divide por el extremo conocido; para hallar un medio, se multiplican los extremos, y el producto se divide por el medio conocido.

Se quiere encontrar el cuarto término geométrico de

$$3 : 9 :: 7 : x.$$

Multiplicaremos los medios 7 y 9, y el producto 63 lo dividiremos por el extremo 3 conocido; el cociente 21 será el cuarto término de la proporción.

$$3 : 9 :: 7 : 21.$$

Esta regla es el fundamento de la resolución de los problemas que se llaman *regla de tres*, y de sus numerosas aplicaciones.

Para encontrar un medio geométrico entre dos números dados, se multiplican éstos, y al producto se le extrae la raíz cuadrada.

Se quiere encontrar un medio geométrico entre 4 y 16. Multiplicaremos $4 \times 16 = 64$, y extrayendo la raíz cuadrada á 64, igual á 8, este número será el medio geométrico buscado.

$$\div 4 : 8 : 16.$$

144.—Supuesto que la razón geométrica no se altera cuando se multiplican ó se dividen sus dos términos por un mismo número (140), y que proporción es la igualdad de dos razones (143), se infiere:

1º Que una proporción geométrica no se alterará cuando los términos de una ó de las dos razones que la forman, se multipliquen ó dividan por un mismo número.

Por ejemplo, si están en proporción las cantidades

$$6 : 8 :: 3 : 4$$

también lo estarán $12 : 16 :: 3 : 4$

$$60 : 80 :: 30 : 40$$

2º Una proporción no se altera cuando se multipliquen ó dividan por un mismo número los antecedentes.

Sea la proporción $12 : 15 :: 16 : 20$
Multiplicando los antecedentes $120 : 15 :: 160 : 20$

La primera razón se habrá hecho 10 veces mayor, pero como otro tanto ha sucedido con la segunda, es claro que subsistirá la proporción.

Si dividimos por 4 los antecedentes, tendremos:
 en lugar de $12 : 15 :: 16 : 20$
 $3 : 15 :: 4 : 20$

y la proporción subsistirá, supuesto que cada una de las dos razones que la forman es 4 veces menor que antes.

3^a Una proporción no se altera cuando se multiplican ó dividen por un mismo número los consecuentes.

Porque al multiplicar un consecuente, la razón disminuye, y al dividirlo aumenta, (70, 2^o, 4^o); pero como las dos razones sufren igual variación, subsistirá la proporción.

Se ve, pues, que una proporción puede simplificarse dividiendo por el mismo número: 1^o, los dos términos de una de sus razones; 2^o, sus cuatro términos; 3^o, los antecedentes, y 4^o, los consecuentes.

145.—TRASFORMACIONES QUE PUEDEN EFECTUARSE EN LA PROPORCIÓN GEOMÉTRICA.—Fundándonos en que siempre que en cuatro cantidades el producto de los extremos sea igual al de los medios, las cuatro cantidades estarán en proporción, podremos efectuar en una proporción dada las trasformaciones que se llaman: *alternar*, *invertir*, y *permutar*, y las cuales referiremos á la proporción

$$3 : 4 :: 6 : 8.$$

1^a *Alternar*, que es mudar de lugar los medios ó los extremos.

Por ejemplo, de $3 : 4 :: 6 : 8$.
 Alternando medios se obtiene $3 : 6 :: 4 : 8$.
 Alternando extremos $8 : 4 :: 6 : 3$.

2^a *Invertir*, que es poner los medios en lugar de los extremos, y éstos en lugar de aquellos,

Por ejemplo, de $3 : 4 :: 6 : 8$.
 Invirtiendo se obtiene $4 : 3 :: 8 : 6$.

3^a *Permutar* que es poner la primera razón en lugar de la segunda, y reciprocamente.

Por ejemplo, de $3 : 4 :: 6 : 8$.
 Permutando se obtiene $6 : 8 :: 3 : 4$.

Basta formar, ó indicar el producto de los extremos y de los medios en la proporción primitiva, y en cualquiera de las que ha resultado después de la trasformación, para persuadirse de que si primero el producto de los extremos era igual al de los medios, después también lo será.

Fundándonos en que mientras subsista la igualdad de las dos razones, subsistirá la proporción, podremos hacer en una proporción las trasformaciones que se llaman, *componer* y *dividir*.

4^a *Componer*, es comparar la suma del antecedente y consecuente, en cada razón, con el consecuente.

Por ejemplo, de $12 : 9 :: 8 : 6$.
 Componiendo se obtiene $12+9 : 9 :: 8+6 : 6$.

En esta trasformación, al agregar el divisor 9 al dividiendo 12, la primera razón ha aumentado una unidad: pero como lo mismo ha sucedido en la segunda razón, resulta que si antes eran iguales las dos razones, después de *componer* también lo serán.

5^a *Dividir*, es comparar la diferencia entre el antecedente y consecuente de cada razón con el consecuente.

Por ejemplo, de $12 : 9 :: 8 : 6$.
 Dividiendo se obtiene $12-9 : 9 :: 8-6 : 6$.

La proporción subsiste, porque han disminuido la primera y la segunda razón una unidad; luego si primero eran iguales las razones, después de dividir también lo serán. Demostraremos los siguientes teoremas:

I. Si se multiplican ordenadamente dos proporciones, los cuatro productos que resulten estarán igualmente en proporción.

Sean las proporciones

$$\begin{aligned} 3 : 4 &:: 6 : 8 \\ 5 : 2 &:: 10 : 4 \end{aligned}$$

y vamos á demostrar que estarán igualmente en proporción los productos

$$3 \times 5 : 4 \times 2 :: 6 \times 10 : 8 \times 4$$

poniendo cada proporción en forma de ecuación, se tendrá:

$$\begin{aligned} \frac{3}{4} &= \frac{6}{8} \\ \frac{5}{2} &= \frac{10}{4} \end{aligned}$$

y como si cantidades iguales se multiplican por iguales, los resultados también lo serán, se tendrá:

$$\frac{3}{4} \times \frac{5}{2} = \frac{6}{8} \times \frac{10}{4}$$

ejecutando la operación:

$$\frac{3 \times 5}{4 \times 2} = \frac{6 \times 10}{8 \times 4}$$

con cuyos valores podemos establecer la proporción

$$3 \times 5 : 4 \times 2 :: 6 \times 10 : 8 \times 4$$

que es lo que debíamos demostrar.

II. Cuando deban multiplicarse ordenadamente dos ó más proporciones, se podrán suprimir los factores que

sean comunes, 1º, á los dos términos de la misma razón; 2º, á los antecedentes; y 3º, á los consecuentes; multiplicándose los términos restantes.

$$\begin{array}{l} \text{Sea por multiplicar} \\ \text{las proporciones.} \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} 2 : (3) :: 4 : 6 \\ (3) : 9 :: (5) : 15 \\ (5) : 4 :: 10 : 8 \end{array} \right.$$

$$2 : 9 \times 4 :: 4 \times 10 : 6 \times 15 \times 8$$

En este ejemplo hemos suprimido el factor 3 porque era común á los términos de la primera razón, y hemos suprimido 5 por ser común á los antecedentes; pero debe tenerse cuidado de no suprimir ningún factor común á los medios ó á los extremos, como 4 en nuestro ejemplo.

III. La suma de los antecedentes es á la de los consecuentes, como un antecedente es á su consecuente.

$$\begin{array}{l} \text{Sea la proporción} \\ \text{Alternando medios} \\ \text{Componiendo} \\ \text{Alternando medios} \end{array} \quad \begin{array}{l} 4 : 3 :: 8 : 6 \\ 4 : 8 :: 3 : 6 \\ 4+8 : 8 :: 3+6 : 6 \\ 4+8 : 3+6 :: 8 : 6 \end{array}$$

y como 4 y 8 son los antecedentes y 3 y 6 son los consecuentes, resulta demostrado el teorema.

IV. La diferencia de los antecedentes es á la de los consecuentes, como un antecedente es á su consecuente.

$$\begin{array}{l} \text{Sea la proporción} \\ \text{Alternando medios} \\ \text{Dividiendo} \\ \text{Alternando medios} \end{array} \quad \begin{array}{l} 4 : 3 :: 8 : 6 \\ 4 : 8 :: 3 : 6 \\ 4-8 : 8 :: 3-6 : 6 \\ 4-8 : 3-6 :: 8 : 6 \end{array}$$

y como 4 y 8 son los antecedentes, y como 3 y 6 son los consecuentes, resulta el teorema demostrado.

PREGUNTAS.—138. ¿A qué se llama razón? ¿Cómo se llaman las cantidades que forman la razón?—139. ¿Qué se entiende por razón aritmética? ¿Cómo se indica la razón aritmética?—¿Qué sucede con la razón aritmética cuando á sus dos términos se les agregan ó quitan cantidades iguales?—140. ¿A qué se llama razón geométrica? ¿Cómo se indica la razón geométrica?—¿Qué sucede con la razón geométrica cuando se multiplican ó dividen sus dos términos por un mismo número?—141. ¿A qué se llama proporción?—142. ¿Qué se entiende por proporción aritmética? ¿Cómo se indica la proporción aritmética?—¿Cuáles son los nombres que se dan á los diferentes términos de una proporción?—¿A qué se llama proporción continua?—¿Cuál es la propiedad fundamental de la proporción aritmética?—¿En qué se conoce que cuatro cantidades pueden formar una proporción aritmética?—¿Cómo se determina el valor del cuarto término de una proporción aritmética?—¿Cómo se determina un medio aritmético entre dos números?—143. ¿A qué se llama proporción geométrica?—¿Cómo se indica la proporción geométrica?—¿A qué se llama proporción geométrica continua, y cómo se indica?—¿Cuál es la propiedad fundamental de la proporción geométrica?—¿En qué se conoce que cuatro cantidades pueden formar una proporción geométrica?—¿Qué se hace para encontrar el cuarto término de una proporción geométrica?—¿Cómo se determina el valor de un medio geométrico entre dos cantidades?—144. ¿Qué términos de una proporción geométrica pueden multiplicarse por un mismo número sin que se altere la proporción?—¿Qué términos de una proporción pueden dividirse por un mismo número sin que se altere la proporción?—¿De cuántas maneras puede simplificarse una proporción?—145. ¿A qué se llama *alternar* en una proporción?—¿A qué se llama *invertir*?—¿A qué se llama *permutar*?—¿A qué se llama *componer*?—¿A qué se llama *dividir*?—¿Cómo se demuestra que si se multiplican ordenadamente dos proporciones geométricas, los cuatro productos que resulten estarán igualmente en proporción?—Cuando se multiplican ordenadamente dos proporciones ¿de qué términos podrán suprimirse los factores que sean comunes?—¿Cómo se demuestra que la suma de los antecedentes es á la de los consecuentes, como un antecedente es á su consecuente?—¿Cómo se demuestra que la diferencia de los antecedentes es á la de los consecuentes, como un antecedente es á su consecuente?

PROBLEMAS.

204. Determinar el 4º término de la proporción $2 : 7 : 10 : x$.
205. Determinar el 4º término de la proporción $\frac{7}{12} : \frac{21}{3} : \frac{16}{3} : x$.
206. Hallar un medio aritmético entre 25 y 50,
207. Hallar un medio aritmético entre 854 y 16256.
208. Determinar el 4º término de la proporción $16 : 20 :: 30 : x$.
209. Determinar el tercer término de la proporción $\frac{8}{5} : \frac{3}{4} :: x : 13\frac{1}{2}$.
210. Encontrar un medio geométrico entre 9 y 64.
211. Encontrar un medio geométrico entre 81 y 25.
212. Simplificar la proporción: $54 : 72 :: 16 : x$.
213. Simplificar la proporción: $36 : 24 :: 96 : 64$.
214. Simplificar la proporción: $60 : 8 :: 240 : x$.
215. Simplificar la proporción: $7 : 75 :: x : 120$.

Regla de tres.

146.—PROBLEMA.—En una semana 10 caballos consumen tres cargas de cebada: en el mismo tiempo 25 caballos, ¿cuántas cargas consumirán?

Como si el número de caballos se duplica, se duplicará igualmente el número de cargas de cebada que consumirán, y como si se triplican los caballos, se triplicarán las cargas de cebada, se infiere que la misma relación que haya entre los números de los caballos, habrá entre las cargas consumidas, y por tanto, estas cantidades, por la naturaleza de la cuestión, serán pro-

PREGUNTAS.—138. ¿A qué se llama razón? ¿Cómo se llaman las cantidades que forman la razón?—139. ¿Qué se entiende por razón aritmética? ¿Cómo se indica la razón aritmética?—¿Qué sucede con la razón aritmética cuando á sus dos términos se les agregan ó quitan cantidades iguales?—140. ¿A qué se llama razón geométrica? ¿Cómo se indica la razón geométrica?—¿Qué sucede con la razón geométrica cuando se multiplican ó dividen sus dos términos por un mismo número?—141. ¿A qué se llama proporción?—142. ¿Qué se entiende por proporción aritmética? ¿Cómo se indica la proporción aritmética?—¿Cuáles son los nombres que se dan á los diferentes términos de una proporción?—¿A qué se llama proporción continua?—¿Cuál es la propiedad fundamental de la proporción aritmética?—¿En qué se conoce que cuatro cantidades pueden formar una proporción aritmética?—¿Cómo se determina el valor del cuarto término de una proporción aritmética?—¿Cómo se determina un medio aritmético entre dos números?—143. ¿A qué se llama proporción geométrica?—¿Cómo se indica la proporción geométrica?—¿A qué se llama proporción geométrica continua, y cómo se indica?—¿Cuál es la propiedad fundamental de la proporción geométrica?—¿En qué se conoce que cuatro cantidades pueden formar una proporción geométrica?—¿Qué se hace para encontrar el cuarto término de una proporción geométrica?—¿Cómo se determina el valor de un medio geométrico entre dos cantidades?—144. ¿Qué términos de una proporción geométrica pueden multiplicarse por un mismo número sin que se altere la proporción?—¿Qué términos de una proporción pueden dividirse por un mismo número sin que se altere la proporción?—¿De cuántas maneras puede simplificarse una proporción?—145. ¿A qué se llama *alternar* en una proporción?—¿A qué se llama *invertir*?—¿A qué se llama *permutar*?—¿A qué se llama *componer*?—¿A qué se llama *dividir*?—¿Cómo se demuestra que si se multiplican ordenadamente dos proporciones geométricas, los cuatro productos que resulten estarán igualmente en proporción?—Cuando se multiplican ordenadamente dos proporciones ¿de qué términos podrán suprimirse los factores que sean comunes?—¿Cómo se demuestra que la suma de los antecedentes es á la de los consecuentes, como un antecedente es á su consecuente?—¿Cómo se demuestra que la diferencia de los antecedentes es á la de los consecuentes, como un antecedente es á su consecuente?

PROBLEMAS.

204. Determinar el 4º término de la proporción $2 : 7 :: 10 : x$.
205. Determinar el 4º término de la proporción $\frac{7}{12} : \frac{21}{3} :: \frac{16}{3} : x$.
206. Hallar un medio aritmético entre 25 y 50,
207. Hallar un medio aritmético entre 854 y 16256.
208. Determinar el 4º término de la proporción $16 : 20 :: 30 : x$.
209. Determinar el tercer término de la proporción $\frac{8}{5} : \frac{3}{4} :: x : 13\frac{1}{2}$.
210. Encontrar un medio geométrico entre 9 y 64.
211. Encontrar un medio geométrico entre 81 y 25.
212. Simplificar la proporción: $54 : 72 :: 16 : x$.
213. Simplificar la proporción: $36 : 24 :: 96 : 64$.
214. Simplificar la proporción: $60 : 8 :: 240 : x$.
215. Simplificar la proporción: $7 : 75 :: x : 120$.

Regla de tres.

146.—PROBLEMA.—En una semana 10 caballos consumen tres cargas de cebada: en el mismo tiempo 25 caballos, ¿cuántas cargas consumirán?

Como si el número de caballos se duplica, se duplicará igualmente el número de cargas de cebada que consumirán, y como si se triplican los caballos, se triplicarán las cargas de cebada, se infiere que la misma relación que haya entre los números de los caballos, habrá entre las cargas consumidas, y por tanto, estas cantidades, por la naturaleza de la cuestión, serán pro-

porcionales. Si representamos por x el número de cargas de cebada que buscamos, podremos establecer la siguiente proporción geométrica:

$$\begin{array}{cccc} \text{cab.} & \text{cab.} & \text{cgs.} & \text{cgs.} \\ 10 & : 25 & :: 3 & : x \end{array}$$

y como conforme á lo explicado en las proporciones, para determinar el valor del cuarto término que se busca, hay que multiplicar los medios, 3 y 25, y dividir el producto por el extremo, 10, conocido, tendremos que

$$x = \frac{3 \times 25}{10} = 7\frac{1}{2} \text{ cargas de cebada,}$$

que será el consumo de los 25 caballos.

Se llama regla de tres, todo problema en que conocidos tres términos de una proporción geométrica, queda por determinar el cuarto.

Se conoce que una cuestión es de regla de tres, en que satisface las siguientes condiciones: 1.^a, que el enunciado del problema esté dividido en dos períodos; 2.^a, que los términos del primer período sean homogéneos respectivamente á los del segundo; 3.^a, que se conozcan tres cantidades y que se busque una; y 4.^a, que por la naturaleza del problema, las cantidades sean proporcionales.

En el problema propuesto, es fácil ver que están satisfechas las tres primeras condiciones, y respecto de la 4.^a observaremos que los caballos y las cargas de cebada consumidas son cantidades relativas, puesto que del número de los primeros depende el de las cargas, y además que si se multiplican por determinado número los caballos, resultarán las cargas multiplicadas por el mismo número, y esta circunstancia, que depende de la naturaleza de la cuestión, es lo que hace que las cantidades que la forman sean proporcionales.

Consideremos el siguiente ejemplo: caminando 12

leguas al día, ha tardado una persona 15 días para ir de una ciudad á otra; caminando 10 leguas ¿cuántos días empleará para recorrer la misma distancia?

En este problema las cantidades relativas son las leguas que se caminan diariamente y los días que se emplean; pero la naturaleza de la cuestión es tal, que si se duplica el número de leguas que se andan cada día, los días que se empleen para recorrer la distancia, serán la mitad de los que se emplearon antes; esto es, multiplicando por un número dado el camino recorrido diariamente, resultarán divididos por el mismo número los días necesarios para recorrer la distancia. Esta circunstancia es la que constituye que las cantidades del problema sean proporcionales. En el primer ejemplo están en razón directa, y en el segundo están en razón inversa, las cantidades relativas.

Cantidades relativas son las que están ligadas entre sí, de modo que el valor de una depende del que tenga la otra.

Para conocer si las cantidades relativas son proporcionales, se observará si, á causa de la naturaleza de la cuestión, multiplicando una de las cantidades por un número, su relativa debe resultar multiplicada unas veces, y dividida otras, por el mismo número.

Esta investigación es de la mayor importancia, porque la facilidad con que la regla de tres conduce á la determinación de una cantidad desconocida, hace que á veces se quiera aplicar indebidamente á algunos problemas.

147.—CASOS DE LA REGLA DE TRES.—En toda regla de tres, dos de las cantidades conocidas son homogéneas, y la otra es de la especie del número que se busca: además, las cantidades, generalmente de diversa especie, son relativas entre sí de dos en dos. Por ejemplo, si sabiendo que 30 varas de paño han costado 50

pesos, se quiere averiguar cuánto costarán 40 varas; en este caso, 30 varas y 50 pesos son cantidades *relativas*, así como 40 varas y el valor que se busca. Pues bien, en la regla de tres se presentan dos casos distintos: primero, cuando se observa que *aumentando* una de las cantidades, su *relativa aumenta*, y cuando *disminuyendo* una, su *relativa disminuye*; segundo, cuando la variación es en sentido contrario, esto es, que cuando una cantidad *aumenta*, su *relativa disminuye*, y cuando una cantidad *disminuye*, su *relativa crece* proporcionalmente á la disminución de la primera. En el primer caso, se dice que la regla de tres es *directa*, en el segundo caso que es *inversa*. Algunos ejemplos aclararán esto.

Si 20 hombres han hecho 35 varas de terraplén en un día, ¿30 hombres cuántas varas harán? Por la naturaleza del problema se comprende, que si el número de hombres que trabajan *aumenta*, igualmente *aumentará* el número de varas; por tanto; como de *más hombres* se van á buscar *más varas*, la regla de tres será *directa*.

Para hacer una obra, 20 hombres han empleado 5 días, 25 hombres ¿cuántos días emplearán? Aquí se observa que mientras *más* hombres trabajen, *menos* tiempo emplearán; en consecuencia, como de *más hombres* vamos á buscar *menos días*, la regla de tres será *inversa*.

Se llama *regla de tres directa*, aquella en que las cantidades relativas aumentan ó disminuyen juntamente, esto es, en la que de lo *más*, se va á buscar *más*, ó de lo *menos* se va á buscar *menos*.

Regla de tres inversa es aquella en que las variaciones de las cantidades relativas tienen lugar en sentido contrario; esto es, en la que de lo *más* se va á buscar lo *menos*, ó de lo *menos* se va á buscar lo *más*.

Se llama *regla de tres simple*, aquella en que se conocen tres cantidades y se busca una.

Regla de tres compuesta, es aquella en que se conocen más de tres cantidades, y se tiene que determinar una desconocida por medio de varias proporciones ligadas entre sí.

148.—RESOLUCIÓN DE LA REGLA DE TRES SIMPLE.—Cuando se ha averiguado que una cuestión debe resolverse por medio de una proporción, queda por determinar el lugar que cada cantidad debe ocupar en ella.

Se tiene costumbre de que el cuarto término sea la cantidad que se busca, y el tercero la cantidad de la misma especie que la incógnita: establecida así la segunda razón de la proporción, la primera razón la formarán las cantidades conocidas de la misma especie, y el orden de éstas lo determina la naturaleza de la cuestión; fundándonos en que en toda proporción geométrica, si un consecuente es mayor que su antecedente, el otro consecuente debe ser también mayor que su antecedente; y si un consecuente es menor que su antecedente, el otro consecuente también lo será.

Estos raciocinios siempre conducirán á colocar en el lugar correspondiente de una proporción los datos de un problema de regla de tres, que es lo que se llama *plantear* la cuestión; pero mucho se facilita la resolución determinando previamente si la regla de tres es *directa* ó *inversa*, y aplicando en seguida la siguiente:

REGLA PARA RESOLVER LA REGLA DE TRES, PLANTEANDO LA PROPORCIÓN.—La primera razón se formará con las dos cantidades homogéneas conocidas; poniendo como primer término, cuando la regla de tres sea *directa*, la cantidad relativa á la conocida de la misma especie que la incógnita, y cuando sea *inversa*, la relativa á la incógnita. La segunda razón se formará con la cantidad de la misma especie que la incógnita y con la incógnita.

Vamos á aplicar esta regla á un problema de regla de tres directa y á otro de inversa.

REGLA DE TRES DIRECTA.—Si 12 marcos de plata han costado 102 pesos, ¿8 marcos cuánto costarán? Generalmente se escriben los datos de la cuestión de la manera siguiente:

marcos.	\$
12	102
marcos.	
8	x

Siendo el problema de regla de tres directa, en razón de que menos marcos costarían menos pesos, formaremos la primera razón con las dos cantidades homogéneas conocidas, teniendo cuidado de poner como primer término 12 marcos que es la cantidad relativa á 102 pesos, cantidad de la especie de la incógnita, estableciendo así la proporción:

$$\begin{array}{c} \text{marcos.} \\ 12 : 8 :: 102 : x \end{array}$$

Para cerciorarnos de que está bien planteada la proporción raciocinaremos como sigue: debiendo ser, por la naturaleza de la cuestión, el valor de la incógnita x menor que \$102, en la primera razón deberá también ser el consecuente 8 marcos menor que el antecedente 12 marcos, y estando bien establecidos los términos de la proporción, el valor que buscamos será:

$$x = \frac{102 \times 8}{12} = 68$$

REGLA DE TRES INVERSA.—Trabajando un hombre diariamente 6 horas, ha empleado 12 días para hacer una obra; trabajando 8 horas, ¿cuántos días empleará?

horas.	días.
6	12
horas.	
8	x

Supuesto que trabajando *más* horas diariamente, se emplearán *menos* días para hacer la misma obra, la

regla de tres será inversa, y aplicando la regla dada, formaremos la primera razón con las cantidades homogéneas conocidas, teniendo cuidado de poner como primer término, 8 horas, que es la relativa á la incógnita, estableciendo la proporción como sigue:

$$\begin{array}{c} \text{hs.} \quad \text{hs.} \quad \text{días.} \\ 8 : 6 :: 12 : x \end{array}$$

Nos cercioraremos de que está bien planteada la proporción raciocinando como sigue: debiendo ser, por la naturaleza de la cuestión, el valor de la incógnita x menor que 12 días, en la primera razón deberá ser igualmente el consecuente 6 horas menor que su antecedente 8 horas. Estando bien establecidos los términos de la proporción, el valor que buscamos será:

$$x = \frac{12 \times 6}{8} = 9 \text{ días.}$$

149.—MÉTODO DE REDUCCIÓN A LA UNIDAD.—Supuesto que regla de tres es una cuestión en la que conociendo tres términos de una proporción geométrica se trata de determinar el cuarto, el método fundamental para resolver esta clase de problemas, es plantear la proporción y calcular el valor de la cantidad desconocida; pero en aritmética se emplea también otro procedimiento, que vamos á explicar, el cual evita la clasificación de si la regla de tres es directa ó inversa y transforma estos problemas en aplicaciones del uso de la multiplicación: conocido el valor de una unidad determinar el de muchas; y del uso de la división: conocido el valor de varias unidades determinar el de una.

EJEMPLO.—12 marcos de plata han costado 102 pesos: 8 marcos ¿cuántos pesos costarán?

Dispondremos los datos del problema como sigue:

12 marcos han costado \$102

8 marcos costarán x

Al principio prescindiremos del segundo periodo y

fiándonos en el primero, diremos: si 12 marcos han costado \$102, un marco costará 12 veces menos, esto es:

$$1 \text{ marco costará } \dots \$ \frac{102}{12}$$

En seguida, tomando en consideración el segundo periodo de la cuestión, diremos:

$$\text{si 1 marco cuesta } \dots \$ \frac{102}{12},$$

$$8 \text{ marcos costarán } \dots \$ \frac{102 \times 8}{12} = \$68$$

EJEMPLO.—12 albañiles han hecho una pared en 15 días; trabajando 18 albañiles ¿cuántos días emplearán para hacer otra pared igual?

Para hacer una pared 12 albañiles han empleado 15 días

" 18 " emplearán x

Fijándonos en el primer periodo, diremos: si trabajando 12 albañiles para hacer una pared emplean 15 días, un albañil habría empleado 12 veces más días, esto es,

$$1 \text{ albañil empleará } \dots \overset{\text{días}}{15} \times 12$$

Considerando el segundo periodo de la cuestión, diremos: si 1 albañil emplea 15×12 días para hacer una pared

$$18 \text{ albañiles emplearán } \dots \overset{\text{días}}{\frac{15 \times 12}{18}} = 10 \text{ días.}$$

REGLA PARA RESOLVER LOS PROBLEMAS DE REGLA DE TRES POR EL MÉTODO DE REDUCCIÓN A LA UNIDAD.—*En el primer periodo de la cuestión se determinará el valor de una unidad de la cantidad relativa á la conocida de igual especie que la incógnita; en seguida, considerando el segundo periodo, se calculará el valor de la cantidad relativa á la incógnita.*

Es conveniente limitarse á indicar los cálculos y simplificar el valor de la incógnita antes de ejecutar las operaciones.

EJEMPLOS.—10 esterios de arena pesan 24 toneladas
35 esterios ¿cuántas toneladas pesarán?

Si 10 esterios pesan 24 toneladas

$$1 \text{ esterio pesará } \frac{24 \text{ ton.}}{10}$$

$$\text{y 35 esterios pesarán } \frac{24 \times 35}{10} = 84 \text{ toneladas.}$$

Estudiando 5 páginas al día se repasa el curso en 60 días; estudiando 6 páginas ¿en cuántos días se repasaría?

$$\begin{array}{rcl} 5 \text{ páginas} & 60 \text{ días} \\ 6 & " & x \end{array}$$

Si estudiando 5 páginas se hace el repaso en 60 días
estudiando 1 página se hará en 60 ds. $\times 5$

$$\text{y estudiando 6 páginas se hará en } \frac{60 \text{ ds.} \times 5}{6} = 50 \text{ ds.}$$

150.—PRUEBA DE LA REGLA DE TRES SIMPLE.—Se comprueba la regla de tres, poniendo en lugar de la incógnita el número encontrado, y considerando como incógnita uno de los números conocidos, debe encontrarse este como resultado.

151.—RESOLUCIÓN DE LA REGLA DE TRES COMPUESTA.—PROBLEMA.—En 2 horas, 20 peones han transportado 180 bultos; en 6 horas, 15 peones, ¿cuántos bultos transportarán?

Como en *doble* número de horas se transportarán *doble* número de bultos, se infiere que la misma relación que existe entre las horas de trabajo, habrá entre los números de bultos transportados, y por tanto, que siendo estas cantidades proporcionales, suponiendo que los

peones que trabajan en los dos casos sean los mismos, bastará determinar el cuarto término de la proporción:

$$\begin{array}{cccc} \text{horas} & \text{horas} & \text{bultos} & \text{bultos} \\ 2 & : & 6 & :: 180 : x \end{array}$$

para obtener los bultos que se trasportarían en 6 horas, esto es,

$$x = \frac{180 \times 6}{2} = 540 \text{ bultos.}$$

Ahora, como *doble* número de peones trasportan en el mismo tiempo *doble* número de bultos, se infiere que la misma relación que existe entre los números de peones, habrá entre los bultos trasportados y por tanto, que siendo estas cantidades proporcionales, bastará determinar el 4º término de la proporción:

$$\begin{array}{cccc} \text{peones} & \text{peones} & \text{bultos} & \text{bultos} \\ 20 & : & 15 & :: 540 : x' \end{array}$$

para obtener el valor que buscamos, esto es,

$$x' = \frac{540 \times 15}{20} = 405 \text{ bultos.}$$

tal será el número de bultos que trasportarán en 6 horas 15 peones.

Son problemas de regla de tres compuesta, aquellos en los que conociéndose más de tres números, se tiene que determinar el valor de la incógnita por medio de varias proporciones ligadas entre sí. *Para que la cuestión sea de regla de tres compuesta, se necesita que conste de dos periodos formados de números homogéneos de dos en dos, y proporcionales, habiendo un término conocido de la especie de la incógnita.*

Por ejemplo:

Si 10 hombres han hecho en 20 días una zanja de 200 metros de largo; 25 hombres en 18 días ¿cuántos metros harán?

ha.	ds.	metros.
10	20	200
25	18	x

El método natural para resolver la regla de tres compuesta, es suponer por un momento iguales algunas de las cantidades homogéneas de la cuestión, menos dos, con las cuales, y con la cantidad de la especie de la incógnita, se establece una regla de tres y se obtiene un primer resultado. En seguida, con otras dos de las cantidades de la misma especie y el cuarto término hallado en la primera proporción, se forma una segunda proporción, y se obtiene un segundo resultado, y así sucesivamente se van estableciendo tantas proporciones como sean necesarias, planteando cada una, según sea el caso, como regla de tres directa ó como inversa.

Este método se simplifica en la práctica, omitiendo la resolución de cada proporción; planteando previamente todas, multiplicándolas ordenadamente y haciendo las abreviaciones posibles antes de resolver la proporción final, de la manera siguiente: (145—I)

$$\begin{array}{l} 10 : 25 :: 200 : x \\ 20 : 18 :: x : x' \\ 10 \times 20 : 25 \times 18 :: 200 \times x : x \times x' \end{array}$$

La segunda razón la abreviaremos dividiendo sus términos por x , y en seguida dividiremos los antecedentes sucesivamente por 10 y por 20, y quedará: (144—II)

$$1 : 25 \times 18 :: 1 : x' = 450 \text{ metros.}$$

En lo expuesto se funda la siguiente:

REGLA PARA RESOLVER LA REGLA DE TRES COMPUESTA.—
Se escriben los datos del problema, poniendo las cantidades de la misma especie unas debajo de otras: se suponen iguales las cantidades homogéneas, menos dos de ellas, con las cuales y con el término de la especie de la incógnita se forma una proporción, designando por x el cuarto término; en seguida, con otras de las cantidades

homogéneas y el cuarto término de la primera proporción, que pasa á tercero, se forma una segunda, designando por x' su cuarto término, y así se continúa estableciendo proporciones hasta haber hecho entrar todos los datos del problema.

Cada regla de tres simple se planteará conforme á la regla correspondiente, según sea directa ó inversa. En seguida se multiplican ordenadamente las proporciones establecidas, indicando solamente las multiplicaciones, y antes de resolver la proporción final, se hacen las abreviaciones posibles, suprimiendo los factores comunes á los términos de la segunda razón, á los de la primera, y á los antecedentes.

EJEMPLO.—30 hombres han hecho una pared de 120 varas de largo y 22 pulgadas de espesor en 7 días, trabajando 8 horas diarias: ¿en cuántos días harán 40 hombres una pared de 150 varas de largo y 28 pulgadas de espesor, trabajando 10 horas al día?

$$\begin{array}{ccccccc} \text{hs.} & \text{vs.} & \text{ps.} & \text{ds.} & \text{hs.} & & \\ 30 & -120 & -22 & -7 & -8 & & \\ \text{hs.} & & & & & & \\ 40 & -150 & -28 & -x & -10 & & \end{array}$$

La resolución será como sigue:

$$\begin{array}{l} 40 : 30 :: 7^{\text{ds.}} : x \\ 120 : 150 :: x : x' \\ 22 : 28 :: x' : x'' \\ 10 : 8 :: x'' : x''' \\ 40 \times 120 \times 22 \times 10 : 30 \times 150 \times 28 \times 8 :: 7 : x''' \\ 4 \times 12 \times 22 \times 10 : 3 \times 15 \times 28 \times 8 :: \\ 1 \times 3 \times 22 \times 2 : 3 \times 3 \times 7 \times 2 :: \\ 1 \times 22 \times 1 : 1 \times 3 \times 7 \times 1 :: 7 : x''' \\ x''' = \frac{3 \times 7 \times 7}{22} = 6 \text{ días } \frac{15}{22} \end{array}$$

152.—Si para la resolución de la regla de tres compuesta se quiere aplicar el

MÉTODO DE REDUCCIÓN Á LA UNIDAD, considerando sucesiva y separadamente cada una de las reglas de tres simples de que se compone el problema, se determinará primero el valor de una unidad del término que, en el primer período del enunciado de la cuestión, es relativo á la cantidad de la misma especie que la incógnita, y en seguida se calculará el valor de la cantidad que en el segundo período es relativa á la incógnita, y así se continuará el cálculo, indicando solamente las operaciones hasta haber tomado en consideración todos los datos del problema. En la expresión final se harán las simplificaciones posibles.

Aplicaremos este método al ejemplo anterior:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{hs.} & \text{vs.} & \text{ps.} & \text{ds.} & \text{horas.} & & \\ 30 & -120 & -22 & -7 & -8 & & \\ 40 & -150 & -28 & -x & -10 & & \end{array}$$

y se dice:

si 30^{hs.} hacen una pared en 7 días
1 la hará en $\frac{7 \times 30}{40}$ ds.

y 40 la harán en $\frac{7 \times 30}{40}$ ds.

Considerando la 2.^a regla de tres, diremos:

si 120 se hacen en $\frac{7 \times 30}{40}$ ds.

1 vara se hará en $\frac{7 \times 30}{40 \times 120}$

y 150 se harán en $\frac{7 \times 30 \times 150}{40 \times 120}$ ds.

En la 3.^a regla de tres, diremos:

si 22 se hacen en $\frac{7 \times 30 \times 150}{40 \times 120}$ ds.

1 pulgada se hará en

$$\frac{7 \times 30 \times 150}{40 \times 120 \times 22} \text{ ds.}$$

y 28 se harán en

$$\frac{7 \times 30 \times 150 \times 28}{40 \times 120 \times 22} \text{ ds.}$$

En la 4.^a regla de tres, diremos:

si trabajando ^{horas} Sal día se emplean $\frac{7 \times 30 \times 150 \times 28}{40 \times 120 \times 22} \text{ ds.}$

" 1 al día se emplearán $\frac{7 \times 30 \times 150 \times 28 \times 8}{40 \times 120 \times 22} \text{ ds.}$

y " 10 al día se emplearán $\frac{7 \times 30 \times 150 \times 28 \times 8}{40 \times 120 \times 22 \times 10} \text{ ds.}$

El valor definitivo de la incógnita es pues:

$$x = \frac{7 \times 30 \times 150 \times 28 \times 8}{40 \times 120 \times 22 \times 10} \text{ días} = 6 + \frac{15}{22}$$

153.—PRUEBA DE LA REGLA DE TRES COMPUESTA.—La prueba de esta operación se ejecuta comunmente, poniendo en lugar de la incógnita el número encontrado y considerando como incógnita otro de los números dados. Si la operación y la prueba se han ejecutado sin equivocación, deberá encontrarse como resultado, el número que se tomó por incógnita.

154.—REGLA DE COMPAÑÍA.—Esta operación tiene por objeto determinar la parte que corresponde á cada uno de varios socios, de la ganancia ó pérdida que la compañía ha tenido, y siendo la utilidad ó pérdida de cada compañero proporcional al capital introducido y al

tiempo que lo haya tenido en giro, estos problemas pertenecen al dominio de la regla de tres. Se consideran dos casos: 1.^o, la regla de compañía simple, esto es, cuando todos los capitales han permanecido en el giro el mismo tiempo; y 2.^o, la regla de compañía compuesta, que es cuando los socios han tenido su capital en el fondo común, tiempos desiguales.

1.^o Tres socios han puesto: el primero 2,000 pesos; el segundo, 4,000 pesos; y el tercero, 3,000 pesos; al disolverse la sociedad, encuentran que ha habido una pérdida de 495 pesos, y se quiere saber cuánto debe perder cada socio. La operación se dispone y ejecuta como sigue:

\$ 2000	
4000	\$ 495 pérdida total.
3000	
\$ 9000	capital social.
9000 : 2000 :: 495 : x=110	
9000 : 4000 :: 495 : x=220	
9000 : 3000 :: 495 : x=165	
	\$ 495

Sumando los capitales ó puestas de los tres socios, se obtienen 9000 pesos, de cuyo capital se ha tenido la pérdida de 495 pesos; y como la parte correspondiente á cada asociado será proporcional á su puesta, para determinar la pérdida del primer socio, establecemos la proporción:

$$9000 : 2000 :: 495 : x,$$

y se obtiene 110 pesos. De la misma manera se determinan las pérdidas 220 y 165 pesos, que corresponden al segundo y tercer asociados, debiendo ser la su-

ma de las pérdidas parciales igual á la total, si no se ha cometido alguna equivocación.

REGLA.—*Para resolver la regla de compañía simple, se establecen las proporciones necesarias, como sigue; el capital social, es al capital de cada compañero, como la ganancia ó pérdida total, es á la parte correspondiente á cada socio.*

2º En la regla de compañía compuesta, los capitales permanecen en la sociedad tiempos desiguales. Tres socios han tenido en un giro mercantil la utilidad de 900 pesos, habiendo puesto el primero 2,000 pesos durante 9 meses; el segundo, 3,000 pesos durante 10 meses; y el tercero, 4,000 pesos durante 12 meses; se quiere saber la parte de la utilidad que corresponde á cada socio.

		meses
\$ 900 de utilidad.....	2000	9
	3000	10
	4000	12

Siendo los tiempos desiguales, comenzaremos por igualarlos, y para esto, determinaremos el capital que habría producido la misma utilidad durante un mes. Si con 2,000 pesos se ha obtenido cierta utilidad en 9 meses, para obtenerla en un mes, se necesita un capital 9 veces mayor, esto es, 18,000 pesos. Igualmente se necesita el capital $3,000 \times 10$ para obtener la utilidad del segundo socio en un mes, y $4,000 \times 12$ para la del tercero. Una vez hecho esto, la regla de compañía compuesta se ha reducido á simple, y por medio de las correspondientes proporciones, se determina la parte de cada socio, y la suma de estas partes será igual á la utilidad total, siempre que no se haya cometido algún error en la operación.

$$\begin{aligned} 2000 \times 9 &= 18000 \\ 3000 \times 10 &= 30000 \\ 4000 \times 12 &= 48000 \end{aligned}$$

$$\frac{96000}{96000} : 18000 :: 900 : x = 168.75$$

$$\frac{96000}{96000} : 30000 :: 900 : x = 281.25$$

$$\frac{96000}{96000} : 48000 :: 900 : x = 450.00$$

$$\$ 900.00$$

REGLA.—*Para resolver la regla de compañía compuesta, se multiplica cada puesta por el tiempo que ha estado en la sociedad, y se establece una proporción formada como sigue: la suma de los productos de las puestas por sus tiempos, es al producto de cada puesta por su tiempo, como la utilidad ó pérdida total, es á la parte que corresponde á cada socio.*

PROBLEMA.—Una persona ha comprado efectos por valor de 4,500 pesos; pero no pudiendo hacer el pago al contado, ofrece hacerlo á los 5 meses de la fecha, en lo cual conviene el vendedor con la condición de que se le pague el 2 por ciento mensual por el plazo que concede. Se quiere saber ¿cuánto importa el interés de 4,500 pesos en 5 meses al 2 por ciento?

Cuando se estipula como en este ejemplo, que el interés es de 2 por ciento mensual, significa que se ha de pagar 2 pesos por 100, y por cada mes que se retrarde el pago.

Ahora bien, si por 100 pesos se pagan 2 pesos de interés, es claro que por una suma dos ó tres veces mayor que 100 pesos se pagará respectivamente dos ó tres veces dos pesos. Igualmente si en un mes se pagan 2 pesos, en 5 meses se pagarán 5 veces 2 pesos. En resumen, siendo las cantidades del problema proporcionales, en realidad es una cues-

tión de regla de tres compuesta que resolveremos como sigue:

Si por 100 pesos se pagan 2, por 4,500 pesos ¿cuánto se pagará?

$$100 : 4500 :: 2 : x = \frac{2 \times 4500}{100} = 90.$$

Ahora, si en un mes se pagan 90 pesos, ¿en 5 meses cuánto se pagará?

$$\begin{matrix} \text{mes} & \text{meses} \\ 1 : 5 :: 90 : x' = \frac{5 \times 90}{1} = 450 \end{matrix}$$

155.—REGLA DE INTERÉS.—La regla de interés tiene por objeto determinar lo que se debe por una cantidad de dinero puesta á rédito, y no es más que una aplicación de la regla de tres.

Si un capital se impone al 6 por ciento anual, esto significa que por 100 pesos debe pagarse el interés de 6 pesos cada año, y se indica así: 6_o/o.

Si se quiere saber cuánto producirán de interés 20000, pesos al 9 por ciento anual, una proporción nos dará el valor que buscamos.

$$100 : 20000 :: 9 : x = \frac{20000 \times 9}{100} = 1800$$

Se ve, pues, que para determinar el interés de una suma en la unidad del tiempo, basta multiplicarla por el número que indica el tanto por ciento, y separar dos cifras á la derecha en el producto como decimales.

Cuando se quiere determinar el interés de una suma en un tiempo diferente del de la unidad, es necesario establecer una segunda proporción con los tiempos, y resolver el problema como regla de tres compuesta.

Se quiere saber cuánto se deberá por el interés de 8,000 pesos al 1 $\frac{3}{4}$ por ciento mensual al cabo de 8 meses 20 días.

Reduciendo los tiempos á días, y considerando los meses de 30 días, según la costumbre del comercio, resolveremos la regla de tres compuesta como sigue:

$$\begin{matrix} * 100 : * 8000 :: 1\frac{3}{4} : x \\ \text{ds. } 30 : \text{ds. } 260 :: x' : x' \end{matrix}$$

$$100 \times 30 : 8000 \times 260 :: 1\frac{3}{4} : x' = 1\frac{3}{4} \times \frac{8000 \times 260}{100 \times 30}$$

$$x' = 1213'33$$

Se ve que para determinar el interés de una suma en un tiempo diverso del de la unidad, se multiplica la suma por el interés y por el tiempo, el producto se divide por la unidad de tiempo, y se separan dos decimales en el resultado.

156.—REGLA DE DESCUENTO.—PROBLEMA.—Una persona debe entregar 3,000 pesos á 2 años de la fecha, y queriendo hacer el pago en el acto, se conviene en que lo haga abonándole un descuento de 6_o/o anual. Se quiere saber qué cantidad deberá entregar al contado en lugar de 3,000 pesos á los dos años.

Convenido el interés de 6_o/o anual, 100 pesos en 2 años se convierten en 112; luego si en vez de recibir 112 pesos á los dos años se reciben 100 al contado; en lugar de 3,000 pesos ¿cuánto se recibirá? El problema es una regla de tres que se planteará y resolverá como sigue:

$$112 : 100 :: 3000 : x = 2678'57$$

tal sería la suma que debería entregarse al contado.

PROBLEMA.—Una persona debe pagar 2,800\$ á 6 meses de la fecha, y su acreedor le ofrece hacerle un

descuento de $1\frac{1}{2}\%$ mensual, si le paga al contado. Se quiere calcular el importe del descuento.

Una vez que por un mes se descuenta $1\frac{1}{2}\%$, por 6 meses se descontarán $9\% = 1\frac{1}{2}\% \times 6$. Ahora si por 100\$ se descuenta 9, por 2,800 ¿cuánto se descontará?

$$100 : 2800 :: 9 : x = 252$$

Por tanto, el descuento importa 252\$ y en vez de pagar 2,800 pesos á los 6 meses, se pagarán al contado $2,800 - 252 = 2,548\$$.

El objeto de la regla de descuento es determinar la parte que puede recibirse al contado de una suma que debería percibirse á cierto plazo, descontando el interés correspondiente al tiempo por el cual se anticipa el pago.

Si se tiene, por ejemplo, una libranza que vence á los 7 meses de la fecha por valor de \$5,000, y se quiere recibir la parte correspondiente de su importe desde luego, abonando por el anticipo el premio de 1 por ciento mensual, resolveremos el problema como sigue.

Supuesto que el interés mensual es 1 por ciento, en 7 meses será 7 por ciento, y veremos que se deben recibir 100 pesos al contado en lugar de 107 al plazo de 7 meses, por lo cual estableceremos la siguiente proporción:

$$107 : 5000 :: 100 : x = \frac{500000}{107} = 4672.90$$

Si la operación está bien hecha, esta suma de 4672.90 pesos, debe producir en 7 meses al uno por ciento mensual, lo bastante para convertirse en 5,000 pesos. Este descuento se llama *interior*, y es poco usado en el comercio.

Comunmente la operación se hace fijando el descuento mensual sobre 100 pesos. En consecuencia, convenido el descuento de 1 por 100 al mes, por \$100 paga-

deros á 7 meses, sólo se recibirán 93 al contado, y la proporción se establece como sigue:

$$100 : 5000 :: 93 : x = 93 \times \frac{5000}{100} = 4650$$

Esta operación que es la usada en el comercio, se llama descuento *exterior*, y se comprueba calculando directamente el descuento y agregándolo á la suma hallada, debe dar 5,000 pesos. Si por \$100 se descuentan 7, por 5,000 ¿cuánto se descontará?

$$100 : 7 :: 5000 : x = 350.$$

$$350 + 4650 = 5000 \text{ pesos.}$$

157. REGLA CONJUNTA Y DE CAMBIO.—*Esta operación tiene por objeto resolver fácilmente algunos problemas de regla de tres compuesta, cuyos datos todos están ligados entre sí únicamente por equivalencias.*

Por ejemplo, se quiere saber á cuántas varas son iguales 18 yardas, en el concepto de que 3'28 yardas equivalen á 3 metros y de que 4'19 metros son iguales á 5 varas. El problema puede resolverse como regla de tres compuesta, pero haciendo uso del procedimiento de la regla conjunta, dispondremos los datos como sigue.

$$\begin{array}{ll} x & \text{varas} = 18 \text{ yardas.} \\ 3'28 & \text{yardas} = 3 \text{ metros.} \\ 4'19 & \text{metros} = 5 \text{ varas.} \end{array}$$

Multiplicando ordenadamente las ecuaciones, se tendrá:

$$x \times 3'28 \times 4'19 \text{ yardas} = 18 \times 3 \times 5 \text{ varas,}$$

y dividiendo los dos miembros de la última ecuación por el producto $3'28 \times 4'19$, se tiene:

$$x = \frac{18 \times 3 \times 5}{3 \times 28 \times 4 \times 19} = 19'65$$

Se observará que es necesario que el segundo miembro de cada ecuación, sea de la especie del primero de la siguiente, y que el primer miembro de la primera ecuación sea de la especie del segundo de la última.

Una vez establecidos así los datos del problema, el valor de la incógnita será igual al producto de las cantidades que forman los segundos miembros de las ecuaciones, dividido por el producto de las cantidades conocidas de los primeros miembros.

Comunmente se comienzan las ecuaciones por la incógnita, y cuando el problema tiene por objeto determinar el valor de sumas expresadas en monedas de diversos países, toma el nombre de *regla de cambio* ó de *arbitrajes*.

Se quiere saber cuántas libras esterlinas valen 1,000 onzas mexicanas, en el concepto de que 100 onzas mexicanas equivalen á 1,621 dollars americanos, que 4 dollars valen 21'36 francos, y que 50'42 francos, valen dos libras esterlinas, que es la especie de la incógnita.

Libras esterlinas	$x = 1000$ onzas mexicanas.
Onzas	$100 = 1621$ dollars americanos.
Dollars	$4 = 21'36$ francos.
Francos	$50'42 = 2$ libras esterlinas.

$$x = \frac{1000 \times 1621 \times 21'36 \times 2}{100 \times 4 \times 50'42} = 3433'62 \text{ libs. esters.}$$

Por este procedimiento se facilita la resolución de esta clase de problemas, cuyo resultado podría obtenerse, planteando y resolviendo una serie de reglas de tres.

PREGUNTAS.—146. ¿A qué se llama regla de tres? ¿En qué se conoce que una cuestión es de regla de tres?—147. ¿En qué se divide la regla de tres? ¿Qué se entiende por cantidades relativas? ¿A qué se llama regla de tres simple? ¿Qué se entiende por regla de tres compuesta? ¿A qué se llama regla de tres directa? ¿A qué se llama regla de tres inversa?—148. ¿Cuál es la regla para plantear una regla de tres, cuando es directa y cuando es inversa?—149. ¿Cómo se determina el valor de la incógnita en una regla de tres simple sin necesidad de formar la proporción?—150. ¿Cómo se ejecuta la prueba de la regla de tres simple?—151. ¿Qué condiciones deben satisfacer los datos de una cuestión para que esta sea de regla de tres compuesta? ¿Cuál es la regla para plantear y resolver un problema de regla de tres compuesta?—152. ¿Cómo se puede determinar el valor del término que se busca en una regla de tres compuesta sin establecer las proporciones?—153. ¿Cómo se ejecuta la prueba de la regla de tres compuesta?—154. ¿Cuál es el objeto de la regla de compañía? ¿Cuándo es simple la regla de compañía? ¿Cuándo es compuesta? ¿Cuál es la regla para resolver la regla de compañía simple? ¿Cuál es la regla para resolver la regla de compañía compuesta?—155. ¿Cuál es el objeto de la regla de interés? ¿Cómo se determina el interés de una suma en la unidad de tiempo? ¿Cómo se determina el interés de una suma en un tiempo cualquiera?—156. ¿Cuál es el objeto de la regla de descuento? ¿Cómo se resuelve la regla de descuento cuando este es interior? ¿Cómo se resuelve la regla de descuento cuando este es exterior?—157. ¿Cuál es el objeto de la regla conjunta ó de cambio? ¿Cuáles son las condiciones que deben satisfacer los datos de un problema de regla conjunta ó de cambio? ¿Cómo se determina el valor de la incógnita en una regla conjunta ó de cambio?

PROBLEMAS.

216. Con 28 telares se han tejido 560 varas de manta; con 257 telares ¿cuántas varas se habrían tejido en el mismo tiempo?

217. Por 12½ cargas de trigo, se han pagado \$251'75; por 7½ cargas ¿cuánto se deberá pagar? Aproximación hasta los centavos.

218. Pars ir de una ciudad á otra, emplea un ferrocarril 16 horas, andando 30 millas por hora; ¿qué tiempo empleará andando 21 millas por hora?

219. Para cubrir el piso de una sala se han empleado 120 varas de alfombra de 38 pulgadas de ancho, ¿cuántas varas se necesitarán de otra alfombra cuyo ancho es 32 pulgadas?

220. Un viajero ha empleado 50 días para andar 348 leguas caminando 20 horas al día; ¿cuántas leguas recorrerá en 30 días caminando 12 horas al día?

221. 15 operarios, trabajando 8 horas diarias durante 21 días, han abierto un foso de 5 metros de largo, 4 de ancho, y 3 de profundidad. Se quiere saber ¿cuántas horas al día deberán trabajar 28 operarios para abrir en 25 días un foso de 35 metros de largo, 2 de ancho, y $1\frac{3}{4}$ de profundidad en el mismo terreno?

222. En una sociedad de 4 comerciantes el primero puso \$3,000, el segundo \$4,000, el tercero \$5,000, y el cuarto \$7,500, y habiendo tenido una utilidad de \$12,500, se quiere saber qué parte de esta corresponde á cada socio.

223. Tres socios han puesto en un giro en compañía:

el 1º.....	\$ 15,000 por 5 años.
el 2º.....	20,000 por 4 años.
el 3º.....	10,000 por 3 años.

Habiendo ganado \$740,000; ¿qué parte le corresponde á cada uno?

224. ¿Qué cantidad deberá recibirse al fin de cada año por \$4,500 impuestos al 5% de interés?

225. ¿Cuál será el interés de \$5,672 impuestos al 7% anual al cabo de 10 años?

226. ¿Cuál será el interés de \$8,500, impuestos

al 5½% anual al cabo de 2 años 124 días, computándose el año de 365 días?

227. Teniendo una libranza pagadera á los 5 meses de la fecha por \$2,300, se quiere saber la suma que se recibirá al contado con el descuento interior de $\frac{3}{4}$ % mensual.

228. ¿Cuánto deberá recibirse al contado por un vale de \$620 á 3 meses de la fecha con el descuento exterior de $\frac{1}{2}$ % mensual?

229. ¿Cuánto importa el descuento exterior de \$12,500 por 4 meses á $\frac{7}{8}$ % mensual?

230. Queremos determinar ¿cuántas libras mexicanas son 850 marcos alemanes? en el concepto de que

50 marcos alemanes	= 25.79 libras inglesas.
150 libras inglesas	= 68 kilogramos.
33 kilogramos	= 71.71 libras mexicanas.

231. Queremos determinar cuántos rublos podrán recibirse en San Petersburgo, entregando en México \$20,000, bajo la base de que los cambios comerciales el día de la operación fueran los siguientes:

\$ 1	= 44 peniques
100 peniques	= 10 francos
100 francos	= 24 rublos

Regla de aligación.

158. Dos son los casos de los problemas de aligación: 1º, cuando conociéndose el número de unidades y el precio de cada una de las varias clases de un efecto, se trata de determinar el precio medio de la mezcla; 2º,

218. Pars ir de una ciudad á otra, emplea un ferrocarril 16 horas, andando 30 millas por hora; ¿qué tiempo empleará andando 21 millas por hora?

219. Para cubrir el piso de una sala se han empleado 120 varas de alfombra de 38 pulgadas de ancho, ¿cuántas varas se necesitarán de otra alfombra cuyo ancho es 32 pulgadas?

220. Un viajero ha empleado 50 días para andar 348 leguas caminando 20 horas al día; ¿cuántas leguas recorrerá en 30 días caminando 12 horas al día?

221. 15 operarios, trabajando 8 horas diarias durante 21 días, han abierto un foso de 5 metros de largo, 4 de ancho, y 3 de profundidad. Se quiere saber ¿cuántas horas al día deberán trabajar 28 operarios para abrir en 25 días un foso de 35 metros de largo, 2 de ancho, y $1\frac{3}{4}$ de profundidad en el mismo terreno?

222. En una sociedad de 4 comerciantes el primero puso \$3,000, el segundo \$4,000, el tercero \$5,000, y el cuarto \$7,500, y habiendo tenido una utilidad de \$12,500, se quiere saber qué parte de esta corresponde á cada socio.

223. Tres socios han puesto en un giro en compañía:

el 1º.....	\$ 15,000 por 5 años.
el 2º.....	20,000 por 4 años.
el 3º.....	10,000 por 3 años.

Habiendo ganado \$740,000; ¿qué parte le corresponde á cada uno?

224. ¿Qué cantidad deberá recibirse al fin de cada año por \$4,500 impuestos al 5% de interés?

225. ¿Cuál será el interés de \$5,672 impuestos al 7% anual al cabo de 10 años?

226. ¿Cuál será el interés de \$8,500, impuestos

al 5½% anual al cabo de 2 años 124 días, computándose el año de 365 días?

227. Teniendo una libranza pagadera á los 5 meses de la fecha por \$2,300, se quiere saber la suma que se recibirá al contado con el descuento interior de $\frac{3}{4}$ % mensual.

228. ¿Cuánto deberá recibirse al contado por un vale de \$620 á 3 meses de la fecha con el descuento exterior de $\frac{1}{2}$ % mensual?

229. ¿Cuánto importa el descuento exterior de \$12,500 por 4 meses á $\frac{7}{8}$ % mensual?

230. Queremos determinar ¿cuántas libras mexicanas son 850 marcos alemanes? en el concepto de que

50 marcos alemanes	= 25.79 libras inglesas.
150 libras inglesas	= 68 kilogramos.
33 kilogramos	= 71.71 libras mexicanas.

231. Queremos determinar cuántos rublos podrán recibirse en San Petersburgo, entregando en México \$20,000, bajo la base de que los cambios comerciales el día de la operación fueran los siguientes:

\$ 1	= 44 peniques
100 peniques	= 10 francos
100 francos	= 24 rublos

Regla de aligación.

158. Dos son los casos de los problemas de aligación: 1º, cuando conociéndose el número de unidades y el precio de cada una de las varias clases de un efecto, se trata de determinar el precio medio de la mezcla; 2º,

cuando conociéndose los precios de varias clases de un efecto, se quiere determinar cuántas unidades deben tomarse de cada clase para que la mezcla pueda venderse á un precio medio dado. Para mayor claridad, pondremos un ejemplo de cada caso.

1^{er}. CASO.—Teniendo

20 barriles de aguardiente	de á \$ 15 barril
16 " "	de á \$ 20 id.
y 12 " "	de á \$ 18 id.

se quiere determinar el precio medio á que podrá venderse el barril de la mezcla total sin ganar ni perder.

2^o CASO.—Teniendo

aguardiente de á \$ 20 el barril
y de á \$ 15 el id.

queremos saber en qué proporción se han de mezclar, esto es, cuántos barriles debemos tomar de la clase de á \$20, y cuántos de la de á 15 para que resulte una mezcla que podamos vender á \$18 barril sin perder ni ganar.

Como se vé, en el primer caso se conocen las cantidades de cada clase y se busca el precio medio; mientras que en el segundo caso se conoce el precio de cada clase y el precio medio, y se van á determinar las porciones ó unidades que deben tomarse de cada clase del efecto.

Antes de dar las reglas para la resolución de los problemas de aligación, diremos que por precio se entiende el valor de la unidad; que el valor total de un efecto se obtiene multiplicando el número de unidades por el precio; y supuesto que lo mismo es vender cada can-

tidad á su precio que la mezcla al precio medio, la suma de los valores de las partes de la mezcla, estimando cada cual á su precio, ha de ser igual al valor de la mezcla al precio medio.

159.—PRIMER CASO DE ALIGACIÓN.—Para resolver un problema del primer caso de aligación, se multiplican las unidades de cada una de las clases por su respectivo precio; se suman estos productos y la suma total se divide por la suma de las unidades. El cociente será el precio medio buscado.

EJEMPLO.—Tenemos

20 barriles aguardiente	de á \$ 15 barril
16 " "	de á \$ 20 id.
12 " "	de á \$ 18 id.

y queremos determinar el precio medio.

$20 \times 15 = 300$	20 bs.	Resulta que el precio
$16 \times 20 = 320$	16	medio es de \$17'41 $\frac{2}{3}$.
$12 \times 18 = 216$	12	La prueba de esta ope-
836	48	ración se hace determi-
356	17'41 $\frac{2}{3}$	nando el valor de cada
200		partida á su precio y su
080		suma \$836, debe ser igual
32		al valor total de los 48
		barriles al precio medio de
		\$17'41 $\frac{2}{3}$ barril.

160.—SEGUNDO CASO DE ALIGACIÓN.—Cuando, dados los precios de las varias clases de un efecto, se quiere formar una mezcla que pueda venderse sin ganar ni perder á un precio medio fijo, se determinará cuántas unidades de cada una de las clases deben entrar en la mezcla, tomando la diferencia entre el precio de otra de las clases y el precio medio,

EJEMPLO.—Queremos formar una mezcla con aguardiente de á \$20 barril y de á \$15, que podamos vender á razón de \$18 barril sin ganar ni perder.

$$\text{Precio medio } \$18 \left\{ \begin{array}{l} \$20 \text{ barril } 18-15=3 \text{ bs.} \\ \$15 \text{ barril } 20-18=2 \text{ bs.} \end{array} \right.$$

Conforme á la regla; del aguardiente de á \$20 tomaremos para la mezcla 3 barriles=\$18—15; y del aguardiente de á 15 pesos, tomaremos 2 barriles=\$20—\$18.

La prueba de esta operación se hace determinando el valor de cada una de las partes de la mezcla, y su suma ha de ser igual al valor de la mezcla al precio medio. En nuestro ejemplo:

$$\begin{array}{r} 3 \text{ bs.} \times 20 \$ = 60 \$ \\ 2 \text{ bs.} \times 15 \$ = 30 \$ \\ \hline 90 \$ \end{array} \quad \begin{array}{r} 3 \text{ bs.} \\ 2 \\ \hline 5 \text{ bs.} \times 18 \$ = 90 \$ \end{array}$$

Cuando hay más de dos clases de un efecto, y por consiguiente, se conocen tres ó más precios, la operación se resuelve como vamos á explicarlo, sirviéndonos del siguiente ejemplo:

Tenemos plata de \$7'50, de \$8'50, y de \$8'80 el marco, y tratando de formar una liga cuyo precio sea de \$8'25 el marco, queremos determinar los marcos que se han de tomar de cada una de las tres clases de plata.

$$\$8'25 \left\{ \begin{array}{l} \$7'50 \\ \$8'50 \\ \$8'80 \end{array} \right.$$

De los tres precios, uno de ellos, \$7'50, es menor que el precio medio \$8'25 y los otros son mayores

que él. Por esta causa formaremos dos aligaciones, comparando sucesivamente \$7'50 con cada uno de los dos precios mayores que el medio, y las resolveremos como sigue:

$$\begin{array}{l} \$8'25 \left\{ \begin{array}{l} \$7'50 \dots\dots 8'50-8'25=0'25 \text{ marco.} \\ 8'50 \dots\dots 8'25-7'50=0'75 \text{ marco.} \end{array} \right. \\ \$8'25 \left\{ \begin{array}{l} \$7'50 \dots\dots 8'80-8'25=0'55 \text{ marco.} \\ 8'80 \dots\dots 8'25-7'50=0'75 \text{ marco.} \end{array} \right. \end{array}$$

Como el precio medio de cada una de las dos ligas es de \$8'25, resulta que si se reúnen, el precio total de la mezcla de las dos, será el mismo que el de cada una de ellas, y por tanto deberemos tomar de la plata de á \$7'50 el marco, 0'25+0'55=0'80 marco; de la de á \$8'50, 0'75 marco; y de la de á \$8'80 igualmente 0'75 marco. La operación en la práctica se dispone como sigue:

$$\$8'25 \left\{ \begin{array}{l} \$7'50 \dots\dots 0'25+0'55=0'80 \text{ marco.} \\ \$8'50 \dots\dots 0'75 \text{ marco.} \\ \$8'80 \dots\dots 0'75 \text{ marco.} \end{array} \right.$$

Comprobaremos la operación como sigue:

$$\begin{array}{r} \text{marcos} \\ 0'80 \times 7'50 = 6'00 \\ 0'75 \times 8'50 = 6'375 \\ 0'75 \times 8'80 = 6'600 \\ \hline 18'975 \end{array} \quad \begin{array}{r} \text{marcos} \\ 0'80 \\ 0'75 \\ 0'75 \\ \hline \text{marcos} \\ 2'30 \times 8'25 = 18'975 \end{array}$$

A menudo sucede que los problemas de aligación, de que nos hemos ocupado, se combinan con otra condición más, como la de determinar el precio con un tanto por ciento de utilidad, ó como la de que en la

mezcla entre una porción fija de un efecto; y para resolver estos problemas compuestos, bastará hacer entrar el resultado de la aligación en la regla de tres á que dé origen la otra condición de la cuestión.

PREGUNTAS.—158. ¿Cuántos casos se presentan en la regla de aligación, y cuáles son?—159. ¿Cuál es la regla para resolver el primer caso de la regla de aligación?—160. ¿Cuál es la regla para resolver el segundo caso de la regla de aligación? ¿Cómo se comprueba la ejecución de la regla de aligación?

PROBLEMAS.

232. Se han comprado 28 cargas de maíz á 30 reales, 60 cargas á 4 pesos, 105 cargas á 29 reales, y 80 cargas á 4 pesos 1 real, se quiere determinar el precio medio del conjunto.

233. Se han fletado 2,000 arrobas de azúcar á 56 centavos la arroba, 1,800 arrobas á 50 centavos, 3,000 arrobas á 60 centavos y 4,500 arrobas á 55 centavos, y se quiere saber cuál es el precio medio del flete.

234. Teniendo bronce de á 22 pesos el quintal, y de otra clase cuyo precio es 17 pesos, queremos determinar en qué relación deberemos mezclarlos para tener una liga cuyo precio medio sea 20 pesos el quintal.

235. Tenemos oro de 800 milésimos de ley, de 920 y de 950, y queremos saber en qué relación debemos mezclarlos para tener una liga de 875 milésimos, que es la ley de la moneda mexicana.

PROBLEMAS GENERALES.

236. Una bomba de vapor ha vaciado 36 metros cúbicos de agua en 2 horas, 6 minutos, ¿en cuánto tiempo vaciará un estanque que contiene 2,140 metros cúbicos?

237. Se han empleado 34 kilogramos de lana para hacer 25 metros de un tejido de 60 centímetros de ancho; ¿cuántos metros podrán tejerse con 108 kilogramos, 80 decágramos de un tejido de la misma clase, dándole 80 centímetros de ancho?

238. Una persona compró 200 mulas á \$ 32½ cada una, gastó en el camino para trasportarlas, 682 pesos, se le murieron 4 mulas, y vendió 16 á razón de \$60; 50 á \$48½, y el resto á \$36½. Se quiere saber cuánto ganó.

239. A una persona que tiene 20,000 pesos disponibles, le ofrecen pagarle 7½% anual, y al mismo tiempo le proponen en venta una finca que produce 150 pesos mensuales, pero que en gastos de cobranza, contribuciones, y reposiciones, consume el 12% del producto. Se quiere saber cuál de las dos operaciones es más ventajosa, y cuál es el valor de la diferencia al año.

240. Se compra sal á 18 centavos la arroba en el lugar de producción. El flete cuesta 45 centavos, la alcabala 11 centavos, y teniéndose una merma de 3%, se quiere saber cuál debe ser el precio de venta para utilizar el 6%.

241. ¿Cuál es el valor de una hacienda cuya superficie es de 898'7013 hectaras á razón de \$560 la caballería de tierra?

242. Habiendo vendido una persona una finca en \$24,000 que se le han de pagar por terceras par-

tes en plazos de 2, 4 y 6 años, y estando convenido que se abonará un interés de $6\frac{0}{10}$ al año, se quiere saber cuánto debe recibir en cada plazo y á cuánto ascenderá el pago total.

243. Habiéndose vendido una finca en \$24,000 pagadera por terceras partes en plazos de 2, 4 y 6 años, se quiere saber cuánto debe percibirse al contado con un descuento de $\frac{1}{2}\frac{0}{10}$ mensual.

244. Un comedor tiene 12 varas de largo por 6 de ancho, y se quiere saber: 1º, cuál es su superficie en varas cuadradas; 2º, cuál es en metros cuadrados; y 3º, cuántas lozas de mármol se necesitarán para cubrir su piso, teniendo cada loza 4 decímetros cuadrados.

245. ¿Cuántas pulgadas cuadradas tiene la vara cuadrada?

246. ¿Cuántas pulgadas cúbicas tiene la vara cúbica?

247. Una locomotora que recorre 20 kilómetros en 30 minutos, ¿en qué tiempo recorrerá 50 leguas mexicanas?

248. Queremos saber á cuántos pies ingleses equivalen 100 varas mexicanas, en el concepto de que 1 vara = $0\cdot838$; que $1\cdot949 = 6$ pies de Francia y que 15 pies de Francia = 16 pies ingleses.

249. Teniendo que situar 5,000 libras esterlinas en Londres, se quiere saber si debe tomarse una letra al cambio directo entre México y Londres á razón de 43 peniques por un peso, ó si es preferible valerse del intermedio de París, estando el cambio entre Londres y París á razón de 24·90 francos por una libra esterlina, y á razón de 4·56 francos entre México y París. Como se sabe, la libra esterlina vale \$5 y tiene 240 peniques.

250. Un comerciante vende 222 arrobas 15 libras de azúcar á $15\frac{1}{2}$ reales al contado, y el corredor á quien encargó su realización le propone en cambio 100 carneros, los cuales pueden venderse á razón de \$4-3 rs. á un mes de plazo, y descontarse el pagaré con el $1\frac{0}{10}$ si se quiere recibir el importe desde luego. Se desea saber si es conveniente aceptar la oferta del corredor, y en caso de serlo cuánto importa la diferencia respecto del valor del azúcar.

251. Se quiere determinar á qué precio debe venderse la vara de calicot con un recargo de $20\frac{0}{10}$ sobre su costo, habiéndose comprado á \$18 la pieza de 110 yardas. La yarda = $0\cdot9144$ metro.

252. Por 240 arrobas 20 libras de sebo se han pagado \$1083·60; se quiere determinar el precio de venta de la arroba, utilizando $10\frac{0}{10}$.

253. Se tiene que construir un patio cuadrado cuya superficie ha de ser de 493·150849, metros cuadrados. Para determinar el lado del patio en metros, bastará extraer la raíz cuadrada de este número; pero se quiere conocer la longitud del lado del patio en varas.

254. Tenemos un tinaco cuya base tiene 1m·5 de largo por 1m·25 de ancho, y su altura es de 0·80 metro. Para determinar el volumen del tinaco en metros cúbicos, bastará multiplicar el primer dato por el segundo y el producto por la altura, y se desea conocer: 1º, cuántos litros de agua puede contener; 2º, cuántos kilogramos pesa el agua contenida; y 3º, cuál es el peso de la misma agua en libras.

255. Se quiere construir un depósito para agua, de forma cúbica, que pueda contener 73·560059 litros. La raíz cúbica de este número expresará el lado del tinaco en decímetros; pero se quiere determinar en pulgadas mexicanas.

256. Para tapizar una pieza con alfombra de 1 vara $\frac{1}{12}$ de ancho, se han necesitado 124 varas; con alfombra de $\frac{2}{3}$ vara de ancho, ¿cuántas varas se necesitarán?

257. Se han comprado 20 cajas de petróleo á \$8'50, 30 á \$8, y 50 á \$8'25; se quiere fijar el precio de venta al menudeo del cuartillo con una utilidad de 5% en el concepto de que cada caja de petróleo contiene 19 $\frac{1}{2}$ cuartillos.

258. Tenemos 1,000 marcos de plata cuya ley es de 951 milésimos, y queremos saber cuántos marcos deberemos mezclarles de 900 milésimos, y cuántos de 890 para formar una liga de 903 milésimos de ley.

259. Por una letra de \$1,500 pagadera á 4 años de plazo, se han dado \$1,200, y se quiere saber á cómo sale el descuento.

260. Tres contratistas han hecho una obra en compañía, por la cual se les ha pagado 6,400 pesos. El primero ha empleado 30 peones 20 días, el segundo 20 peones 14 días, y el tercero 15 peones 24 días. Se quiere saber cuánto le corresponde á cada contratista.

Tablas de medidas, pesos y monedas.

161.—Terminaremos este tratadito de aritmética con algunas tablas para facilitar la conversión de las unidades de pesos, medidas y monedas mexicanas é inglesas en unidades del sistema métrico-decimal y reciprocamente, cuyas tablas pueden ser útiles y de uso frecuente.

Por medio de un ejemplo se comprenderá fácilmente el modo de servirse de las seis primeras tablas que tienen por objeto reducir sumas las opera-

ciones necesarias para convertir las unidades de un sistema en las del otro.

Supongamos que necesitamos determinar á cuántas hectaras equivalen 6,450 fanegas de sembradura.

Como en la parte de "*Medidas de Superficie*" de la 2ª tabla no constan fanegas de sembradura, reduciremos primero estas á caballerías, dividiendo 6,450 por 12.

$$6450 \text{ fanegas} = 537\cdot5 \text{ caballerías.}$$

Consultando la segunda tabla tenemos que

caballerías	hectaras	caballerías	hectaras
Si 5....=213'976556....	500	=	21 397'655 6
Si 3....=128'385933....	30	=	1 283'859 33
	7	=	299'567 178
Si 5....=213'976556....	0'5	=	21'397 656
	537'5	=	23002'479 764

En consecuencia, 6,450 fanegas de sembradura = 23 002'47 98 hectaras.

Las monedas tienen un valor que determina la ley en el país á que pertenecen, pero fuera de él su valor intrínseco, que depende de la cantidad de oro ó de plata pura que contienen, está sujeto á variaciones que reconocen generalmente por causa la abundancia ó escasez de estos metales en el mercado. Además, tanto en el peso de cada moneda como en su ley que es la parte de metal precioso que contiene, se permiten tolerancias de algunos milésimos, por no ser posible arreglar las ligas ni ajustar el peso de las monedas con rigurosa exactitud. Por último, el valor relativo del oro á la plata, no es igual en todos los países. En nuestras tablas constan los valores intrínsecos legales aproximados de las monedas mexicanas y de las inglesas con respecto á las francesas, cuyos valores, como acabamos de indicar, están sujetos á cambios incesantes en las transacciones mercantiles.

256. Para tapizar una pieza con alfombra de 1 vara $\frac{1}{12}$ de ancho, se han necesitado 124 varas; con alfombra de $\frac{2}{3}$ vara de ancho, ¿cuántas varas se necesitarán?

257. Se han comprado 20 cajas de petróleo á \$8.50, 30 á \$8, y 50 á \$8.25; se quiere fijar el precio de venta al menudeo del cuartillo con una utilidad de 5% en el concepto de que cada caja de petróleo contiene 19½ cuartillos.

258. Tenemos 1,000 marcos de plata cuya ley es de 951 milésimos, y queremos saber cuántos marcos deberemos mezclarles de 900 milésimos, y cuántos de 890 para formar una liga de 903 milésimos de ley.

259. Por una letra de \$1,500 pagadera á 4 años de plazo, se han dado \$1,200, y se quiere saber á cómo sale el descuento.

260. Tres contratistas han hecho una obra en compañía, por la cual se les ha pagado 6,400 pesos. El primero ha empleado 30 peones 20 días, el segundo 20 peones 14 días, y el tercero 15 peones 24 días. Se quiere saber cuánto le corresponde á cada contratista.

Tablas de medidas, pesos y monedas.

161.—Terminaremos este tratadito de aritmética con algunas tablas para facilitar la conversión de las unidades de pesos, medidas y monedas mexicanas é inglesas en unidades del sistema métrico-decimal y reciprocamente, cuyas tablas pueden ser útiles y de uso frecuente.

Por medio de un ejemplo se comprenderá fácilmente el modo de servirse de las seis primeras tablas que tienen por objeto reducir sumas las opera-

ciones necesarias para convertir las unidades de un sistema en las del otro.

Supongamos que necesitamos determinar á cuántas hectaras equivalen 6,450 fanegas de sembradura.

Como en la parte de "*Medidas de Superficie*" de la 2ª tabla no constan fanegas de sembradura, reduciremos primero estas á caballerías, dividiendo 6,450 por 12.

$$6450 \text{ fanegas} = 537.5 \text{ caballerías.}$$

Consultando la segunda tabla tenemos que

caballerías	hectaras	caballerías	hectaras
Si 5....=213'976556....	500	=	21 397'655 6
Si 3....=128'385933....	30	=	1 283'859 33
	7	=	299'567 178
Si 5....=213'976556....	0.5	=	21'397 656
	537.5	=	23002'479 764

En consecuencia, 6,450 fanegas de sembradura = 23 002'47 98 hectaras.

Las monedas tienen un valor que determina la ley en el país á que pertenecen, pero fuera de él su valor intrínseco, que depende de la cantidad de oro ó de plata pura que contienen, está sujeto á variaciones que reconocen generalmente por causa la abundancia ó escasez de estos metales en el mercado. Además, tanto en el peso de cada moneda como en su ley que es la parte de metal precioso que contiene, se permiten tolerancias de algunos milésimos, por no ser posible arreglar las ligas ni ajustar el peso de las monedas con rigurosa exactitud. Por último, el valor relativo del oro á la plata, no es igual en todos los países. En nuestras tablas constan los valores intrínsecos legales aproximados de las monedas mexicanas y de las inglesas con respecto á las francesas, cuyos valores, como acabamos de indicar, están sujetos á cambios incesantes en las transacciones mercantiles.

MEDIDAS DE LONGITUD.

	Leguas en kilómetros.	Varas en metros.	Pies en metros.	Pulgadas en centímetros.	
1	4.190	0.838	0.279 333	2.327 778	1
2	8.380	1.676	0.558 667	4.655 555	2
3	12.570	2.514	0.838 000	6.983 333	3
4	16.760	3.352	1.117 333	9.311 111	4
5	20.950	4.190	1.396 666	11.638 889	5
6	25.140	5.028	1.676 000	13.966 667	6
7	29.330	5.866	1.955 333	16.294 444	7
8	33.520	6.704	2.234 666	18.622 222	8
9	37.710	7.542	2.514 000	20.950 000	9
	Kilómetros en leguas.	Metros en varas.	Metros en pies.	Centímetros en pulgadas.	
1	0.238 663	1.193 317	3.579 952	0.429 594	1
2	0.477 327	2.386 635	7.159 905	0.859 188	2
3	0.715 990	3.579 952	10.739 857	1.288 782	3
4	0.954 654	4.773 270	14.319 809	1.718 377	4
5	1.193 317	5.966 587	17.899 761	2.147 971	5
6	1.431 981	7.159 905	21.479 714	2.577 565	6
7	1.670 644	8.353 222	25.059 666	3.007 160	7
8	1.909 308	9.546 539	28.639 618	3.436 754	8
9	2.147 971	10.739 857	32.219 570	3.866 348	9

MEDIDAS DE SUPERFICIE.

	Sitios de ganado mayor en millaras.	Caballerías en hectáreas.	Varas cuadradas en metros cuadrados.	Pies cuadrados en metros cuadrados.	
1	17.556 1	42.795 311	0.702 244	0.078 027	1
2	35.112 2	85.590 622	1.404 488	0.156 054	2
3	52.668 3	128.385 933	2.106 732	0.234 081	3
4	70.224 4	171.181 245	2.808 976	0.312 108	4
5	87.780 5	213.976 556	3.511 220	0.390 135	5
6	105.336 6	256.771 867	4.213 464	0.468 162	6
7	122.892 7	299.567 178	4.915 708	0.546 189	7
8	140.448 8	342.362 489	5.617 952	0.624 216	8
9	158.004 9	385.157 800	6.320 196	0.702 244	9
	Millaras en sitios de ganado mayor.	Hectáreas en caballerías.	Metros cuadrados en varas cuadradas.	Metros cuadrados en pies cuadrados.	
1	0.056 960	0.023 867	1.424 006	12.816 075	1
2	0.113 920	0.046 734	2.848 013	25.632 150	2
3	0.170 881	0.070 101	4.272 019	38.448 225	3
4	0.227 841	0.093 468	5.696 026	51.264 300	4
5	0.284 801	0.116 835	7.120 032	64.080 375	5
6	0.341 761	0.140 202	8.544 038	76.896 450	6
7	0.398 721	0.163 569	9.968 045	89.712 525	7
8	0.455 682	0.186 936	11.392 052	102.528 600	8
9	0.512 642	0.210 303	12.816 058	115.344 675	9

MEDIDAS DE VOLUMEN Y DE GRANOS.

	Varas cúbicas en metros cúbicos.	Pies cúbicos en metros cúbicos.	Fanegas ca litros.	Quartillos de maíz en litros.	
1	0'588 480	0'021 796	90'814 888	1'891 977	1
2	1'176 961	0'043 591	181'629 775	3'783 954	2
3	1'765 441	0'065 387	272'444 663	5'675 931	3
4	2'353 922	0'087 182	363'259 550	7'567 908	4
5	2'942 402	0'108 978	454'074 439	9'459 885	5
6	3'530 883	0'130 773	544'889 326	11'351 862	6
7	4'119 363	0'152 569	635'704 215	13'243 839	7
8	4'707 844	0'174 365	726'519 102	15'135 816	8
9	5'296 324	0'196 160	817'333 989	17'027 793	9
	Metros cúbicos en varas cúbicas.	Metros cúbicos en pies cúbicos.	Litros en fanegas.	Litros en quartillos de maíz.	
1	1'699 292	45'880 884	0'011 011	0'528 547	1
2	3'398 583	91'761 768	0'022 023	1'057 095	2
3	5'097 875	137'642 652	0'033 034	1'585 642	3
4	6'797 167	183'523 536	0'044 046	2'114 190	4
5	8'496 459	229'404 420	0'055 057	2'642 736	5
6	10'195 750	275'285 304	0'066 068	3'171 284	6
7	11'895 042	321'166 188	0'077 080	3'699 830	7
8	13'594 334	367'047 072	0'088 091	4'228 379	8
9	15'293 626	412'927 956	0'099 103	4'756 927	9

MEDIDAS DE VOLUMEN PARA LIQUIDOS.

	Quartillos para aceite en litros.	Quartillos para vinos, etc., en litros.	Surcos en litros por segundo.	Pajas en litros por minuto.	
1	0'506 162	0'456 264	3'313 771	0'460 246	1
2	1'012 325	0'912 528	6'627 542	0'920 493	2
3	1'518 487	1'368 792	9'941 814	1'380 739	3
4	2'024 649	1'825 056	13'255 086	1'840 985	4
5	2'530 811	2'281 320	16'568 856	2'301 232	5
6	3'036 974	2'737 584	19'882 627	2'761 478	6
7	3'543 136	3'193 848	23'196 398	3'221 724	7
8	4'049 298	3'650 112	26'510 170	3'681 971	8
9	4'555 460	4'106 376	29'823 941	4'142 217	9
	Litros en quartillos para aceite.	Litros en quartillos para vinos, etc.	Litros por segundo en surcos.	Litros por minuto en pajas.	
1	1'975 651	2'191 716	0'301 771	2'172 749	1
2	3'951 302	4'383 432	0'603 542	4'345 499	2
3	5'926 953	6'575 148	0'905 313	6'518 248	3
4	7'902 604	8'766 864	1'207 084	8'690 998	4
5	9'878 255	10'958 580	1'508 855	10'863 747	5
6	11'853 907	13'150 296	1'810 626	13'036 497	6
7	13'829 558	15'342 012	2'112 397	15'209 246	7
8	15'805 209	17'533 728	2'414 168	17'381 996	8
9	17'780 860	19'725 444	2'715 939	19'554 745	9

PESOS.

	Atrebas en kilogramos.	Libras en kilogramos.	Onzas en gramos.	Granos en gramos.	
1	11.506 159	0.460 246	28.765 396	0.049 94	1
2	23.012 317	0.920 493	57.530 792	0.099 88	2
3	34.518 476	1.380 739	86.296 188	0.149 82	3
4	46.024 634	1.840 985	115.061 584	0.199 76	4
5	57.530 793	2.301 232	143.826 980	0.249 70	5
6	69.036 951	2.761 478	172.592 376	0.299 64	6
7	80.543 110	3.221 724	201.357 772	0.349 58	7
8	92.049 263	3.681 971	230.123 168	0.399 52	8
9	103.555 427	4.142 217	258.888 564	0.449 46	9
Toneladas métricas en arrobas.					
1	86.909 980	2.172 749	0.034 764	20.024 055	1
2	173.819 959	4.345 499	0.069 528	40.048 110	2
3	260.729 939	6.518 248	0.104 292	60.072 165	3
4	347.639 918	8.690 998	0.139 056	80.096 220	4
5	434.549 898	10.863 747	0.173 820	100.120 275	5
6	521.459 878	13.036 497	0.208 584	120.144 330	6
7	608.369 857	15.209 246	0.243 348	140.168 385	7
8	695.279 837	17.381 996	0.278 112	160.192 440	8
9	782.189 816	19.554 745	0.312 876	180.216 495	9

PESOS.

	Escrúpulos en gramos.	Marcos en kilogramos.	Pesos en francos de oro.	Pesos en francos de plata.	
1	1.198 558	0.230 123	5.100	5.431	1
2	2.397 116	0.460 246	10.200	10.862	2
3	3.595 674	0.690 369	15.300	16.293	3
4	4.794 232	0.920 493	20.400	21.724	4
5	5.992 790	1.150 615	25.500	27.155	5
6	7.191 348	1.380 739	30.600	32.586	6
7	8.389 906	1.610 861	35.700	38.017	7
8	9.588 464	1.840 985	40.800	43.448	8
9	10.787 022	2.071 107	45.900	48.879	9
Gramos en escrúpulos.					
1	0.834 336	4.345 499	0.196	0.184	1
2	1.668 672	8.690 998	0.392	0.368	2
3	2.503 008	13.036 497	0.588	0.552	3
4	3.337 344	17.381 996	0.784	0.736	4
5	4.171 680	21.727 494	0.980	0.920	5
6	5.006 016	26.072 993	1.176	1.104	6
7	5.840 352	30.418 492	1.372	1.288	7
8	6.674 688	34.763 991	1.568	1.472	8
9	7.509 024	39.109 490	1.764	1.656	9
Francos en pesos de plata.					

VALOR INTRINSECO DE LAS MONEDAS.

Equivalencia entre las medidas,
pesos y monedas inglesas y las francesas.

MEDIDAS DE LONGITUD.

<i>Inglesas.</i>	<i>Francesas.</i>
Pulgada ($\frac{1}{36}$ yarda).....	2'539 954 centímetros.
Pie ($\frac{1}{3}$ de yarda).....	3'047 945 decímetros.
Yarda (3 pies).....	0'914 383 metros.
Fathom (2 yardas).....	1'828 767 id.
Pole ó perch ($5\frac{1}{2}$ yardas).....	5'029 11 id.
Furlong (220 yardas).....	201'164 37 id.
Milla (1,760 yardas).....	1609'314 92 id.

<i>Francesas.</i>	<i>Inglesas.</i>
Milímetro.....	0'039 36 pulgadas.
Centímetro.....	0'393 708 id.
Decímetro.....	3'937 079 id.
Metro.....	39'370 79 id.
	3'280 899 pies.
Miriámetro.....	1'093 633 yardas.
	6'213 8 millas.

MEDIDAS DE SUPERFICIE.

<i>Inglesas.</i>	<i>Francesas.</i>
Pulgada cuadrada.....	0'000 645 met. cuad.
Pie cuadrado.....	0'092 9 id.
Yarda cuadrada.....	0'836 097 id.
Rod (percha cuadrada).....	25'291 939 id.
Rood (1,210 yar. cuads).....	10'116 775 aras
Acre (4,840 yar. cuads).....	0'404 671 hectaras.
<i>Francesas.</i>	<i>Inglesas.</i>
Metro cuadrado.....	1'196 033 yar. cuad.

Ara.....	0'098 845 rood.
Hectara.....	2'471 143 acres.

MEDIDAS DE CAPACIDAD.

<i>Inglesas.</i>	<i>Francesas.</i>
Pint ($\frac{1}{8}$ de galon).....	0'567 932 litro.
Galon.....	4'543 458 id.
Peck (2 galones).....	9'086 916 id.
Bushel (8 galones).....	36'347 664 id.
Sack (3 bushels).....	1'090 43 hectólitro.
Quarter (8 bushels).....	2'907 813 id.
Chaldron (12 sachs).....	13'085 16 id.

<i>Francesas.</i>	<i>Inglesas.</i>
Litro.....	1'760 773 pint.
Litro.....	0'220 0967 galon.
Hectólitro.....	2'751 208 bushels.

PESOS.

<i>Inglesas. (Troy.)</i>	<i>Francesas.</i>
Grano ($\frac{1}{24}$ de pennyweight).....	0'065 gramo.
Penny-weight ($\frac{1}{8}$ onz).....	1'555 id.
Onza ($\frac{1}{12}$ libra Troy).....	31'091 id.
Libra Troy.....	0'373 096 kilogramos.
<i>Inglesas (avoir du poids.)</i>	
Dracma ($\frac{1}{16}$ de onza).....	1'771 gramo.
Onza ($\frac{1}{16}$ de libra).....	28'338 gramos.
Libra (avoir du poids).....	0'453 4 kilogramo.
Quintal (112 libras).....	50'782 kilogramos.
Tonelada (20 quintales).....	1015'649 kilogramos.

<i>Francesas.</i>	<i>Inglesas.</i>
Gramo.....	15'438 gns. troy.
	0'643 penny-weight.
	0'032 2 onza troy.
	0'035 3 onza av. du poids.

Kilógramo	{	2'680 3 lbs. troy.
		2'205 5 libra av. du poids.
Tonelada (1000 kilógs.)...		19'692 8 quintales.

MONEDAS.

	<i>Inglésas.</i>	<i>Oro.</i>	<i>Francesas.</i>
Guinea (nominal 21 shillings).....		26'468	francos.
Libra esterlina (20 shillings).....		25'208	id.
Medio-Soberano (10 shillings).....		12'604	id.

Plata.

Corona (5 shillings).....	5'810	fr. val. int.
Media-corona (2½ id.)....	2'905	id. id.
Chelin (12 peniques).....	1'162	id. id.
Medio-chelin (6 id.).....	0'581	id. id.

Cobre.

Penique ó denier.....	0'105	fr. val. leg.
Medio penique.....	0'052	5 id. id.
Cuarto de penique.....	2'625	cént. id.

	<i>Francesas.</i>	<i>Oro.</i>	<i>Inglésas.</i>
Franco.....		0'039	67 lib. est.

Plata.

Franco.....	0'860	6 sh. val. int.
-------------	-------	-----------------

Cobre.

Franco (100 céntimos)....	9'521	peniques.
---------------------------	-------	-----------

RESULTADOS DE LA RESOLUCION DE LOS PROBLEMAS.

Sistema de numeración.

- 1.—De diez unidades.
- 2.—De diez decenas, igual á cien unidades.
- 3.—De diez centenas, igual á mil unidades.
- 4.—De mil millares, y el del billón de un millón de millones.
- 5.—Tres.
- 6.—Seis.
- 7.—Seis.
- 8.—Doce; ochenta; trescientos cuarenta y cinco; trescientos; trescientos cuarenta; trescientos cinco; doce mil quinientos cuarenta y tres; doce mil ochocientos; ciento dos mil doce; ciento un mil uno.
- 9.—Doce billones, trescientos mil cuatro millones, ochenta mil ocho.
- 10.—20.—22.—80.—88.—583.—580.—500.—503
900.—601.—440.—404.
- 11.—3,000.—3,849.—3,800.—32,049.—32,009.—
806,022.—800,080.—9,001.—900,090.—900,009.—
10,010.
- 12.—12,000,000.—108,200,406.—2,012,010,100.—
300,004,408,060.—22,000,000,000,000.

Kilógramo	{	2'680 3 lbs. troy.
		2'205 5 libra av. du poids.
Tonelada (1000 kilógs.)...		19'692 8 quintales.

MONEDAS.

	<i>Inglésas.</i>	<i>Oro.</i>	<i>Francesas.</i>
Guinea (nominal 21 shillings).....		26'468	francos.
Libra esterlina (20 shillings).....		25'208	id.
Medio-Soberano (10 shillings).....		12'604	id.

Plata.

Corona (5 shillings).....	5'810	fr. val. int.
Media-corona (2½ id.)....	2'905	id. id.
Chelin (12 peniques).....	1'162	id. id.
Medio-chelin (6 id.).....	0'581	id. id.

Cobre.

Penique ó denier.....	0'105	fr. val. leg.
Medio penique.....	0'052	5 id. id.
Cuarto de penique.....	2'625	cént. id.

	<i>Francesas.</i>	<i>Oro.</i>	<i>Inglésas.</i>
Franco.....		0'039	67 lib. est.

Plata.

Franco.....	0'860	6 sh. val. int.
-------------	-------	-----------------

Cobre.

Franco (100 céntimos)....	9'521	peniques.
---------------------------	-------	-----------

RESULTADOS DE LA RESOLUCION DE LOS PROBLEMAS.

Sistema de numeración.

- 1.—De diez unidades.
- 2.—De diez decenas, igual á cien unidades.
- 3.—De diez centenas, igual á mil unidades.
- 4.—De mil millares, y el del billón de un millón de millones.
- 5.—Tres.
- 6.—Seis.
- 7.—Seis.
- 8.—Doce; ochenta; trescientos cuarenta y cinco; trescientos; trescientos cuarenta; trescientos cinco; doce mil quinientos cuarenta y tres; doce mil ochocientos; ciento dos mil doce; ciento un mil uno.
- 9.—Doce billones, trescientos mil cuatro millones, ochenta mil ocho.
- 10.—20.—22.—80.—88.—583.—580.—500.—503
900.—601.—440.—404.
- 11.—3,000.—3,849.—3,800.—32,049.—32,009.—
806,022.—800,080.—9,001.—900,090.—900,009.—
10,010.
- 12.—12,000,000.—108,200,406.—2,012,010,100.—
300,004,408,060.—22,000,000,000,000.

Cálculo de los enteros.

- 13.—1,562.
 14.—10,732,314.
 15.—13,132 pesos.
 16.—20,834 quintales de algodón.
 17.—109,181,819.
 18.—1,942.
 19.—133,542 pesos.
 20.—783,082 hombres.
 25.—15; 56; 45, y 63.
 26.—39,506,172.—140,740,734.—197,108,560.
 27.—74,370,370,296.—19,844,443,494.
 28.—5,829,000.
 29.—227,088,926,800.—383,940,000.
 30.—604,732,638,492.
 31.—65,130,475.—433,224.
 32.—22,830,750 pesos.
 33.—56,000 tlacos.
 34.—6; 5; 7; $7\frac{1}{2}$ y $7\frac{1}{4}$.
 35.—18,649.—147,749 $\frac{3}{4}$.—99,317 $\frac{3}{4}$.
 36.— $217\frac{28143}{100000}$; $207\frac{3684}{37416}$.
 37.— $64\frac{569}{1000}$; $260\frac{4}{100}$.
 38.— $89\frac{7}{8}$; $67\frac{101}{137}$.
 39.— $151\frac{3212}{38800}$; 7531806 .
 40.—70 personas.
 41.—521 quintales 14 onzas.
 42.—29 pesos.
 43.—129 arrobas.
 44.—9,463 pesos.
 45.—Hasta 1890 hace 440 años.
 46.—El 1º recibe \$18,030, el 2º 19,015, el 3º 21,015,
 y el 4º 4,450.
 47.—15,456 renglones.

- 48.—1,440 minutos.
 49.—3,195 pesos.
 50.—18 canarios.
 51.—52 pesos.
 52.—954 libras esterlinas.
 53.—320 pacas.
 54.—Una hora.
 55.—29.
 56.—17.
 57.—De 3,780 son 2, 3, 4, 5, 6, 9, y 10; de 7,640 son 2, 4, 5, 8, y 10.
 58.—Por 10, 5, 2, 4, 8, 3, 9, y 6.
 59.—210,375 es divisible por 5, por 3 y por 9; y 9,360 por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, y 10.

Cálculo de los quebrados.

- 60.— $\frac{1}{2}$; $\frac{5}{7}$; $\frac{25}{112}$.
 61.— $\frac{14}{1}$.
 62.— $\frac{70}{8}$; $8\frac{200}{25}$.
 63.— $\frac{20}{6}$; $\frac{78}{12}$; $\frac{95}{26}$.
 64.— $8\frac{5}{15}$; $8\frac{6}{7}$; $13\frac{12}{32}$.
 65.—El mayor es $\frac{4}{5}$ y el menor $\frac{3}{5}$.
 66.—El mayor es $\frac{6}{7}$ y el menor $\frac{1}{5}$.
 67.—De dos maneras, y los quebrados son $\frac{2}{4}$ y $\frac{2}{3}$.
 68.—De dos maneras, y los quebrados son $\frac{1}{8}$ y $\frac{2}{3}$.

			14
		$\frac{1}{8}$ 3	$\frac{1}{8}$ 42
		$\frac{1}{8}$ 18	$\frac{1}{8}$ 336
			2688 = 14
69.	$\frac{780}{1040}$ $\frac{39}{52}$	$\frac{144}{336}$ $\frac{3}{7}$	$\frac{3048}{453}$ = 19
	52	42	57
		7	$\frac{1}{2}$ 19

70. $\frac{700}{2951} = \frac{17}{63}$ el máximo común divisor es 47;
 $\frac{60}{115} = \frac{3}{5}$ el divisor es 23; $\frac{910}{3085} = \frac{182}{617}$ el divisor es 5.

71. $\frac{240}{350}, \frac{288}{360}, \frac{270}{360}$ y $\frac{60}{360}$.

72. $\frac{320}{1600}, \frac{400}{1600}, \frac{960}{1600}, \frac{1400}{1600}$.

73. 5 reales 2 tlacos; 17 horas 48 minutos.

74. $\frac{41}{9}, \frac{66}{7}$.

75. $1\frac{23}{27}$.

76. \$2-7 reales $-5\frac{1}{3}$ tlacos.

77. $10\frac{11}{12}$.

78. 20 varas 8 pulgadas $\frac{2}{3}$.

79. $\frac{61}{8}, 1\frac{9}{11} = 11\frac{2}{3}$.

80. $\frac{18}{18}$.

81. $1\frac{1}{10}, \frac{5}{6}$.

82. \$3-6 reales.

83. \$4-80 centavos.

84. $\frac{32}{60}, \frac{5}{12}$.

85. \$77-4 reales $-5\frac{1}{3}$ tlacos.

86. $\frac{6083}{40} = \$152-0$ reales $4\frac{1}{5}$ tlacos.

87. $\frac{4}{18} = \frac{1}{2}, \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.

88. $\frac{24}{5} = 4\frac{4}{5}, \frac{40}{2} = 20$.

89. $\frac{30}{4} = \$7-4$ reales.

90. $\frac{70}{51} = 1\frac{19}{51}$.

91. 2 pesos.

92. 17 pesos.

93. $2\frac{41}{704}$.

94. \$5-7 reales $3\frac{7}{27}$ tlacos.

95. Le quedaron $11\frac{2}{3}$ varas y debería recibir \$14,

4 reales $5\frac{1}{3}$ tlacos.

96. 30 pesos.

97. 5 horas 45 minutos.

98. 4 leguas $\frac{15}{80}$.

Cálculo de las decimales.

99. $\frac{4}{1000} = 0.004$; $\frac{0.00049}{1000} = 0.00000049$; $\frac{2}{1000} = 0.002$.

100. $\frac{0.0022004}{1000000} = 2.2004$ milésimas.

101. 86 centésimas; 2 unidades 345 milésimas; cero unidades cuarenta mil cuatrocientas ocho cienmilésimas.

102. 23 pesos 25 milésimas; 218 metros 3804 milonésimas; 14 libras 908 diezmilésimas.

103. 45108'9.

104. 80'5.

105. 51'624.

106. 14820 y 7500 milésimas de peso.

107. $\frac{44}{100000} = 44$ varas y $\frac{151}{100000} = 151$ milésimas.

108. $\frac{0.00045}{1000000} = 45$ milésimas y $\frac{0.000029}{1000000} = 29$ milonésimas.

109. 0'785 y 0'08.

110. \$22'450; 8'048; 17'700 y 0'200.

111. 0'4.

112. 0'00062.

113. 0'32; 0'4 y 0'4736.

114. 0'538 y 0'455.

115. $\frac{5}{8}$ y $15\frac{1}{8}$.

116. 7'3125.

117. $\frac{100}{200} = \frac{1}{2}$ y $\frac{20}{200} = \frac{1}{10}$.

118. $8\frac{1}{2}$ y $14\frac{1}{2}$.

119. \$6412'432.

120. 11527'75.

121. 9080'25.

122. 4247'40945.

123. 0'04125.

124. \$2'575.

125. 0'023 de metro.

126. 206'69775 pulgadas.

127. 11454'9524 kilogramos.

128. 68'797575 kilómetros.

Sistema Métrico y medidas antiguas.

129. — 32547'5 centímetros: 385040 milímetros.
 130. — 32'580 kilómetros: 636'74 miriámetros.
 131. — 827'04 metros: 2'3045 metros.
 132. — 187485000 aras: 408250 hectaras.
 133. — 267840 decímetros cuadrados: 472850 centímetros cuadrados.
 134. — 6'382 542 hectaras: 2684'72 miriaras.
 135. — 79500 litros: 3250000 centímetros cúbicos.
 136. — 845490 decímetros cúbicos: 8'406 metros cúbicos.
 137. — 4309406 metros cúbicos: 9'604786 litros.
 138. — 40546 litros: 9'6345 kilolitros.
 139. — 625 gramos: 82'5 kilogramos.
 140. — 25 toneladas—25000 kilogramos, 18'5 kilogramos.
 141. — 76840 gramos: 291'5 hectogramos.
 142. — 264'05 quintales: 16'405 kilogramos.
 143. — 294'5 kilogramos: 17'890 645 toneladas.
 144. — 1260 pulgadas: 25 varas 2 pies.
 145. — 816 dedos.
 146. — 225 pies cuadrados: 19440 pulgadas cuadradas.
 147. — A 336 fanegas.
 148. — 405 pies cúbicos: 200448 pulgadas cúbicas.
 149. — 3402 cuartillos.
 150. — 2688 cuartillos.
 151. — 62208 pajas.
 152. — 32800 onzas: 143424 granos.
 153. — 278784 granos.
 154. — 80640 granos.
 155. — 1920 escrúpulos: 432 granos.
 156. — 1600 tlacos: 416 tlacos.
 157. — 192 meses: 259200 segundos.

158. — 4190 metros: 218'299 metros.
 159. — 5000 varas: 19'166 varas.
 160. — 186'2055 metros cuadrados.
 161. — 24'00864 varas cuadradas.
 162. — 1187'56957 hectaras.
 163. — 368 caballerías.
 164. — 367'794 metros cúbicos.
 165. — 857'1455 varas cúbicas.
 166. — 51'756 hectólitos.
 167. — 110'2 cargas.
 168. — 51'75 kilogramos.
 169. — 4490'39585 libras.
 170. — 114051 francos.
 171. — 2686'40 pesos.

Denominados. Operaciones fundamentales.

172. — 1534 cuartillos.
 173. — 25 libras 8 onzas 4 dracmas 1 escrúpulo 12 granos.
 174. — \$ $\frac{1316}{64}$.
 175. — 9 onzas.
 176. — 16'90277 varas.
 177. — \$29—4 reales 4 tlacos.
 178. — $\frac{7317}{482}$ surco.
 179. — 7 jarras 15 $\frac{3}{4}$ cuartillos.
 180. — 15'5208 (3) días.
 181. — 19 arrobas 21 libras 13 onzas 4 adarmes 2 tomines 4'8 granos.

Operaciones de denominados.

182. — 1388 varas 0 pies 3 pulgadas 9 líneas.
 183. — 308 quintales 3 arrobas 5 libras 14 onzas 1 adarme 2 tomines 9 granos.
 184. — \$ 15639—3 reales 10 granos $\frac{7}{8}$.

- 185.—\$ 28—3 reales 7 tlacos $\frac{301}{113}$.
 186.—\$349—1 real 7 tlacos.
 187.—22 libras 8 onzas 8 adarmes.

Cuadrado y raíz cuadrada.

- 188.—628 849; $\frac{25}{121}$; $7 + \frac{9}{16}$.
 189.—4129024; 0'2209.
 190.—1600+400+25=2025
 6400+480+9=6889.
 191.—108; 793.
 192.—25'27; 24'083.
 193.—2'966; 0'948 y 0'000296 de resta.
 194.— $\frac{21}{24} + \frac{4}{242} = \frac{2000}{2121} \sqrt{\frac{8 \times 15}{15 \times 15}} = \frac{10'954}{15} = \frac{10354}{15000}$
 195.—0'845.

Cubo y raíz cúbica.

- 196.—48627125; $\frac{1728}{3375}$; $\frac{24380}{216} = 112 + \frac{197}{216}$.
 197.—131'096512; 0'052734375.
 198.— $20^3 + 3.20^2 \times 5 + 3.20 \times 5^2 + 5^3 = 15,625$.
 $80^3 + 3.80^2 \times 6 + 3.80 \times 6^2 + 6^3 = 636056$.
 199.—29; 86.
 200.—4'21 y 0'381539 de resta.
 201.—4'34 y 0'558496 de resta; 0'83 y 0'013713 de resta.
 202.— $\frac{85}{96} - \frac{1'81}{2} = \frac{181}{200} \sqrt{\frac{5 \times 36}{6^3}} = \frac{5'64}{6} = \frac{564}{600} = \frac{141}{150}$
 203.—0'629.

Razones y proporciones.

- 204.— $x=15$.
 205.— $x=10$.
 206.— $37\frac{1}{2}$.
 207.—12'398
 208.— $x=37\frac{1}{2}$.

- 209.— $x=16$.
 210.—24.
 211.—45.
 212.—3 : 4 :: 16 : x.
 213.—9 : 6 :: 24 : 16 ó 9 : 6 :: 3 : 2.
 214.—1 : 8 :: 4 : x.
 215.—7 : 5 :: x : 8.

Regla de tres, de compañía, etc., y de cambio.

- 216.—5222 $\frac{17}{28}$ varas.
 217.—150'79.
 218.—22 horas 51 $\frac{3}{4}$ minutos.
 219.—142 $\frac{1}{2}$ varas.
 220.—125'28 leguas.
 221.—7 horas.
 222.—Al 1^{er} asociado \$ 1923'08
 2^o " 2564'10
 3^o " 3205'13
 4^o " 4807'69
 223.—Al 1^{er} socio \$ 300000
 2^o " 320000
 3^o " 120000
 224.—\$ 225.
 225.—3970'40
 226.—1093'82.
 227.—2216'87.
 228.—610'70.
 229.—437'50.
 230.—431'90 libras mexicanas.
 231.—21120 rublos.

Regla de aligación.

232.—30 reales 7'47 tlacos.

233.—55'71 centavos.

234.—Deberán ligarse en la relación de 3 quintales del bronce de á \$ 22 con 2 quintales del de á \$ 17.

235.—Deberán ligarse 120 kilogramos, libras ó cualquiera otra unidad de peso, del oro de 800 milésimos con 75 kilogramos, etc., del oro de 920 milésimos, y con 75 kilogramos, etc., del oro de 950 milésimos.

Problemas generales.

236.—124 horas 50 minutos.

237.—60 metros.

238.—Ganó 910'50.

239.—Es más ventajoso comprar la finca, porque sobre la imposición al 7½ p^{centa.} se ganan \$ 84 al año.

240.—Precio de venta: 80'79.

241.—11760 pesos.

242.—A los 2 años \$ 10880, á los 4 años \$ 9920, y á los 6 años \$ 8960, cuyos pagos hacen un total de \$ 29,760.

243.—\$ 18240.

244.—1º, 72 varas cuadradas; 2º, 50'561 metros cuadrados; y 3º, 1264 losas aproximadamente.

245.—1296 pulgadas cuadradas.

246.—46656 pulgadas cúbicas.

247.—En 5 horas 14 minutos 15 segundos.

248.—275'18 pies ingleses.

249.—5000 libras esterlinas á 43 peniques cuestan 27906'97, y por el intermedio de París costarian

27302'63. Es preferible el cambio indirecto por economizarse 604'34.

250.—Conviene aceptar la proposición del corredor, porque con ella se gana \$ 1—6 reales 5½ tlacos.

251.—A 0'18 vara.

252.—A 4'95 arroba.

253.—Lado del patio 26½ varas.

254.—1º, volumen del tinaco, 1500 litros; 2º, 1500 kilogramos; y 3º, 3259½ libras.

255.—18 pulgadas.

256.—153'524 varas.

257.—A 44 ³/₁₀ centavos el cuartillo.

258.—3000 marcos de plata de 900 milésimos y 3000 marcos de la de 890.

259.—Al 5 p^{centa.} anual.

260.—Al primer contratista 3096'78; al segundo 1445'16, y al tercero 1858'06.



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE

ÍNDICE.

	PÁGS.
Dictamen de la Comisión de cálculo	3
Prólogo	7
INTRODUCCIÓN Y SISTEMA DE NUMERACIÓN.	
Definiciones	9
Sistema de numeración	11
Regla para escribir una cantidad	17
Regla para leer una cantidad	18
Preguntas y problemas	18
NÚMEROS ENTEROS.	
Adición	20
Sustracción	27
Multiplicación	32
División	43
Preguntas y problemas	53
DIVISORES ENTEROS.	
Definiciones	55
Máximo común divisor	56
Condiciones para que una cantidad sea divisible por los números menores que once	58
Preguntas y problemas	59
FRACCIONES COMUNES Y NÚMEROS FRACCIONARIOS.	
Sistema de numeración	62
Reducción de los enteros a quebrados y reciprocamente ..	63
Valor relativo de los quebrados	64
Principios fundamentales	65
Reducción de los quebrados a un común denominador	66
Simplificación de los quebrados	67
Valuación de los quebrados	69
Preguntas y problemas	70
Adición	72
Sustracción	75

	PÁGS.
Multiplicación	79
División	82
Preguntas y problemas	86

FRACCIONES DECIMALES.

Sistema de numeración	88
Principios fundamentales	91
Reducción a un común denominador y simplificación de las decimales	92
Reducción de los quebrados a decimales y recíprocamente	94
Preguntas y problemas	96
Adición	98
Sustracción	99
Multiplicación	100
División	102
Preguntas y problemas	104

SISTEMA MÉTRICO-DECIMAL Y MEDIDAS ANTIGUAS.

Diversas unidades del sistema métrico-decimal	106
Medidas antiguas de México	110
Correspondencia entre las unidades comunes y las del sistema métrico	113
Preguntas y problemas	115

CÁLCULO DE LOS NÚMEROS COMPLEXOS.

Definiciones, principios y operaciones fundamentales	118
Conversión de los denominados en quebrados y en decimales, y recíprocamente	120
Preguntas y problemas	122
Adición	123
Sustracción	125
Multiplicación por quebrados y por partes alícuotas	127
División	138
Preguntas y problemas	140

CUADRADO Y RAÍZ CUADRADA.

Elevación de un número al cuadrado	141
Raíz cuadrada	144
Aproximación de la raíz cuadrada	148
Extracción de la raíz cuadrada de las decimales y quebrados	148
Preguntas y problemas	152

PÁGS.

CUBO Y RAÍZ CÚBICA.

Elevación de un número al cubo	153
Raíz cúbica	155
Regla para la aproximación de la raíz cúbica	160
Extracción de la raíz cúbica de las decimales y quebrados	161
Preguntas y problemas	165

RAZONES Y PROPORCIONES.

Razón aritmética	167
Razón geométrica	167
Proporción aritmética	168
Proporción geométrica	169
Transformaciones de la proporción geométrica	172
Preguntas y problemas	176

REGLA DE TRES.

Definiciones y problemas que pueden resolverse por regla de tres	177
Casos de la regla de tres	179
Resolución de la regla de tres simple	181
Resolución de la regla de tres compuesta	186
Regla de compañía	190
Regla de interés	194
Regla de descuento	195
Regla conjunta y de cambio	197
Preguntas y problemas	199
Regla de aligación	201
Preguntas y problemas	206
Problemas generales	207

TABLAS DE MEDIDAS, PESOS Y MONEDAS.

Tablas para convertir las medidas de longitud y de superficie mexicanas, en métricas y recíprocamente	212
Tabla para convertir las medidas de volumen mexicanas en métricas, y recíprocamente	214
Tabla para convertir los pesos y monedas mexicanas en métricas, y recíprocamente	216
Equivalencias entre las medidas, pesos y monedas inglesas y las francesas, y recíprocamente	218
Resultado de la resolución de los problemas	1

OBRAS DEL MISMO AUTOR.

Precio á la rústica.

EN MÉXICO.

Nº 1. Aritmética infantil, con sus fundamentos por el método objetivo. . .	\$ 0 '25
Nº 2. Aritmética para los niños, empastada en cartón	0 '50
Nº 3. Aritmética razonada	1 '50
Algebra	1 '50
Geometría	1 '50
Trigonometría rectilínea y esférica	1 '50
Trigonometría rectilínea sola	1 '00
Trigonometría esférica sola	0 '50

El autor no hace reparaciones foráneas. Sus obras pueden comprarse por conducto de los señores libreros de la Capital, y de sus agentes en los Estados.

