JULIO S. HERNANDEZ,

Geometria Intuitiva

Obra premiada en las Exposiciones de Paris y St. Louis Misouri.

NUEVA EDICION.

Librería de la Vda. de Ch. Bouret

MEXICO | GUADALAJARA
o de Mayo, 14 | Avenida Colón, 4

1905

30

Salinas Victoria
10-11-1906

[illegible] de [illegible]

"El Magisterio Nacional."

Es la única revista pedagógica mexicana que abre liberalmente sus páginas para que sin distinción de clases ni categorías, puedan escribir en ella todos los Profesores de la República. Su fin inmediato es: crear relaciones intelectuales entre los maestros, que puedan más tarde transformarse en relaciones de amistad, de fraternidad y de afecto.

CONDICIONES:

"El Magisterio Nacional" se publica el dia último de cada mes. Consta por ahora de 32 páginas en 4° mayor con forro de color.

Toda subscripción la servimos desde el mes de Enero, y con los números 6 y 12 regalaremos una portada y un índice para que los tomos puedan ser empastados.

Los precios de subscripción son los siguientes:

	En la República	En el Extranjero.
Número suelto	$ 0 15	....
Un semestre adelantado	,, 0 80	....
Un año adelantado	,, 1 50	Un peso oro.
Precio de cada tomo de 200 páginas	,, 0 90	....

ESTAN A LA VENTA LOS TOMOS I Y II.

Se recomienda el pago por medio de giros postales á nuestro favor, ó por medio de estampillas de correo de á cinco centavos. Siempre que nosotros tengamos que girar, lo haremos por un año adelantado. A nuestros corresponsales que pidan de cinco ejemplares de cada número en adelante ó bien que coloquen más de cinco subscripciones, les liquidaremos á razón de *diez centavos* el número, siempre que hagan sus pagos adelantados.

Todo pedido que se haga de las obras anunciadas, vendrá acompañados de su importe, sin cuyo requisito no podrá servirse.

La correspondencia se dirigirá al Director: *Sr. Julio S. Hernández.*

4ª Calle de Ignacio Hernández núm. 12.—México, D. F.

LIBRERIA DE LA VDA. DE CH. BOURET

MEXICO.—5 DE MAYO 14.—MEXICO.

Obras de Julio S. Hernández.

Premiadas en la Exposición Universal de Paris de 1900, y en la de St. Louis Misouri. E. U. A.

Estas obras, destinadas de preferencia á la enseñanza primaria elemental y superior, han sido escritas de acuerdo con los principios más avanzados de la Pedagogía moderna, y la mayor parte de ellas se han declarado de texto y de consulta en la Capital y en varios Estados de la República, tanto en las Escuelas oficiales como en las particulares. Las últimas ediciones se venden á los precios siguientes:

LENGUA NACIONAL

1 *Lectura y Escritura simultáneas.* Método Hernández. Con este método excesivamente rápido se enseña á leer á lo sumo en 40 días, aun á niños notoriamente torpes ó desaplicados; su uso es muy fácil y lo pueden practicar con buen éxito toda clase de Maestros. Un ejemplar con grabados.............. $ 0 30

2 *Silabario popular.* Lectura-Escritura. La 1ª edición de esta obra se hizo de 300,000 ejemplares. La nueva edición se ha modificado notablemente; es un cuaderno de 64 páginas y se vende al ínfimo precio de.................................... 0 15

3 *Silabario popular.* Escritura-Lectura. El mismo libro anterior, impreso con caracteres manuscritos, se vende al precio de ... 0 15

4 *Silabario popular.* La misma obra anterior en CARTELES, con grandes tipos de imprenta. En preparación.

5 *Colección de 50 láminas para descripción de estampas.* Esta obrita formada con magníficos fotograbados se vende al precio de. 0 20

ARITMETICA.

6 *Primer año de Aritmética.* Cálculo objetivo, representativo, mental y escrito del 1 al 10, con toda clase de operaciones numéricas y aplicado á todos los problemas de la vida real. Un ejemplar cartoné.................................... 0 25

7 *Segundo año de Aritmética.* Cálculo objetivo, mental y escrito del 1 al 100, con toda clase de operaciones numéricas y aplicado á todos los problemas de la vida real 0 50

8 *Tercer año de Aritmética.* Cálculo objetivo, mental y escrito del 1 al 1000, siguiendo la misma marcha de los años anteriores 0 75

9 *Cuarto año de Aritmética.* Cálculo objetivo, mental y escrito de números sin límite, siguiendo la misma marcha anterior.. 1 00

10 *Aritmética superior.* Curso completo de cálculo para el 5º y 6º años, comprendiendo, además: la teoría completa de las ecuaciones, la elevación á potencias y extracciones de raíces, el cálculo algebraico y la simplificación de operaciones. Todos estos estudios son indispensables para todos los que desean ingresar á la Escuela Preparatoria.................................... 1 50

11 *Sistema métrico decimal.* Esta obra es un curso completo que estudia todos los sistemas de pesas, medidas y monedas: antiguo, moderno, comparado, internacional y aplicaciones geométricas.................................... 0 50

12 *Ejercicios y problemas de Aritmética.* Esta obra es una colección de 3,000 ejercicios y problemas de cálculo aritmético, escrita de conformidad con las doctrinas expuestas en los textos respectivos. Un grueso volumen rústica 2 00

La misma obra se vende en tres tomos en cartonados.

13 Libros 1º y 2º ó sea cálculo del 1 al 100 .... 0 50

14 Libro 3º, cálculo del 1 al 1000.................................... 0 75

15 Libro 4º, cálculo de números sin límite.................... 1 00

16 *Aritmética elemental.* Edición del 4º año de Aritmética con sistema métrico. 1 volumen cartoné.................... 1 50

La misma obra anterior, empastada en tela 2 00

TEXTOS ESCOLARES DIVERSOS.

17 *Curso de lecciones de cosas.* Obra escrita para los alumnos del 4º año elemental; comprende además todas las nociones del programa respectivo 0 50

18 *Geometría intuitiva.* Obra escrita de acuerdo con los principios metodológicos modernos. Comprende: nomenclatura geométrica de cuerpos, superficies y líneas; medición y construcción de líneas, superficies y volúmenes.................... 0 30

19 *Instrucción cívica y moral.* Comprende: la explicación clara y sencilla de las nociones morales y cívicas del 3º y 4º años elementales 0 15

20 *Conferencias científicas á los niños.* Texto de pláticas infantiles sobre las ciencias físicas y naturales, historia, geografía, Estas conferencias fueron dadas por el autor en la Escuela Normal de México 0 75
21 *Silabario popular.* Edición antigua 0 01

OBRAS DE CONSULTA PARA LOS MAESTROS.

22 *Album pedagógico y escolar.* Comprende articulos científicos, pedagógicos y literarios. Un volumen pasta de tela........ 2 00
La misma obra anterior, á la rústica........................ 1 50
23 *Articulos pedagógicos.* Colección en 36 estudios pedagógicos, sobre educación, disciplina, el concepto científico de la Escuela, metodología, organización y legislación escolar, doctrinas pedagógicas las más recientes, etc., etc. Un volumen de más de 500 páginas á la rústica........................ 3 00
24 *Metodología de la Aritmética.* La publicación de esta obra inicia una evolución nueva de la matemática, después de tantos años de estacionamiento y su poder está en que la simplifica tanto, que sin exagerar se puede afirmar que la simplificación llega hasta lo inverosimil. Un volumen rústica 2 00
Un idem empastado en tela........................ 2 50
25 *Programa de Lengua Nacional.* Primer año elemental........ 0 15
26 *Programa de Aritmética.* Primer año elemental........... 0 15
27 "*El Magisterio Nacional.*" Revista mensual pedagógica en la que colaboran los pedagogos más notables de la República. Precio de suscripción anual, *un peso cincuenta centavos.* Están á la venta los tomos I y II, costando cada ejemplar...... 0 9)

BIBLIOTECA ESCOLAR ECONOMICA.

Este es el título de una extensa Biblioteca, de libros elementales modernos de poco precio y sobre todas las asignaturas que circularán en breve en numerosas ediciones, entre todos los maestros y alumnos de las Escuelas Primarias de la República. Cada ejemplar costará. 0 15

DIRIJANSE LOS PEDIDOS AL AUTOR

4ª CALLE DE IGNACIO HERNANDEZ NUM. 12. MEXICO, D. F.

quien los servirá inmediatamente á vuelta de correo y franco de porte. A todo pedido se acompañará el importe correspondiente en estampillas postales, en giros de correo ó en dinero efectivo por Express ó por cualquier otro conducto.

TEXTOS ESCOLARES MODERNOS.

GEOMETRIA INTUITIVA

POR

JULIO S. HERNANDEZ,

Autor de
varias obras científicas y pedagógicas.

Obra premiada en las Exposiciones de Paris y St. Louis Misouri.

UNDECIMA EDICION.
Revisada, corregida y aumentada por el Autor.

MEXICO
LIBRERIA DE CH. BOURET.
CALLE DEL CINCO DE MAYO NÚMERO 14.
1905

PROLOGO.

Las primeras diez ediciones de nuestra obrita "Geometría Intuitiva," hechas en París, están totalmente agotadas.

Continúa aún la demanda incesante de este humildísimo librito y esto nos ha obligado á revisarlo nuevamente, corrigiéndolo de acuerdo con los adelantos más recientes de la Pedagogía moderna y aumentándolo además con un apéndice en el cual hemos agregado algunas nociones más, que se exigen en los programas escolares vigentes.

Creemos corresponder de esta manera á la benévola acogida con que se han dignado distinguirnos nuestros constantes favorecedores, á quienes no podemos menos que tributarles públicamente, por medio de estas líneas, las expresiones más sinceras de nuestra gratitud y cariño.

JULIO S. HERNÁNDEZ.

México, 1905.

GEOMETRIA INTUITIVA.

PRIMERA PARTE.

NOMENCLATURA GEOMETRICA.

CAPITULO I.

NOCIONES PRELIMINARES.

Sumario: -1. Cuerpo.- 2. Espacio. 3. Volumen.—4. Cuerpos sólidos: de forma irregular y de forma geométrica —5. Caras de los cuerpos.

1. Se llama **cuerpo** todo ser ú objeto material que ocupa un lugar en la extensión indefinida del espacio;

Fig. 1.

por ejemplo: los minerales, los vegetales, los animales, los hombres, los seres artificiales (fig. 1).

2. El **espacio** es muy grande, no tiene principio ni fin, está todo ocupado, ya unas veces por cuerpos sólidos como todos los indicados anteriormente, otras por líquidos como el agua y otras por gases como el aire; pero hasta ahora no conocemos ningún lugar que esté completamente vacío.

3. Se llama **volumen** la parte de espacio que ocupa un cuerpo. Sólo los cuerpos sólidos tienen un volumen más ó menos fijo; los líquidos cambian de volumen según la vasija que los contiene, y los gases cuando están libres se extienden indefinidamente.

4 Los cuerpos **sólidos** según la forma de su volumen son de dos clases:

1º Cuerpos sólidos de **forma irregular,** ó que no obe-

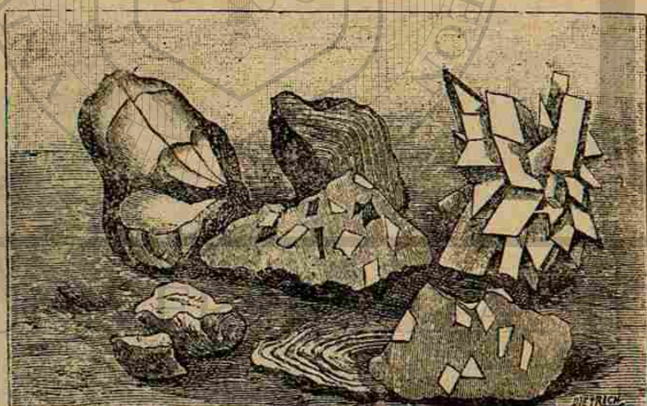


Fig. 2.

decen á ninguna regla fija para engendrar su volumen, y por consiguiente es irregular en todas sus partes (figura 2).

2º Cuerpos sólidos de **forma geométrica,** ó que obedecen á una regla fija para engendrar su volumen, y por consiguiente es regular en todas sus partes (fig. 3).

5. Tanto en los cuerpos de forma irregular, como en los de forma geométrica se observan en su exterior tres clases de caras diferentes que reciben el nombre de **superficies**

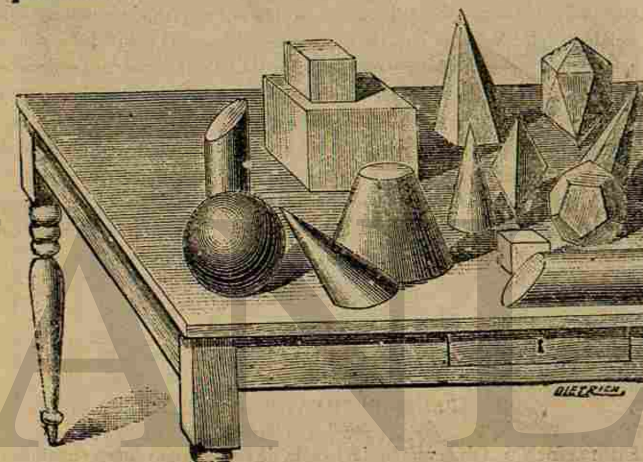


Fig. 3.

1º Cuerpos terminados con superficies **planas** que existen con abundancia en los minerales, cuando están en forma de cristales.

2º Cuerpos terminados con superficies **redondas**, que se encuentran en las plantas, en los animales y en el hombre.

3º Cuerpos terminados con superficies **mixtas**, ó sean formados de planas y redondas, los cuales se encuentran especialmente en los seres artificiales.

Ejercicios y observaciones. — 1. Enumeración de objetos y seres: minerales, vegetales, animales, hombres, objetos artificiales.—2. Idea del espacio, lugar que ocupan los cuerpos sólidos, líquidos y gaseosos.—3. Idea del volumen en los sólidos, en los líquidos y en los gases.—4. División de los cuerpos sólidos, por su forma y volumen, en cuerpos de forma irregular y de forma geométrica.—5. Observación de las caras en unos y otros, división natural que resulta.

Cuestionario.—¿Qué es cuerpo? — ¿Enumere Vd. algunos cuerpos?—¿Minerales?—¿Plantas? —¿Animales? — ¿Algunos objetos artificiales?—¿Dé Vd. una idea del espacio?—¿Todo está ocupado?—¿Cuántos estados presentan los cuerpos?—¿Cite Vd. algunos cuerpos sólidos?—¿Líquidos?—Gaseosos? —¿Qué se entiende por volumen?—¿Cómo es el volumen en los sólidos, en los líquidos y en los gases? —¿Cómo se dividen los sólidos según su forma?—¿Qué diferencia hay entre los cuerpos de forma irregular y los de forma geométrica? -¿Ejemplos de unos y otros?—¿Cómo se dividen los cuerpos según sus caras?—¿Ejemplos de cuerpos que tengan caras planas? —¿Cuerpos con caras redondas? - ¿Cuerpos con caras mixtas?

CAPITULO II.

PRINCIPALES ELEMENTOS GEOMÉTRICOS.

Sumario: —6. Observación de la sala de clases como cuerpo geométrico.—7. El salón en sus superficies.—8. El salón en sus líneas:

6. Observaciones de la sala de clases como cuerpo geométrico (fig. 4):

1ª Ocupa un lugar en el espacio, tiene forma regular, obedece á una regla fija para engendrar su volumen, luego es un cuerpo geométrico.

2ª Tiene tres dimensiones, **longitud** ó **largo**, **latitud** ó **ancho** y **altura**, que según los casos se le llama también á esta última, **grueso**, **espesor** ó **profundidad**.

3ª Tiene cuatro paredes, un piso y un techo que nos

dan idea de lo que son **superficies planas**. El contorno de cada superficie se llama perímetro; en el presente caso es un perímetro cuadrilátero, porque tiene cuatro lados.

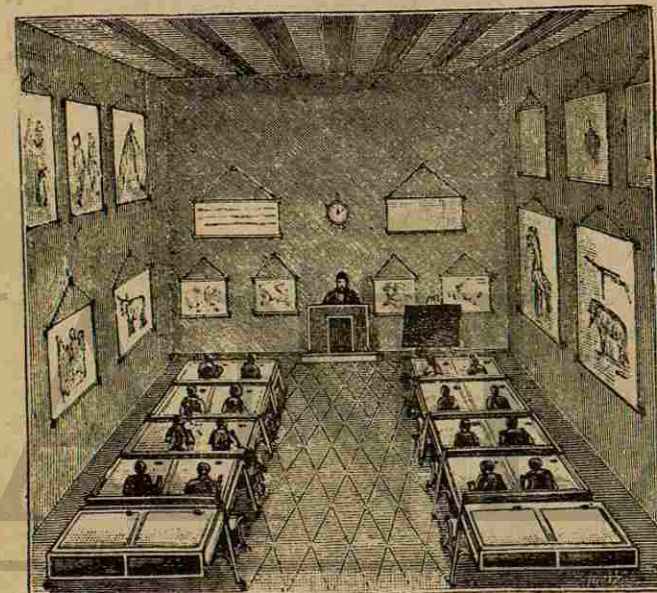


Fig. 4.

4ª Cada superficie acaba por cada lado en una orilla, filo ó juntura que se llama **línea**. En el presente caso hay doce líneas que son todas líneas rectas.

5ª Cada línea acaba en una punta que recibe el nombre de **punto**, habiendo en el presente caso ocho puntos.

7. Observaciones de la sala de clases en sus superficies:

1ª Cada superficie del salón tiene sólo dos dimensiones: **longitud** ó **largo** y **latitud** ó **ancho.**

2ª Dos superficies unidas por una línea forman lo que se llama un ángulo **diedro** ó de dos caras; también se notan tres superficies unidas por tres líneas y un punto que forman un ángulo **triedro** ó de tres caras. Si fueren mas de tres superficies y un punto se les llama **ángulos poliedros.**

3ª Las paredes de enfrente ó bien el techo con el piso guardan respectivamente entre sí una misma distancia y se llaman superficies **paralelas.**

4ª Dos superficies unidas entre sí por una línea de manera que una se apoye sobre la otra y sin inclinarse á ningún lado, son dos superficies **perpendiculares.**

5ª Las paredes laterales ó sean las cabeceras y costados están trazados siguiendo la dirección de un hilo á plomo, son superficies **verticales.** El techo y el piso están construídos á nivel ó siguiendo la posición del agua tranquila, son superficies **horizontales.**

8. Observaciones de la sala de clases en sus líneas:

1ª Cada línea no tiene más que una dimensión, es la **longitud** ó **largo.**

2ª Dos líneas que se juntan en un punto ó **vértice** forman un **ángulo lineal.**

3ª Dos líneas opuestas en cada superficie que guardan entre sí una misma distancia, son dos **líneas paralelas.**

4ª Una línea recta que descansa sobre otra sin inclinarse á ningún lado, es una **línea perpendicular.**

5ª Las líneas de las paredes que tienen la dirección de un hilo á plomo son líneas **verticales**; las trazadas á nivel ó siguiendo la dirección de una línea perpendicular á la vertical son líneas **horizontales.**

Ejercicios y observaciones.—6. Observación de la sala de clases considerada como cuerpo geométrico para dar idea de sus tres dimensiones, de superficie, de línea y de punto.—7. Observaciones de superficies: sus dimensiones, ángulos diedros, triedros, poliedros, superficies paralelas, perpendiculares, verticales y horizontales.—8. Observación de líneas, su única dimensión, ángulos lineales, líneas paralelas perpendiculares, verticales y horizontales

Cuestionario.—¿Por qué la sala de clases es un cuerpo geométrico?—¿Señale Vd. sus tres dimensiones?—¿Ponga Vd. ejemplos en que la altura se considere como profundidad?—¿Cuántas caras tiene el salón y qué clases de superficies son?—¿A qué llama Vd. perímetro?—¿Qué clase de perímetro tienen las paredes?—¿A qué se llama arista?—¿Señale Vd. y cuente todas las aristas que hay en el salón?—¿Qué clase de aristas son?—¿A qué se llama punto y cuántos puntos hay en el salón?—¿Cuáles son las dimensiones de una superficie?—¿A qué se llama ángulo diedro, triedro ó poliedro?—¿Señale Vd. todos los ángulos diedros y tiedros del salón?—¿Hay algún ángulo poliedro?—¿Explique Vd. lo que son superficies paralelas y señale Vd algunas?—¿Haga Vd. lo mismo con las superficies perpendiculares?—¿Otro tanto con las superficies verticales y horizontales?—¿Qué dimensiones tiene una línea?—¿Cómo es un ángulo lineal?—¿Señale Vd. algunos?—¿Señale Vd. algunas líneas paralelas?—¿Líneas perpendiculares?—¿Verticales y horizontales?

CAPITULO III.

OBSERVACIÓN DE TRES CUERPOS GEOMÉTRICOS.

Sumario:—9. Observación del cubo.—10. Observación de la esfera.—11. Observación del cilindro.—12. Diferencias entre los tres cuerpos.—13. Sus semejanzas.—14. Definiciones.—15. La Geometría y su división.

9. El cuerpo que tenemos á la vista es un **cubo**, en el cual observamos lo siguiente (fig. 5):

1º Como cuerpo geométrico tiene tres dimensiones iguales, seis superficies planas, doce aristas ó líneas rectas y ocho puntos

2º En sus superficies: tiene dos dimensiones iguales, ángulos diedros y triedros, superficies paralelas, perpendiculares, verticales y horizontales.

3º En sus líneas: una sóla dimensión, ángulos linea-

Núm. 5

Núm. 6.

les, líneas paralelas, perpendiculares, verticales y horizontales.

10. Este cuerpo es una **esfera** y notamos en ella lo siguiente (fig. 6):

1º Como cuerpo geométrico: sus tres dimensiones son iguales, tiene una superficie totalmente redonda, ninguna línea, ni punto fijos.

2º En sus superficies: como se considera una sola, no se notan ángulos ni posiciones superficiales de ninguna clase.

3º En sus líneas: sólo puede verse un contorno que es una línea curva cerrada llamada **circunferencia**; pero no se notan ángulos ni posiciones lineales de ninguna clase.

11. Este cuerpo se llama **cilindro** y las observaciones que podemos hacer son las siguientes (fig. 7):

1º Como cuerpo geométrico: tiene tres dimensiones, una superficie redonda y dos planas **circulares,** dos líneas curvas cerradas ó circunferencias.

Fig. 7.

2º En sus superficies: combinaciones de superficies planas y curvas, dos superficies circulares paralelas, una superficie curva perpendicular á las planas, otra vertical y dos horizontales circulares.

3º En sus líneas: combinaciones de líneas rectas y curvas, dos circunferencias paralelas, horizontales, verticales, líneas perpendiculares.

12. Observaciones de los tres anteriores cuerpos geométricos en sus diferencias:

1ª En el cubo todas las seis superficies son planas.

2ª En la esfera sólo hay una superficie totalmente redonda.

3ª En el cilindro hay una superficie redonda y dos superficies planas.

13. Observaciones de los mismos cuerpos por sus semejanzas:

1ª Los tres son cuerpos geométricos.

2ª En los tres hay superficies.

3ª En los tres hay líneas.

14. Definiciones importantes:

1º Se llama **cuerpo geométrico** todo objeto material cuyo volumen al engendrarse obedece á una regla fija bien determinada; puede tener caras planas, redondas ó mixtas. La parte de espacio que ocupa un cuerpo se llama su **volumen.**

2º La **superficie** es el límite que separa á un cuerpo del resto del espacio; en los cuerpos geométricos es la cara exterior que presentan, la cual puede ser plana ó curva.

3º La **línea** en los cuerpos geométricos es el límite ó fin de una superficie y puede ser recta ó curva.

4º El **punto** en los cuerpos geométricos es el límite ó fin de una línea.

15. La **Geometría** tiene por objeto estudiar las propiedades de los cuerpos de formas regulares, con el fin de medir sus **volúmenes**, sus **superficies** ó sus **líneas.**

La Geometría se divide en tres partes:

1º **Longimetría** que tiene por objeto el estudio de las propiedades y medición de las **líneas.**

2º **Planimetría** que tiene por objeto el estudio de las propiedades y medición de las **superficies.**

3º **Estereometría** que tiene por objeto el estudio de las propiedades y medición de los **volúmenes.**

Ejercicios y observaciones. 9. Observacion del cubo como cuerpo geométrico en sus superficies, líneas, puntos; objetos cúbicos.—10. Los mismos ejercicios con la esfera; objetos naturales y artificiales de forma esférica.—11. Los mismos ejercicios con el cilindro; formas cilíndricas.—12. Hágase que los alumnos precisen las diferencias de los tres cuerpos citados.—13. Que describan por sí mismos sus semejanzas.—14. Procure el Profesor que como resultado final, los alumnos definan las ideas geométricas: cuerpo, superficie, línea, punto.—15. Haga el mismo esfuerzo para obtener de ellos la definición de Geometría y su división.

Cuestionario. ¿Cómo se llama este cuerpo? (mostrando el cubo). Señale Vd. sus dimensiones.—Enumere Vd. sus superficies, sus aristas y sus puntos.—Observe Vd. las superficies y señale las dimensiones de una.—Sus ángulos diedros y triedros. Las superficies paralelas y perpendiculares.—Verticales y horizontales. Señale Vd. una línea y sus dimensiones. Sus ángulos lineales.—Sus líneas paralelas y perpendiculares.—Verticales y horizontales.—¿Cómo se llama este cuerpo? (mostrando una esfera.)—¿Qué observa Vd. en ella como cuerpo geométrico?—¿Qué nota Vd. en sus superficies?—¿Qué me dice Vd. de sus líneas?—¿Cómo se llama este otro cuerpo? (mostrando un cilindro.)—¿Qué observa Vd. en él como cuerpo geométrico?—¿En sus superficies?—¿En sus líneas?—¿Qué diferencias existen entre los tres cuerpos?—¿Qué semejanzas?—Cite algunos objetos cúbicos, esféricos y cilindros.—¿Qué es un cuerpo geométrico?—¿Qué es volumen?—¿Qué es superficie?—¿Qué es línea?—¿Qué es punto?—¿Cuál es el objeto de la Geometría?—¿Cómo se divide la Geometría?—¿Qué es Longimetría?—¿Qué es Planimetría?—¿Qué es Estereometría?

CAPÍTULO IV.

NOMENCLATURA DE VOLÚMENES.

Sumario:—16. Clasificación de los cuerpos geométricos.—17. Poliedros regulares.—18. Poliedros irregulares.—19. Cuerpos redondos.—20.—Cuerpos mixtos.

16. Los cuerpos geométricos se dividen en tres grupos principales:

1º **Poliedros** ó que tienen todas sus superficies planas. Hay dos clases de poliedros: **regulares** ó que tienen sus superficies iguales, é **irregulares** ó que las tienen desiguales.

2º **Cuerpos redondos** ó que tienen todas sus superficies redondas.

3º **Cuerpos mixtos** ó que tienen á la vez superficies planas y redondas.

17. Los **poliedros regulares** que se conocen son los siguientes:

1º El **tetraedro** formado con cuatro superficies **triangulares,** es decir, cerradas por tres lados iguales cada una (fig. 8).

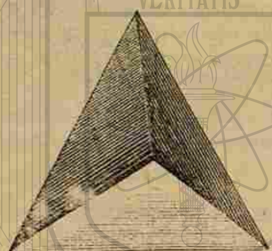


Fig. 8.

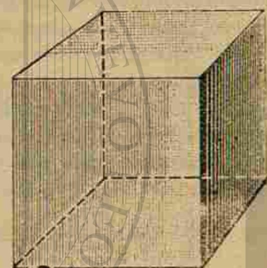


Fig 9

2º El **hexaedro** ó **cubo** formado con seis caras **cuadradas,** es decir, cerradas por cuatro lados iguales cada una (fig. 9).

3º El **octaedro** formado por ocho caras triangulares ó de tres lados iguales cada una (fig. 10).

4º El **dodecaedro** formado por doce caras **pentagonales** ó cerradas por cinco lados iguales cada una (figura 11).

5º El **icosaedro** formado por veinte caras triangulares ó de tres lados iguales cada una (fig. 12).

18. Los **poliedros irregulares** que se conocen son los siguientes:

1º Los **prismas** que tienen dos clases de caras diferen-

tes: las **bases**, ó sean la cara superior y la cara inferior, son siempre iguales entre sí y paralelas, pueden estar cerradas por tres, cuatro, cinco ó más lados; las **caras**

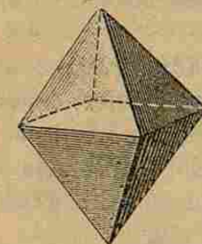


Fig 10.

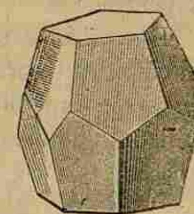


Fig. 11.

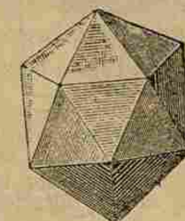


Fig. 12.

laterales tienen siempre cuatro lados de dos en dos paralelos y que reciben el nombre de paralelógramos (figs. 13, 14 y 15).

Fig. 13.

Fig. 14.

Fig. 15.

La **altura** en un prisma es la distancia vertical que une las dos bases.

Los prismas pueden ser **rectos** ú **oblicuos.** En el prisma recto las caras laterales son perpendiculares á las bases. En el prisma oblicuo no lo son (fig. 16).

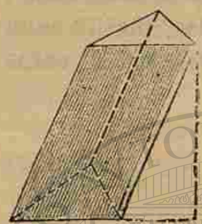


Fig. 16.

Los prismas pueden ser, además: **triangulares**, **cuadrangulares**, **pentagonales,** etc., según que sus bases sean triángulos, cuadriláteros, ó pentágonos.

Los prismas **cuadrangulares** se subdividen en **trapezoidales**, cuyas bases son trapezoides ó que no tienen ningún lado paralelo; **trapeciales** ó que sus bases son trapecios, es decir, que sólo tienen dos

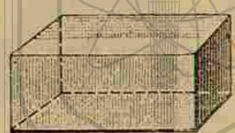


Fig. 17.

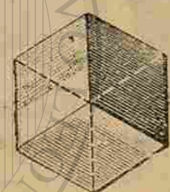


Fig. 18.

lados paralelos y dos no; y **paralelipipedos** ó que sus bases son paralelógramos, es decir con cuatro lados paralelos.

Fig 19.

Fig. 20.

Fig. 21.

Los **paralelipipedos** pueden ser: **rectángulo** si las bases son rectangulares (fig. 17), **rombal** ó **romboidal** si sus bases son **rombos** ó **romboides, y romboedro** si tanto las bases como las caras laterales son rombos (fig. 18).

2º Las **pirámides,** que sólo tienen una base, la cual puede ser de tres, cuatro, cinco ó más lados; las caras laterales son siempre triangulares ó cerradas por tres lados y terminan todas juntas en un sólo punto llamado **cúspide** (figs. 19, 20 y 21).

La **altura** en una pirámide es la distancia vertical de la cúspide á la base.

La pirámide puede ser: **recta** ú **oblicua**. En la pirámide recta la altura es siempre una línea vertical que

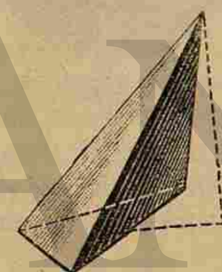


Fig 22

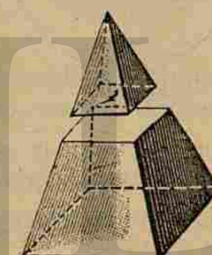


Fig. 23.

une la cúspide con el centro de la base; en la oblicua no se efectúa dicha condición (fig. 22).

Las pirámides pueden ser además: **triangulares, cuadrangulares, pentagonales,** etc., según que su base sea un triángulo, un cuadrilátero ó un pentágono, etc.

La pirámide **truncada** resulta de cortar por medio de un plano una sección en la parte superior paralela á la base (fig. 23).

19. Los **cuerpos redondos** son los siguientes:

1º La **esfera** que está terminada por una superficie igualmente redonda en todas sus partes, de manera que cada uno de sus puntos se encuentra á igual distancia de un punto interior llamado centro (fig. 24).

Si se corta la esfera en dos mitades iguales, se llaman **hemisferios** (fig. 25) y la cara plana se llama **círculo máximo.**

Fig. 24.

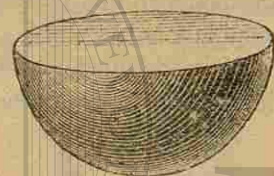


Fig. 25.

Cuando se corta la esfera en dos partes desiguales, cada una de ellas recibe el nombre de **casquete esférico**, y la parte plana que presentan se llama un **círculo menor.**

Cuando una parte de la esfera está comprendida entre dos planos paralelos se llama **segmento esférico.**

La porción de superficie esférica comprendida entre dos círculos se llama **zona.**

La porción de superficie esférica comprendida entre dos semi-circunferencias que se cortan en dos puntos opuestos se llama **huso esféico.**

Toda línea recta que parte del centro de la esfera y termina en cualquier punto de su superficie se llama **radio.** El doble radio se llama **diámetro** ó **eje**, y á los extremos de esta línea se les llama **polos.**

2º El **elipsoide** es un cuerpo redondo terminado por una superficie cuya curvatura no es igual en todas sus partes, de manera que cortado en ciertas direcciones resulta un círculo y en otras resulta una elipse, que se diferencía del círculo en que sus diámetros son desiguales (fig. 26).

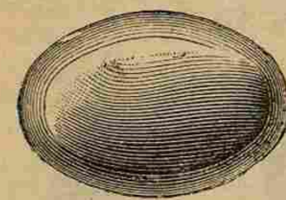


Fig. 26.

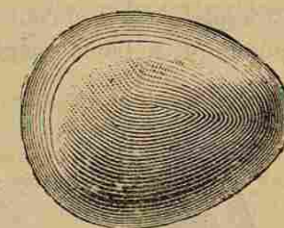


Fig 27

3º El **ovoide** es un cuerpo redondo cuya forma es semejante á la de un huevo de ave, ancho por un extremo y angosto por otro (fig. 27).

20. Los cuerpos mixtos son los siguientes:

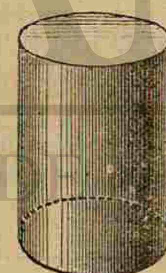


Fig. 28.

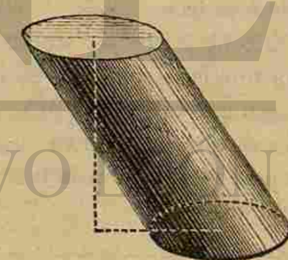


Fig. 29.

1º El **cilindro** que tiene dos bases planas paralelas y circulares, cuya cara lateral es completamente redonda y abarca todo el contorno de las dos bases (fig. 28).

La **altura** de un cilindro es la distancia vertical de las dos bases.

El cilindro puede ser: **recto** ú **oblicuo**. Es recto cuando su altura une los dos centros de las bases y oblicuo en el caso contrario (fig. 29).

2º El **cono** tiene una sola base plana y circular, la cara lateral sigue el contorno de la base y termina en un punto que se llama **cúspide** (fig. 30).

Fig. 30.

Fig 31.

Fig. 32.

La **altura** del cono es la distancia vertical de la cúspide á la base.

El cono puede ser: **recto** ú **oblicuo**. Es recto si la altura une la cúspide con el centro de la base, y oblicuo en el caso contrario (fig. 31).

Si se corta el cono en su parte superior por medio de un plano paralelo á la base, resulta un cono **truncado** (fig. 32).

Ejercicios y observaciones.—16. La clasificación de los cuerpos geométricos se hará en la caja de sólidos por observación.—17. Examínense cada uno de los poliedros regulares en cuanto á sus superficies y sus aristas ó líneas, ángulos, diedros, triedros, etc., ángulos lineales, vértices, superficies y líneas perpendiculares, oblicuas, paralelas, verticales, horizontales, inclinadas; superficies triangulares, cuadrangulares, pentagonales, perímetros; ejemplos de objetos que tengan formas semejantes, definiciones, etc.—18. Observaciones en los poliedros irregulares, siguiendo el mismo orden que en los anteriores, bases, alturas cúspide; ejemplos de formas prismáticas y piramidales, la pirámide truncada.—19. Los cuerpos redondos: uso de las palabras esférico, hemisférico, ovoidal, elipsoidal; ejemplos diversos de varios objetos. 20. Observación de los cuerpos mixtos en el mismo orden que los anteriores ejemplos de formas cilíndricas y cónicas, el cono truncado. Dibujo de todos los cuerpos geométricos.

Cuestionario.—¿Cómo se dividen los cuerpos geométricos?—¿Qué son poliedros?—¿En qué se distinguen los poliedros regulares de los irregulares?—¿Qué son cuerpos redondos?—¿Qué son cuerpos mixtos?—¿Cuántos y cuáles son los poliedros regulares que se conocen? ¿Qué es el tetraedro, el hexaedro, el octaedro, el dodecaedro, el icosaedro?—¿Cuántas caras, aristas, ángulos diedros, triedros ó poliedros y vértices hay en cada uno de los poliedross regulares?—Señale Ud. en los mismos cuerpos: superficies y líneas, perpendiculares, paralelas, oblicuas, verticales y horizontales. ¿Cómo son los perímetros en cada cara de estos cuerpos?—¿Cuáles son los poliedros irregulares?—¿Qué son prismas?—Señale Ud. las bases, la altura y las caras laterales de un prisma.—¿Cómo se dividen los prismas según su posición y según sus bases.—¿Cómo se subdividen los prismas cuadrangulares?—¿Cuáles son los prismas: trapezoidales, trapeciales y paralelipípedos?—¿Cuantas clases de paralelipípedos se conocen?—¿Qué son paralelipipedos, rombales, rectangulares, romboidales? ¿Qué es un romboedro?—¿Qué son las pirámides?—Señale Ud. las caras laterales, la base, la altura y la cúspide de una pirámide.—¿Cómo se dividen las pirámides según su posición y la forma de sus bases?—¿Cuáles son los cuerpos redondos que se conocen?—¿Qué es la esfera?—¿A qué se llama: hemisferio, casquete esférico, segmento esférico?—¿A qué se llama: círculo máximo, círculo menor, zona, huso esférico?—¿Qué es radio, diámetro, eje y polos en la esfera?—¿Qué es elipsoide?—¿Qué es ovoide?—¿Cuáles son los cuerpos mixtos?—¿Qué es un cilindro?—¿Qué es un cono?—¿Explique Ud lo que sepa de las bases, altura, caras laterales, etc., del cilindro y del cono.

CAPITULO V.

NOMENCLATURA DE SUPERFICIES.

Sumario:—21. Clasificación de superficies.—22. Superficies planas rectilíneas de perímetro regular.—23. Superficies planas rectilíneas de perímetro irregular.—24. Superficies planas curvilíneas.—25. Superficies planas mixtilíneas.—27. Superficies curvas.—27. Superficies mixtas.

21. Las superficies en los cuerpos geométricos son de tres clases:

1ª **Superficies planas** ó que puede hacerse coincidir en toda su extensión el borde de una regla en todas direcciones.

Las superficies planas pueden ser de tres clases: **rectilíneas**, ó limitadas por líneas reactas, **curvilíneas** ó limitadas por líneas curvas, y **mixtilíneas** ó limitadas por rectas y curvas.

Las **superficies planas rectilíneas** son de dos clases: de **perímetro regular** ó que su contorno está formado de lados iguales y todos á igual distancia del centro; de **perímetro irregular**, cuyo contorno está formado de lados desiguales y por consiguiente también á desigual distancia del centro.

2ª **Superficies curvas** ó que únicamente puede hacerse coincidir en ellas el borde de una regla más que en un solo punto.

3ª **Superficies mixtas** ó que están formadas de partes planas y curvas á la vez.

Fig. 33.

22. Las **superficies planas rectilíneas de perímetro regular** son las siguientes:

1ª Superficie **triangular** ó de tres lados iguales se encuentra en el tetraedro, el octaedro y el icosaedro, también en las bases de los prismas y pirámides triangulares (fig. 33).

2ª Superficie **cuadrangular** ó de cuatro lados iguales, se encuentran en el hexaedro ó cubo y también en las bases de los prismas y pirámides cuadrangulares (fig. 34).

Fig. 34.

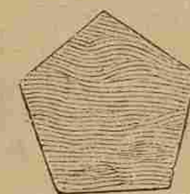


Fig. 35.

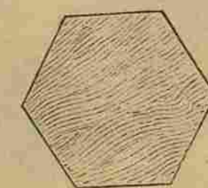


Fig. 36.

3ª Superficie **pentagonal** ó de cinco lados iguales, se encuentra en el dodecaedro y también en las bases de los prismas y pirámides pentagonales (fig. 35).

4ª Superficies: **hexagonal, heptagonal, octagonal, eneagonal**, etc., ó de seis, siete, ocho, nueve, etc., lados iguales, se encuentran en las bases de los prismas y de las pirámides (fig. 36).

23. Las **superficies planas rectilíneas de perímetro irregular** son las siguientes:

Fig. 37.

Fig. 38.

Fig. 39.

1ª Triángulos: el **isósceles** formado por dos lados iguales y uno desigual, se encuentra en las caras laterales de las pirámides (fig. 37); el **escaleno** formado por tres lados desiguales, se encuentra en las pirámides oblicuas (fig. 38.)

Fig. 40.

Fig. 41.

2ª Cuadriláteros: el **paralelógramo rectángulo** formado de cuatro lados paralelos y perpendiculares, dos mayores y dos menores; se encuentra en las caras laterales de los prismas (fig. 39); el **rombo**, de cuatro lados iguales paralelos y oblicuos, de ángulos desiguales, se encuentra en los paralelipípedos rombales y romboidales y también en el romboedro (fig. 40); el **romboide**

Fig. 42.

Fig. 43.

semejante al rombo con dos lados mayores y dos menores (fig. 41); el **trapecio** que sólo tiene dos lados opuestos paralelos y dos no, se encuentra en las caras laterales en las pirámides truncadas y en las bases de los prismas trapeciales (fig. 42); **el trapezoide** de cuatro lados, pero que ninguno es paralelo, se encuentra en las bases de los prismas trapezoidales (fig. 43).

3ª Polígonos: todas las superficies cerradas por cinco ó más lados desiguales, se encuentran en los poliedros de caras irregulares (fig. 44).

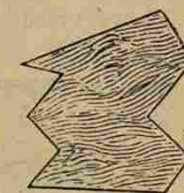


Fig. 44.

24. Las **superficies planas curvilíneas** son las siguientes:

1º El **círculo** que es una superficie plana limitada por una línea curva cerrada, que recibe el nombre de **circunferencia**, cuyos puntos están todos á igual distancia de otro interior llamado centro (fig. 45).

El círculo se encuentra en la mayor parte de las secciones esféricas, en las bases del cilindro y del cono y en algunas secciones del elipsoide.

Fig. 45.

Fig. 46.

2ª La **elipse** es una superficie plana alargada y simétrica, limitada por una línea curva cuyos puntos están á desigual distancia del centro.

La elipse resulta de una sección del elipsoide tomada en su parte más larga ó bien de secciones oblicuas del cilindro ó del cono (fig. 46).

3ª El **óvalo** que es una superficie plana alargada y limitada por una línea curva cerrada, ancha por un extremo y angosta por otro.

El óvalo resulta de una sección longitudinal del ovoide (fig. 47).

25. Las **superficies planas mixtilineas** son las siguientes:

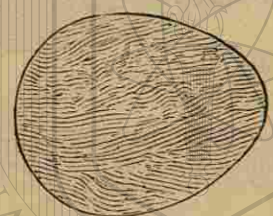


Fig. 47.

Fig. 48.

1ª El **cuadrante de circulo**, el **semi-circulo**, el **sector** formado por dos radios y un arco, el **segmento** formado por una cuerda y un arco, la **semi-elipse** ó cual-

Fig. 49

Fig. 50.

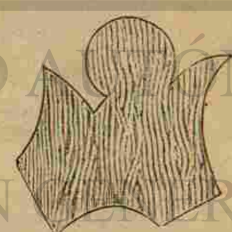


Fig. 51.

quiera fracción de las superficies planas curvilíneas cerrada por una ó más líneas rectas (fig. 48).

2ª La parte plana de las siguientes secciones cónicas: la **parábola** que resulta de un corte paralelo á la generatriz del cono (fig. 49); la **hipérbola** que consiste en un corte paralelo al eje ó sea á la línea perpendicular que cae de la cúspide al centro de la base del cono (figura 50).

3ª Hay otra multitud de superficies planas mixtilíneas, regulares ó irregulares, cerradas por tres ó más líneas rectas y curvas combinadas (fig. 51).

26. Las **superficies curvas** son de dos clases:

1ª Superficies curvas **cóncavas** ó sea la pared interior de todos los cuerpos redondos (fig. 52).

Fig. 52.

2ª Superficies curvas **convexas** ó sea la pared exterior de los mismos.

Fig. 53.

27. Las **superficies mixtas** son combinaciones de superficies planas y curvas; se encuentran en el cilindro, en el cono y en la mayor parte de las secciones de los cuerpos redondos.

Como aplicación de las superficies mixtas se observan las siguientes combinaciones en los lentes (fig. 53): 1. Bicóncavo. — 2. Biconvexo. — 3. Cóncavo-convexo (menisco convergente). — 4. Cóncavo-convexo (menisco divergente). — 5. Plano-cóncavo. — 6. Plano-convexo.

Ejercicios y observaciones. — 21. Hágase la clasificación de superficies en planas, curvas y mixtas en la caja de sólidos y además en la caja especial de superficies. — 22. Clasificación de las superficies planas según su perímetro en rectilíneas, curvilíneas y mixtilíneas. Superficies planas de perímetro regular: triangulares, cuadrangulares, pentagonales, hexagonales, etc., ángulos, líneas, etc. — 23. Examen de las superficies planas de perímetro irregular: triángulos, cuadriláteros, polígonos. — 24. Observación de las superficies planas curvilíneas en las secciones de los cuerpos redondos y mixtos; uso de los adjetivos, circular, elíptico y oval. — 25. Superficies planas mixtilíneas observadas en las secciones de los mismos cuerpos geométricos; uso de los adjetivos semi-circular, parabólico, hiperbólico. — 26. Ejemplos de superficies cóncavas y convexas. — 27. Observaciones de superficies mixtas en las secciones de los cuerpos redondos y mixtos, combinaciones de las superficies en los lentes.

Cuestionario. — ¿De cuántas clases pueden ser las superficies en los cuerpos geométricos? — ¿En qué se conocen las superficies planas, las curvas y las mixtas? — ¿Cómo se clasifican las superficies planas según su perímetro? — ¿Cómo se subdividen las superficies planas rectilíneas? — ¿Cuáles son las superficies planas rectilíneas de perímetro regular? — ¿La superficie triangular de perímetro regular en qué cuerpos geométricos se encuentra? — ¿La cuadrangular en cuáles otros? — ¿La pentagonal? — ¿La hexagonal, heptagonal, etc.? — ¿Cuáles son las superficies planas rectilíneas de perímetro irregular? — ¿A qué se llaman triángulos isósceles y escalenos y en qué cuerpos se encuentran? — ¿Respecto de los cuadriláteros á qué se llama paralelógramos: rectángulo, rombo y romboide y en qué cuerpos geométricos se encuentran? — ¿Qué es un trapecio y un trapezoide y en qué cuerpos se encuentran? — ¿Entre las superficies de perímetro irregular á cuáles se llama polígonos? — ¿Cuáles son las superficies planas curvilíneas? — ¿Qué es círculo y en qué cuerpos geométricos se encuentra? — ¿Cómo se llama el perímetro del círculo? — ¿Qué es elipse y en qué cuerpos se encuentra? — ¿Qué es el óvalo y en qué cuerpo se encuentra? — ¿Cuáles son las superficies planas mixtilíneas? — Ponga Ud. ejemplos de superficies planas mixtilíneas en secciones circulares y elípticas. — ¿A qué se llama parábola é hipérbola? — ¿Qué otra clase de superficies mixtilíneas se conocen? — ¿Cuáles son las superficies curvas? — ¿En qué se distingue una superficie curva cóncava de otra convexa? — ¿En qué consisten las superficies mixtas y en qué cuerpos geométricos se encuentran? — ¿Qué combinaciones se conocen en los lentes de superficies planas y curvas?

CAPITULO VI.

NOMENCLATURA DE LINEAS.

Sumario. — 28. Clasificación de líneas. — 29. Líneas rectas aisladas. — 30. Líneas rectas combinadas. — 31. Angulos. — 32. Triángulos. — 33. Cuadriláteros. — 34. Polígonos. — 35. Líneas curvas abiertas. — 36. Líneas curvas cerradas. — 37. Líneas mixtas.

28. Las **líneas** en los cuerpos geométricos son de tres clases:

1ª Líneas **rectas** ó que tienen todos sus puntos en una misma dirección. Las líneas rectas pueden ser: **aisladas** ó **combinadas.**

2ª Líneas **curvas** ó que todos sus puntos cambian constantemente de dirección. Las líneas curvas pueden ser: **abiertas** ó **cerradas.**

3ª Líneas **mixtas** ó que están formadas de rectas y curvas.

29. Las líneas **rectas aisladas** tienen tres posiciones diferentes:

1ª Línea recta **vertical** cuya posición es semejante á la de un hilo á plomo (fig. 54).

Fig. 54.

Fig. 55.

Fig. 56.

2ª Línea recta **horizontal** cuya posición es semejante á la de una perpendicular á la vertical (fig. 55).

3ª Línea recta **inclinada** cuya posición es distinta de la de la vertical y horizontal (fig. 56).

Fig. 57.

Fig. 58.

30. Las líneas **rectas combinadas** pueden ser **perpendiculares, oblicuas, paralelas, convergentes, divergentes** y **quebradas.**

1ª Líneas rectas **perpendiculares** son dos rectas de las cuales una cae sobre la otra sin inclinarse á ningún lado (fig. 57).

Hay perpendiculares á la horizontal, á la vertical y á la inclinada.

2ª Líneas rectas **oblicuas** son dos rectas de las cuales una cae sobre la otra inclinándose más á un lado que á otro (fig. 58).

Hay oblicuas á la horizontal, á la vertical y á la inclinada.

Fig. 59

Fig. 60.

3ª Líneas rectas **paralelas** son dos ó más rectas que guardan entre sí y en todos sus puntos una misma distancia, y por más que se prolonguen nunca llegan á juntarse (fig. 59).

Hay paralelas verticales, horizontales é inclinadas.

Fig. 61.

Fig. 62.

4ª Líneas rectas **convergentes** y **divergentes** son dos rectas que no guardan entre sí una misma distancia; son **convergentes** por la parte que se unirían y **divergentes** por la parte que se separan (fig 60).

5ª La línea **quebrada** está formada de varias rectas consecutivas unidas por sus extremos, pero que siguen todas distintas direcciones (fig. 61).

31. Se llama **ángulo** la abertura que resulta de dos líneas rectas que concurren en un punto llamado **vértice**.

Hay tres clases de ángulos: ángulo **recto** cuya abertura está formada por dos líneas rectas perpendiculares entre sí (fig. 62); ángulo **agudo** cuya abertura es menor que la del recto (fig 63); ángulo **obtuso** cuya abertura es mayor que la del recto (fig. 64).

Fig. 63.

Fig. 64.

Se llama **bisectriz** en un ángulo, la recta que partiendo del vértice lo divide en dos partes iguales.

Se llaman ángulos **adyacentes** los ángulos trazados sobre una línea recta con la condición de que todos partan de un vértice común (fig. 65).

Se llaman **ángulos opuestos al vértice** dos ángulos

que tienen un vértice común, y los lados de un ángulo son la prolongación de los lados del otro (fig. 66).

Fig. 65.

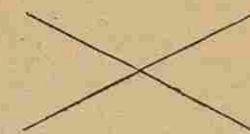


Fig. 66.

32. Se llama **triángulo** una figura cerrada por tres líneas rectas. Cualquiera de sus líneas se llama **base**, y **altura** es la línea recta perpendicular trazada á una base y bajada del vértice opuesto (fig. 67).

Los triángulos se dividen de dos maneras:

1ª Con relación á sus lados son: **equiláteros** si tienen

Fig. 67

Fig. 68.

Fig. 69.

sus tres lados iguales (fig. 67); **isósceles** si tienen dos lados iguales y uno desigual (fig. 68), y **escalenos** si tienen sus tres lados desiguales (fig. 69).

2ª Con relación á sus ángulos se divide en **rectángulo** que está formado por un ángulo recto y dos agudos; los dos lados del ángulo recto se llaman **catetos** y el lado opuesto al ángulo recto se llama **hipotenusa** (fig. 70); triángulo **acutángulo** formado por tres ángulos agudos (fig. 71), y triángulo **obtusángulo** formad por un ángulo obtuso y dos agudos (fig. 72).


Fig. 70.


Fig. 71.


Fig. 72.

33. El **cuadrilátero** es una figura cerrada por cuatro líneas rectas. Hay tres clases de cuadriláteros: **paralelogramos, trapecios** y **trapezoides**.

1ª El **paralelógramo** es un cuadrilátero cuyos lados opuestos son siempre de dos en dos paralelos.

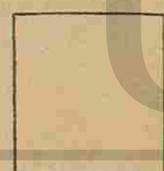


Fig. 73.

Los paralelógramos que se conocen son: el **cuadrado** que está formado por cuatro líneas rectas iguales y cuatro ángulos rectos (fig. 73); el **rectángulo** por dos líneas rectas mayores, dos menores y cuatro ángulos rectos (fig. 74); el **rombo** por cuatro líneas rectas iguales, dos ángulos agudos y dos obtusos (fig. 75); el **romboide** por dos líneas mayores, dos menores, dos ángulos agudos y dos ángulos obtusos (fig. 76).

Cualquiera de los lados de un paralelógramo puede servirle de **base**; pero la **altura** es la perpendicular que une las dos bases paralelas.


Fig. 74.

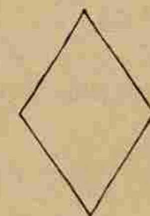


Fig. 75.


Fig. 76.

2ª El **trapecio** es un cuadrilátero que sólo tiene dos lados paralelos opuestos (fig. 77).

Los lados paralelos reciben los nombres de **base mayor** y **base menor**, y la perpendicular que une esas dos bases se le llama **altura.**


Fig. 77.


Fig. 78.

3ª El **trapezoide** es un cuadrilátero irregular que no tiene ningún lado paralelo (fig. 78).

34. Se llama **polígono** una figura cerrada por cinco ó más líneas rectas. Estos polígonos se llaman: **pentágono** si son de cinco, **hexágono** de seis, **heptágono** de siete, **octágono** de ocho, **eneágono** de nueve, **decágono**

de diez, y de once en adelante se designan por el número de sus lados.

Los polígonos se dividen en **regulares** é **irregulares,** según que sus lados y ángulos sean iguales ó desiguales (figs. 79 y 80)

Fig. 79.


Fig. 80.

Se llama **perímetro** el contorno de un polígono ó sea la suma total de todos los lados.

Se llama **apotema** en un polígono regular, la perpendicular trazada del centro á la mitad de uno de sus lados.

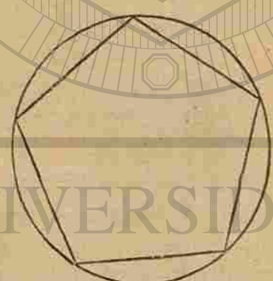


Fig. 81.

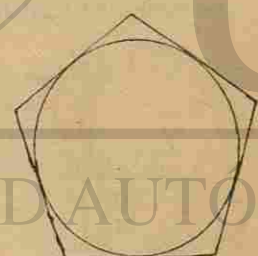


Fig. 82.

Se llama **diagonal** en un polígono, una línea recta que une dos de sus vértices no contiguos.

Los polígonos pueden ser además **inscritos** y **circunscritos.** Un polígono es **inscrito** cuando está trazado en el interior de una circunferencia y la toca con todos sus vértices (fig. 81); es **circunscrito** cuando está trazado al exterior de ella y todos y cada uno de sus lados le son tangentes ó la tocan en un solo punto (fig. 82).

35. Las líneas curvas **abiertas** son las siguientes:


Fig. 83.

1ª La línea **ondulada** es una curva que imita la forma de un hilo en movimiento (fig. 83).


Fig. 84.

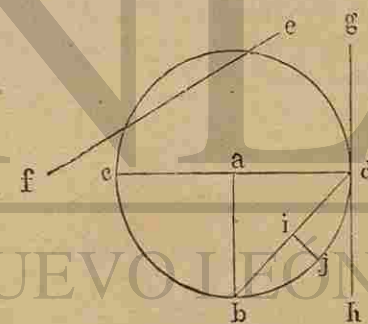


Fig. 85.

2ª La línea **espiral** es una curva abierta que da vueltas alrededor de sí misma, pero alejándose cada vez más del centro (fig. (84).

36. Las líneas **curvas cerradas** son las siguientes;

1ª La **circunferencia** es una curva cerrada cuyos puntos están á igual distancia de otro punto interior llamado centro (fig. 85).

Las líneas que tienen relación con la circunferencia son las siguientes: el **radio** que es una recta *ab* que parte del centro á cualquier punto de la circunferencia; el **diámetro** *cd* es una recta que pasando por el centro toca dos puntos opuestos de la circunferencia; la **tangente** *gh* ó sea la recta de magnitud indefinida, que toca exteriormente un solo punto de la circunferencia y es perpendicular al radio que corresponde á dicho punto; la **secante** *ef* también de magnitud indefinida, es una recta que corta á la circunferencia en dos puntos; **arco** *bjd* que es una fracción cualquiera de la circunferencia; **cuerda** *bd* que es la recta que une las extremidades de un arco; **flecha** ó **ságita** *ij* que es una recta perpendicular á la mitad de una cuerda y comprendida entre ella y su arco.


Fig 86.


Fig. 87.

Se llaman **circunferencias concéntricas** dos ó más circunferencias trazadas desde un mismo centro y con diferentes radios (fig. 86).

Se llaman **circunferencias excéntricas** dos ó más circunferencias trazadas con distintos radios y centros (figura 87).

Se llaman **circunferencias secantes** dos circunferencias que se cortan en dos puntos (fig. 88).

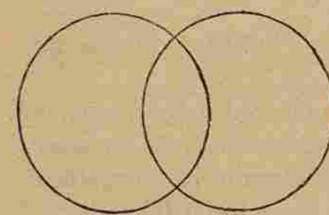


Fig. 88.

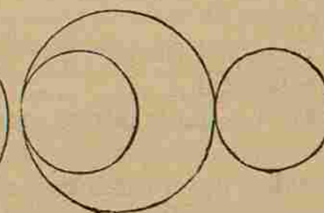


Fig. 89.

Se llaman **circunferencias tangentes** dos circunferencias que se tocan en un solo punto (fig. 89).

2ª El **óvalo** que es una curva cerrada por cuatro arcos de circunferencia, dos iguales y dos desiguales, y la superficie que encierra es muy parecida á la que presentaría el corte longitudinal de un huevo de ave (fig. 90).


Fig. 90.

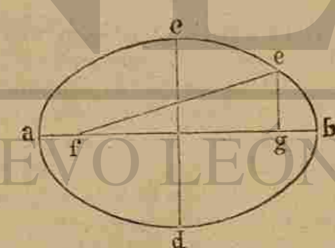


Fig. 91.

3ª La **elipse** que es una curva cerrada y más ó menos alargada; pero debe estar trazada de manera que dos de sus **radios vectores** *cf* y *eg* sea igual al **eje mayor** *ab* (fig. 91).

La línea *cd* perpendicular á *ab* y que la divide en dos partes iguales se llama **eje menor**.

Los puntos *f* y *g* equidistantes del centro se llaman **focos**.

La recta *fg* comprendida entre los focos se llama **distancia focal**.

37. Las **líneas mixtas** resultan de la combinación de rectas con curvas, como son: el contorno de un **semicírculo** ó de un **cuadrante de círculo**, de un **sector** ó de un **segmento** de círculo, el contorno formado por una **parábola** ó una **hipérbola** y la recta que una los extremos de dichas curvas, ó bien en general resulta una línea mixta por cualquiera sección de una curva cerrada por medio de una ó más rectas.

Ejercicios y observaciones.—28. Clasificación de líneas en los cuerpos geométricos y en la caja de líneas.—29. Distinguir bien las tres posiciones de la línea recta: vertical, horizontal é inclinada.—30. Trazos de rectas combinadas en todas las posiciones diferentes: perpendiculares, oblicuas, paralelas, etc.—31. Los ángulos, distinguirlos y trazarlos.—32. Trazar las tres alturas en todos los triángulos.—33. Dibujar y distinguir todos los cuadriláteros.—34. Hágase lo mismo con los polígonos.—35. Ejemplos de líneas curvas abiertas.—36. Ejercicios con las curvas cerradas y las líneas con las cuales se relacionan.—37. Ejemplos diversos de líneas mixtas.

Cuestionario.—¿De cuántas clases son las líneas en los cuerpos geométricos?—¿Qué son líneas rectas y de cuántos modos pueden ser?—¿Qué son líneas curvas y como se dividen?—¿Qué son líneas mixtas?—

¿Cuántas posiciones tiene una línea recta aislada?—¿Qué es línea vertical?—¿Horizontal?—¿Inclinada?—¿De cuántas maneras pueden ser las líneas rectas combinadas?—¿Qué son líneas perpendiculares?—¿Oblicuas?—¿Paralelas?—¿Convergentes y divergentes?—¿Quebradas?—¿Qué es ángulo?—¿Qué clase de ángulos se conocen?—¿Qué es ángulo recto?—¿Agudo?—¿Obtuso?—¿A qué se llama bisectriz en un ángulo?—¿Qué son ángulos adyacentes?—¿Qué son ángulos opuesto al vértice?—¿Qué es triángulo?—¿A qué se llama base y altura en un triángulo?—¿De cuántas maneras se dividen los triángulos?—¿Cómo se dividen con relación á sus lados?—¿Qué son triángulos equiláteros, isósceles y escalenos?—¿Cómo se dividen los triángulos con relación á sus ángulos?—¿Qué es un triángulo rectángulo?—¿Acutángulo?—¿Obtusángulo?—¿A qué se llama catetos é hipotensa en un triángulo rectángulo?—¿Qué es cuadrilátero?—¿Cómo se dividen los cuadriláteros?—¿Qué es un paralelógramo?—¿Cómo se dividen los paralelógramos?—¿Qué es un cuadrado?—¿Un rectángulo?—¿Un rombo?—¿Un romboide?—¿A qué se llama base y altura en los paralelógramos?—¿Qué es un trapecio, y cuáles son sus bases y altura?—¿Qué es un trapezoide?—¿A qué se llama polígono?—¿Cómo se nombran los polígonos según el número de lados de que se forman?—¿Cómo se dividen los polígonos?—¿Qué son polígonos regulares é irregulares?—¿Qué es apotema?—¿Qué es diagonal?—¿Qué son polígonos inscritos y circunscritos?—¿Cuáles son las líneas curvas abiertas?—¿Qué es línea ondulada?—¿Qué es línea espiral?—¿Cuáles son las líneas curvas cerradas?—¿Qué es la circunferencia?—¿Cuáles son las líneas que se relacionan con la circunferencia?—¿Qué es radio?—¿Diámetro?—¿Tangente?—¿Secante?—¿Arco?—¿Cuerda?—¿Flecha ó ságita?—¿Qué son circunferencias: concéntricas, excéntricas, secantes, tangentes?—¿Qué es la elipse?—¿Qué es el óvalo?—¿Explique Vd. en una elipse lo que son: radios vectores, eje mayor y menor, focos, distancia focal?—Ponga Vd. algunos ejemplos de líneas mixtas.

SEGUNDA PARTE.

LONGIMETRIA. -PLANIMETRIA ESTEREOMETRIA.

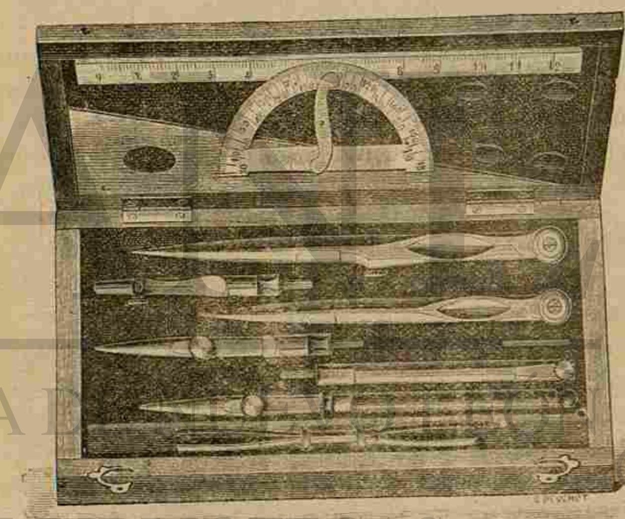
1ª DIVISION.

LONGIMERIA.

CAPITULO VII.

CONSTRUCCIÓN DE LÍNEAS. (1)

Sumario.—38. Trazo de líneas rectas en general.—39. Líneas verticales y horizontales.—40. Construcción de perpendiculares.—41. Líneas paralelas.—42. Angulos—43. La circunferencia.—44. La espiral.



38. Para trazar líneas rectas se emplean los siguientes procedimientos:

(1) Descríbanse todas las piezas de un estuche semejante al grabado.

1º Longitudes pequeñas. Para trazar una línea recta en el papel ó en el pizarrón basta colocar dos puntos á cierta distancia y colocar debajo una regla de manera

Fig. 92.

que coincida perfectamente con ellos; en seguida se hace pasar por su borde el lápiz ó el gis y se tendrá la recta que se desea (fig. 92).

2º Longitudes medianas. Para trazar una recta en un patio, pavimento, viga, pared, etc., se colocan en los puntos extremos dos clavos de los cuales se ata fuertemente restirada una cuerda frotada con gis ó humedeci-

Fig. 93.

da con tinta negra, roja ó blanca, según fuere necesario, en seguida se levanta del centro, y al dejarla caer quedará marcada la huella de la recta que se desea (figura 93).

3º Grandes longitudes. Para las grandes longitudes en el campo ó en el terreno se colocan á ciertas distancias jalones ó estacas, de manera que al dirigir la visual se confundan unos con otros los cuadritos blancos ó de color que están puestos en el extremo superior de cada

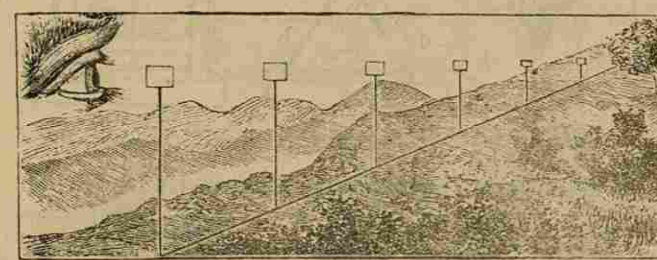


Fig. 94.

jalón. La dirección que marquen las estacas será la línea recta que se desea (fig. 94).

39. Para el trazo de la línea vertical, se usa del hilo á plomo que está formado de un cordón ó hilo en cuya extremidad inferior se suspende una bala ú otro objeto pesado cualquiera; en seguida se aplica á la pared ó muro que se desea reconocer, y si coincide ó se confunde en toda su extensión con el hilo á plomo, esa pared tendrá exactamente la posición vertical (fig. 95).

Para el trazo de la línea horizontal se usan varios instrumentos, pero los principales son: el **nivel de albañil**, el **nivel de burbuja de aire** y el **nivel de agua**.

El **nivel de albañil** está formado de un hilo á plomo suspendido en un marco de madera, de forma triangular ó cuadrangular. Cuando la plomada pasa por la mitad de la barra *ab*, el lugar sobre que descanse será enteramente horizontal (figs. 96 y 97).

Fig 95.

Fig. 96.

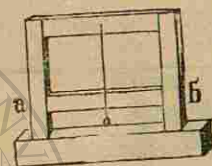


Fig. 97.

El **nivel de burbuja de aire** es un instrumento compuesto de un tubo de vidrio lleno de agua colocado dentro de otro de metal, pero abierto en el centro de tal modo que pueda verse el primero y distinguirse en é

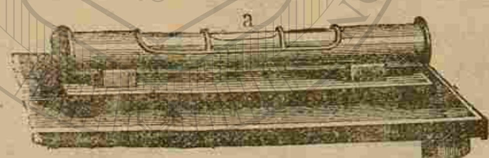


Fig. 98.

una burbuja de aire *a*. Para reconocer si una superficie es horizontal, se coloca este nivel sobre ella y se notará, en caso de serlo, que la burbuja se coloca precisamente en el centro del tubo (fig. 98).

El **nivel de agua**, que consiste en un tubo metálico *cd* de un metro de longitud y cuyas dos extremidades forman dos ángulos rectos sobre los cuales descansan dos tubos de vidrio A y B. Para servirse de este instrumento se coloca sobre un **tripié**, se llena de agua de color,

de manera que llegue hasta los tubos, y al quedar inmóvil señalará su nivel la línea horizontal. Si se quiere prolongar esta línea á mayor distancia, se colocarán **miras**

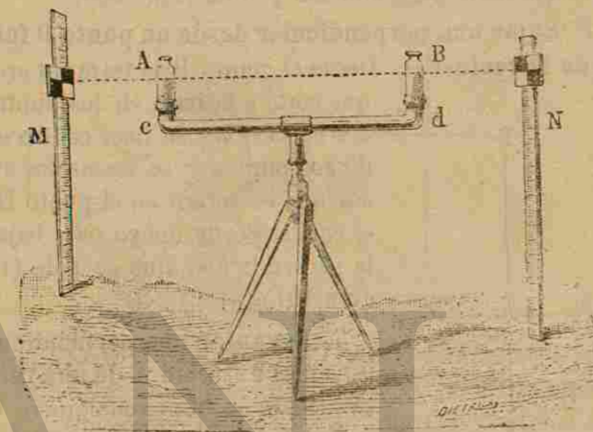


Fig. 99.

ó reglas con divisiones M y N y aun se podrán buscar diferencias de nivel y de altura, restando las longitudes de las dos miras (fig. 99).

40. En el trazo de las líneas perpendiculares se dan los casos siguientes:

1º **Levantar una perpendicular en un punto E sobre una línea recta** AB. Se coloca la punta del compás en el punto E y con una abertura arbitraria, se toman dos distancias iguales en los puntos *m* y *n*, en

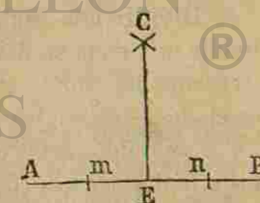


Fig. 100.

seguida se hace centro en dichos puntos y con otra abertura mayor que la mitad de la línea *mn* se trazan los dos arcos que se cortan en el punto C, cuyo punto indica la dirección de la perpendicular pedida (fig. 100).

2º **Bajar una perpendicular desde un punto B fuera de la recta** CD. Desde el punto B se traza un arco que corta á la recta en los puntos *a* y *m*, después se hace centro en dichos puntos y se trazan los arcos que se cortan en el punto H, el cual sirve de apoyo para bajar la perpendicular que se pide (figura 101).

Fig. 101.

3º **Levantar una perpendicular en el extremo A de una recta.** Desde un punto cualquiera C arriba de la recta y con un radio AC se traza una circunferencia que corta á la recta en el punto D desde el cual se traza una nueva recta que pasa por el centro y corta á la circunferencia en el punto E que nos indicará la dirección de la línea AE, que es la perpendicular pedida (fig. 102).

4º **Dividir una recta en dos partes iguales.** Para dividir una recta en dos partes iguales se consideran respectivamente como centros los extremos A y B desde los cuales se trazan los arcos que se cortan en los puntos C y D, y unidos éstos por una línea dividirá la recta en dos mitades exactas (fig. 103).

41. Trazo de líneas paralelas y sus aplicaciones:

1º **Trazar una recta paralela á otra desde un punto dado.** Sea A B la recta dada y O el punto por el cual

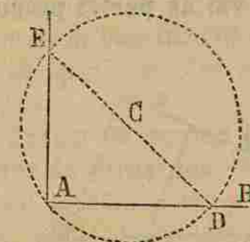


Fig. 102.

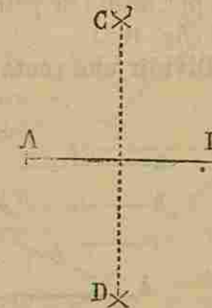


Fig. 103.

se desea pasar la paralela. Del punto O como centro con un radio arbitrario se describe un arco C D; del punto C con el mismo radio se describe el arco O B, se toma la distancia O B, se transporta de C á D, se traza la recta O D y será la paralela buscada (fig. 104).

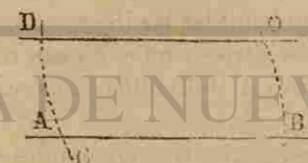


Fig. 104.

Fig. 105.

2º **Dividir una recta en varias partes iguales.** Trácese una recta indefinida A C y otra paralela también indefinida B D; sobre ambas rectas y partiendo de los extremos A y B se toman con una medida arbitraria varias distancias iguales, según las divisiones que se quieran hacer de la recta, en seguida se unen los puntos de una y otra por medio de paralelas y se habrá resuelto el problema (fig. 105).

3º **Dividir una recta en varias partes proporcio-**

Fig. 106.

nales. Se resuelve de la misma manera que el anterior transportando en las rectas indefinidas las líneas *a*, *b*, *c*, y uniendo después los puntos correspondientes con rectas paralelas se tendrá la línea A B dividida proporcionalmente (fig. 106).

42. En la construcción de ángulos se presentan los siguientes casos:

1º **Trazar un ángulo igual á otro.** Se traza con un mismo radio desde el punto A el arco *m n* y desde el punto B de la recta B D con la misma medida el arco indefinido *p r* y tomando la distancia *p g* igual á *m n* el ángulo en B será el que se pide (fig. 107).

2º **Dividir un ángulo en dos mitades.** Se traza desde el punto O con un radio cualquiera el arco *m n* y desde los puntos *m* y *n* se trazan unos arcos cuya intersección en B dará la dirección de la bisectriz OB que divide el ángulo en dos mitades (fig. 108).

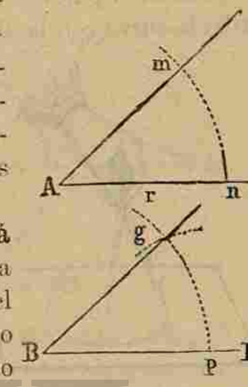


Fig. 107.

3º **Trazar un ángulo igual á la suma de otros dos.** Se traza la recta indefinida OC y con el mismo radio que se han trazado los arcos A y B se traza el arco indefinido *mn*, en seguida partiendo del punto *m* se transportan en este último los primeros arcos formando una abertura que llegue hasta el punto S por el cual se hace pasar la recta OS y quedará resuelto el problema (fig. 109).

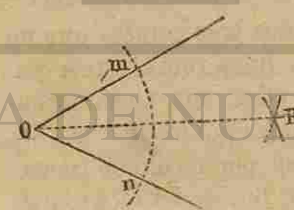


Fig. 108.

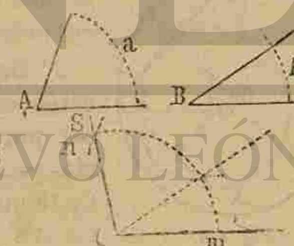


Fig. 109.

43. Los problemas gráficos que se relacionan con la circunferencias son los siguientes:

1º **Trazar una circunferencia con el compás ó con**

un cordón. Por medio del compás basta apoyar la punta de él en el punto C llamado centro, en seguida se describe la curva con la abertura que se desee (fig. 110).

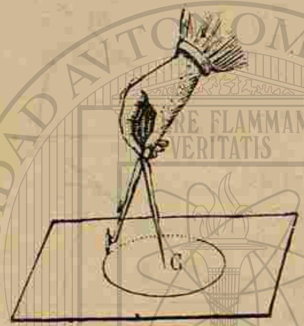


Fig. 110.

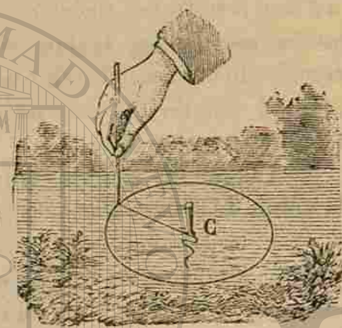


Fig. 111.

El el terreno basta colocar en el centro C una estaca ó clavo en el cual se ata un cordón del tamaño que se quiera y con un fuerte punzón en el otro extremo, se describirá la circunferencia pedida (fig. 111).

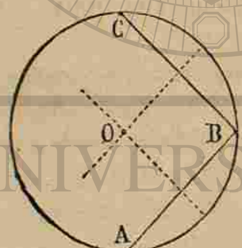


Fig. 112.

2º **Dados tres puntos que no estén en linea recta, hacer pasar por ellos una circunferencia.** Sean los puntos dados AB y C, se unen por medio de las rectas AB y BC; se levantan en la mitad de ellas dos perpendiculares que se cortan en el punto O, el cual será el centro de donde se trazará la circunferencia pedida (fig. 112).

Si se tratara de buscar el centro de un arco ó de una circunferencia, se empleará el mismo procedimiento.

3º **Trazar tangentes á una circunferencia.** Tres casos principales pueden darse: 1º Por un punto dado

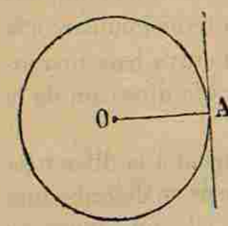


Fig. 113.

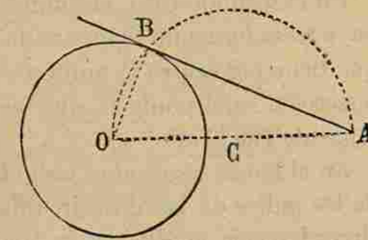


Fig. 114.

sobre una circunferencia, trazar una tangente á ella; 2º Por un punto dado fuera de una circunferencia, trazarle una tangente; 3º Trazar una tangente común á dos circunferencias dadas.

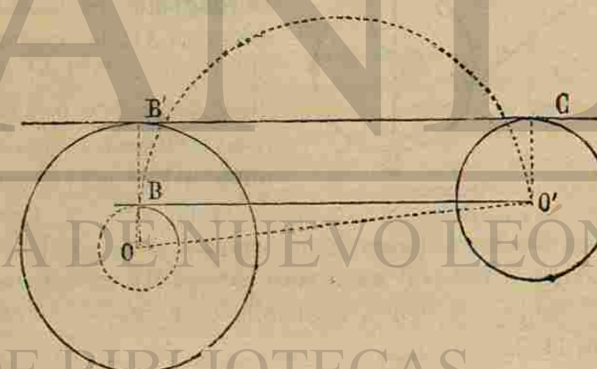


Fig. 115.

Supongamos en el primer caso el punto dado A, se traza un radio desde ese punto al centro O y levantando en el primero una perpendicular se tendrá la tangente deseada (fig. 113).

En el segundo caso, el punto A se une con el punto O cuya recta forma un diámetro de una semicircunferencia que tiene por centro el punto C; esta curva hace una intersección en el punto B, que marcará la dirección de la tangente (fig. 114).

En el tercer caso con el radio OB igual á la diferencia de los radios de las dos circunferencias se describe una circunferencia auxiliar y se traza á ella una tangente desde el punto O', en seguida se prolonga el radio O B hasta B' y se traza la paralela B'C que será la tangente pedida (fig. 115).

4º **Rectificar una circunferencia ó sea encontrar una recta equivalente á su longitud.** Se traza el diámetro AB, la tangente MAN; la recta ON, de modo que el arco A *m* sea igual á 30 grados ó sea la mitad del arco cuya cuerda es el radio, se traza desde N sobre la tangente tres veces el radio y uniendo el extremo M con B tendremos la recta MB equivalente á la semicircunferencia desarrollada en línea recta (figura 116).

Fig. 116.

44. **Trazo de la espiral.** En el trazo de la línea espiral se procede de la manera siguiente: Se traza la recta indefinida A B, se hace centro en *c* con un radio arbitrario *cb*, se describe la semicircunferencia inferior *bm*,

se hace después centro en *b* y con un radio *bm* se describe la semicircunferencia superior *ms*, se vuelve á hacer centro en *c* y con el radio *cs* se describe la semicircunferencia inferior *sh* y se continúa alternativamente del mismo modo (fig. 117).

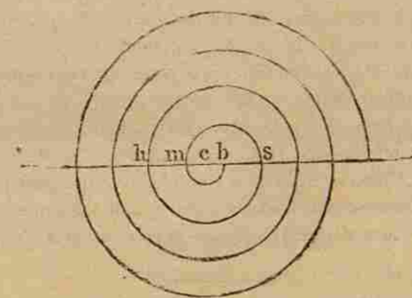


Fig. 117.

Ejercicios y observaciones.—38. Ejercicios sobre líneas rectas pequeñas, medianas ó grandes: prolongarlas, trazar una recta igual á otra, sumar dos ó más rectas, duplicarlas, triplicarlas, etc. buscar la diferencia entre dos rectas.—39. Descripción y uso práctico de la plomada y los niveles.—40. Modo práctico de usar la regla, la escuadra y el compás, háganse ejercicios de perpendiculares en la vertical, la horizontal y la inclinada.—41. Háganse ejercicios diversos de paralelas en todas posiciones, practíquense divisiones de rectas en partes iguales ó proporcionales con el compás ó con la escuadra.—42. Modo de trazar los ángulos conocidos, ejercicios de sumas y diferencias.—43. Háganse varios ejercicios sobre circunferencias concéntricas, excéntricas, tangentes y secantes y las rectas que con ellas se relacionan.—44. Ejercicios sobre la espiral.

Cuestionario.—¿Cómo se trazan las longitudes pequeñas?—¿Las longitudes medianas?—¿Las grandes longitudes?—¿Cómo se determina la línea vertical?—¿Qué instrumentos se usan para el trazo de la li nea horizontal?—¿En qué consiste el nivel de albañil y cómo se usa?—¿El nivel de burbuja de aire? —¿El nivel de agua?—¿Qué casos principales se presentan en el trazo de las líneas perpendiculares? —¿Cómo se trazan las perpendiculares en cada uno de esos casos? —¿Qué casos se presentan en la construcción de las líneas paralelas? —¿Cómo se trazan?—¿Cómo se divide una recta en dos ó más partes iguales?—¿Cómo se divide en partes proporcionales?—¿Qué casos se presentan en la construcción de ángulos?—¿Cómo se resuelven?—¿Qué problemas gráficos se relacionan con la circunferencia?—¿De cuántos modos se puede trazar una circunferencia?—¿Cómo se traza una circunferencia que pase por tres puntos dados?—¿Cómo se resuelven los problemas de las tangentes? —¿Cómo se rectifica una circunferencia? —¿Cómo se traza la línea espiral?

CAPITULO VIII.

PROPIEDADES Y MEDICIÓN DE LAS LÍNEAS.

Sumario —45. Principales propiedades de la línea recta. —46 Medición de líneas rectas. —47. Propiedades principales de los ángulos —48. Medición de ángulos —49. Propiedades principales de la circunferencia y líneas que se relacionan con ella —50. Modo de medir la longitud de la circunferencia. —51. Algunas aplicaciones de la Longimetría.—52. Problemas y ejemplos concretos.

45. Las principales propiedades de la línea recta son las siguientes: 1ª Es la más corta que puede trazarse entre dos puntos dados. 2ª Sólo puede trazarse una sola

Fig. 118.

recta entre dos puntos. 3ª Su dirección está marcada siempre con dos puntos. 4ª Sólo puede prolongarse en la misma dirección.

46. En la medición de las líneas rectas se usa: para las pequeñas el decímetro ó doble decímetro (fig. 118); para las medianas, el metro lineal; para las grandes el decámetro de cinta (fig. 119), ó la cadena métrica de fierro. El hectómetro, el kilómetro y el miriámetro sólo se usan en los cálculos especialmente para distancias geográficas.

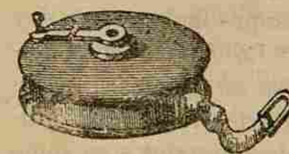


Fig. 119.

Para medir una recta por medio del decímetro ó doble decímetro, basta colocar dicha medida debajo de la recta, leyendo en seguida sobre la primera las unidades de medida que tenga la segunda.

Por medio del compás se puede también medir una línea recta, tomando una medida fija en el doble decímetro y transportarla después varias veces en la recta que se trata de medir (fig. 120).

Fig. 120.

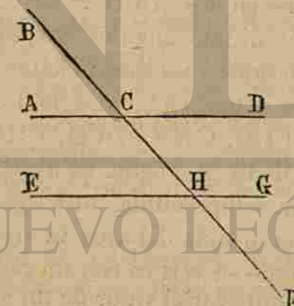


Fig 121.

Respecto del decámetro de cinta, su uso es extremadamente sencillo y no necesita explicación.

nea horizontal?—¿En qué consiste el nivel de albañil y cómo se usa?—¿El nivel de burbuja de aire? —¿El nivel de agua?—¿Qué casos principales se presentan en el trazo de las líneas perpendiculares? —¿Cómo se trazan las perpendiculares en cada uno de esos casos? —¿Qué casos se presentan en la construcción de las líneas paralelas? —¿Cómo se trazan?—¿Cómo se divide una recta en dos ó más partes iguales?—¿Cómo se divide en partes proporcionales?—¿Qué casos se presentan en la construcción de ángulos?—¿Cómo se resuelven?—¿Qué problemas gráficos se relacionan con la circunferencia?—¿De cuántos modos se puede trazar una circunferencia?—¿Cómo se traza una circunferencia que pase por tres puntos dados?—¿Cómo se resuelven los problemas de las tangentes? —¿Cómo se rectifica una circunferencia? —¿Cómo se traza la línea espiral?

CAPITULO VIII.

PROPIEDADES Y MEDICIÓN DE LAS LÍNEAS.

Sumario —45. Principales propiedades de la línea recta. —46 Medición de líneas rectas. —47. Propiedades principales de los ángulos —48. Medición de ángulos —49. Propiedades principales de la circunferencia y líneas que se relacionan con ella —50 Modo de medir la longitud de la circunferencia. —51. Algunas aplicaciones de la Longimetría.—52. Problemas y ejemplos concretos.

45. Las principales propiedades de la línea recta son las siguientes: 1ª Es la más corta que puede trazarse entre dos puntos dados. 2ª Sólo puede trazarse una sola

Fig. 118.

recta entre dos puntos. 3ª Su dirección está marcada siempre con dos puntos. 4ª Sólo puede prolongarse en la misma dirección.

46. En la medición de las líneas rectas se usa: para las pequeñas el decímetro ó doble decímetro (fig. 118); para las medianas, el metro lineal; para las grandes el decámetro de cinta (fig. 119), ó la cadena métrica de fierro. El hectómetro, el kilómetro y el miriámetro sólo se usan en los cálculos especialmente para distancias geográficas.

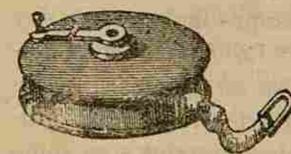


Fig. 119.

Para medir una recta por medio del decímetro ó doble decímetro, basta colocar dicha medida debajo de la recta, leyendo en seguida sobre la primera las unidades de medida que tenga la segunda.

Por medio del compás se puede también medir una línea recta, tomando una medida fija en el doble decí-

Fig. 120.

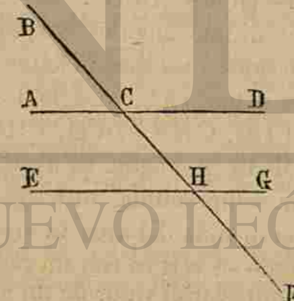


Fig 121.

metro y transportarla después varias veces en la recta que se trata de medir (fig. 120).

Respecto del decámetro de cinta, su uso es extremadamente sencillo y no necesita explicación.

47. Las principales propiedades de los ángulos son las siguientes: 1ª Dos ángulos adyacentes trazados en una recta suman dos ángulos rectos. 2ª Los cuatro ángulos opuestos al vértice son siempre iguales entre sí y suman cuatro ángulos rectos. 3ª Los ángulos comparados entre sí de dos en dos, pueden ser **iguales** si tienen la misma abertura, **complementarios** si su suma ó diferencia es igual á un recto, **suplementarios** si su suma ó diferencia es igual á dos rectos 4ª En dos líneas paralelas cortadas por una oblicua resultan ocho ángulos, unos internos y otros externos, que, comparados entre sí, resultan las combinaciones siguientes: cuatro **alternos externos** colocados exteriormente á distinto lado de la oblicua é iguales de dos en dos: BCD=EHF, ACB=GHF; cuatro **alternos internos** colocados interiormente también á distinto lado de la oblicua é iguales entre sí de dos en dos: DCH = EHC, ACH = CHG; se llaman por último ángulos **correspondientes** los que están colocados á un mismo lado de la oblicua, uno interno, otro externo é iguales de dos en dos: ACB=EHC, BCD=CHG, GHF=DCH, EHF=ACH (fig. 121).

48. Medir un ángulo es averiguar la mayor ó menor abertura comprendida entre sus dos lados ó bien determinar la medida del arco interceptado entre ellos y trazado desde su vértice con un radio cualquiera.

Para apreciar el valor de un arco de circunferencia, se ha convenido en dividir ésta en 360 partes iguales que se llaman **grados,** cada grado se divide en 60 partes iguales que se llaman **minutos,** cada minuto se divide en 60 partes iguales que se llaman **segundos.** Los grados, minutos y segundos se escriben así: 360° 60′ 60″.

Los ángulos se miden por medio de un instrumento llamado **transportador**, que consiste en un semicírculo de metal ó de alguna substancia transparente, en el cual se anotan los grados y medios grados hasta 180, que es la suma de los ángulos que contiene una semicircunferencia. Para medir un ángulo basta colocar el centro del transportador en el vértice del ángulo A, su diámetro se

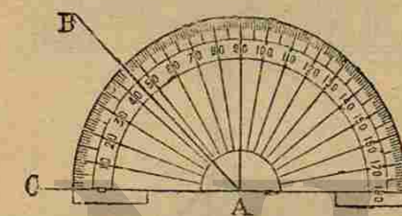


Fig. 122.

hace coincidir con el lado AC y el lado AB señalará en grados el valor del ángulo que se mide (fig. 122).

El ángulo recto vale 90 grados, el agudo menos de 90, y el obtuso más de 90. Todos los ángulos que se trazan sobre una recta con un vértice común suman 180 grados; todos los ángulos que se trazan alrededor de un punto suman 360 grados.

Para medir un ángulo en el terreno se usa del **grafómetro**, que es un semicírculo de metal, en cuyo contorno ó limbo están marcados los grados y medios grados. Tiene dos **alidadas** ó reglas metálicas; la una fija A B que sigue la dirección del diámetro, y la otra CD movible alrededor del centro y adaptada al mismo plano del limbo. Cada alidada tiene en sus extremos dos **pinulas** á través de las cuales se dirigen los rayos visuales. Este instrumento está puesto sobre un pie de manera que permita al operador dar al limbo cualquiera posición: verti-

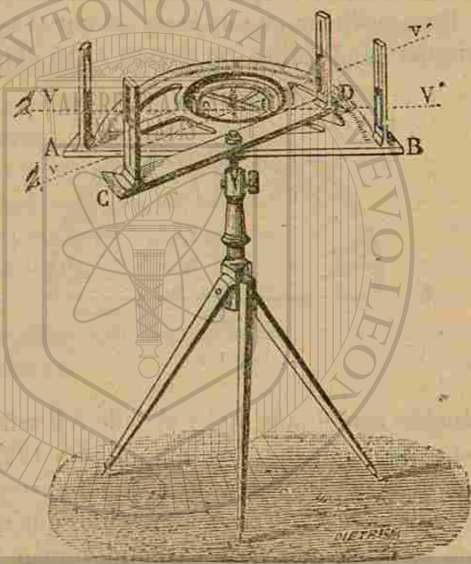


Fig. 123.

cal, horizontal ó inclinada (fig. 123). Para medir un ángulo en el terreno por medio del grafómetro se coloca su centro en el vértice del ángulo, procurando que la alidada fija siga la dirección de un lado del ángulo y colocando en seguida la alidada movible en la dirección del otro, el limbo marcará la medida del ángulo propuesto.

Los ángulos en relación con la circunferencia toman diferentes nombres y tienen además un modo especial

de medirse, á saber: El ángulo en el centro ABC se forma por dos radios y tiene por medida el arco que interceptan sus lados (fig. 124); el ángulo **inscrito** MDO se

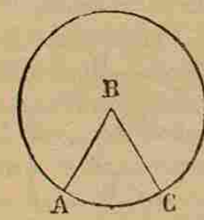


Fig. 124.

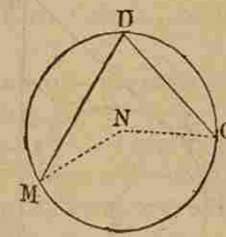


Fig. 125.

forma por dos cuerdas y tiene por medida la mitad del arco que interceptan sus lados (fig. 125); el ángulo AHF formado por dos secantes tiene por medida la mitad de la diferencia de los dos arcos que abrazan sus lados

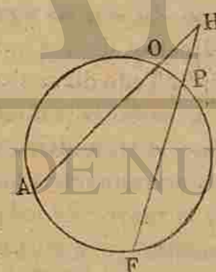


Fig. 126.

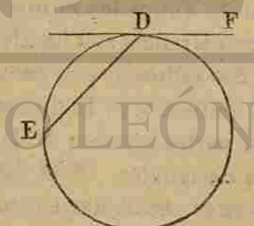


Fig. 127.

(fig. 126); el ángulo DEF formado por tangente y cuerda tiene por medida la mitad del arco que la cuerda subtiende (fig. 127); el ángulo GHI formado por dos tangentes, tiene por medida el arco LK que resulta de los radios prolongados correspondientes á cada tangente (figura 128); el ángulo excéntrico ABC tiene por medida

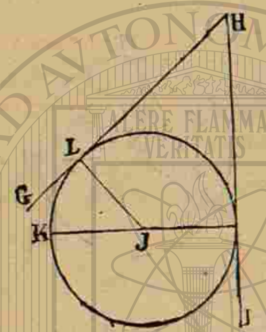


Fig. 128.

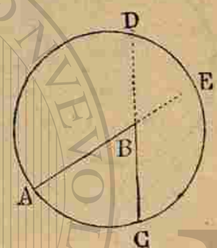


Fig. 129.

la mitad de la suma de los arcos AC y DE que se forman por la prolongación de sus lados (fig. 129).

49. Las principales propiedades de la circunferencia y de las líneas que se relacionan con ella son las siguientes: 1ª Todos los radios y los diámetros de una misma circunferencia son iguales entre sí; 2ª Todo diámetro mide dos radios y por consiguiente un radio es la mitad de un diámetro; 3ª El diámetro divide á la circunferencia en dos partes iguales; 4ª Toda cuerda corresponde á dos arcos desiguales; 5ª El diámetro es la mayor de todas las cuerdas; 6ª Todas las cuerdas iguales de una misma circunferencia están equidistantes del centro; 7ª Toda recta perpendicular á la mitad de una cuerda pasará por el centro de la circunferencia y dividirá al arco en dos mitades; 8ª Los arcos comprendidos entre paralelas en una circunferencia son iguales.

50. Para medir la longitud de una circunferencia, se procederá como sigue:

Construyamos una circunferencia que tenga un metro de diámetro, por ejemplo, un aro de fierro ó de madera.

Hagamos coincidir un cordón en toda la longitud de la circunferencia.

Midiendo este cordón observaremos que tiene aproximadamente 3 metros 14 centímetros.

Luego, cuando la circunferencia tiene 1 metro de diámetro, la circunferencia mide $3^{m},14$; cuando mida 2 metros de diámetro, la circunferencia medirá el doble de $3^{m},14$ ó sean $3^{m},14 \times 2$; por 3 metros de diámetro, la circunferencia medirá $3^{m},14 \times 3$, etc.

En general, según sea el número de metros que mida el diámetro, así se repetirá el número 3,14 para obtener la longitud de la circunferencia.

Cuando esta medida se hace con toda exactitud se obtiene para la circunferencia una equivalencia de 3 diámetros 1416 diez milésimos de diámetro, cuya relación los matemáticos la representan con la letra π (pí) y han establecido esta regla:

La longitud de una circunferencia se mide multiplicando su diámetro por π ó sea por 3,1416.

He aquí la fórmula:

$$C = D \times \pi.$$

Conocida la longitud de la circunferencia se puede averiguar el valor del diámetro, dividiendo dicha cantidad por 3,1416, cuyo cociente nos dará la longitud del diámetro. La fórmula quedará así:

$$D = \frac{C}{\pi}.$$

El valor del radio será la mitad de este cociente.

51. Algunas aplicaciones de la Longimetría:

1ª Ejercicios con todas las medidas de longitud.

2ª Medir por medio del decímetro, doble decímetro, el metro ó el decámetro rectas de diversos tamaños.

3ª Sumar y restar rectas de diversos tamaños, prolongarlas según determinada medida.

4ª Tomar de una recta la mitad, tercera, cuarta parte, etc., ó bien duplicarla, triplicarla, cuadruplicarla, etc.

5ª Mídanse con el transportador y el grafómetro ángulos de diferentes tamaños.

6ª Háganse construcciones de sumas y diferencias con ángulos de valores iguales ó diferentes.

7ª Determinar el valor de cada ángulo en el centro cuando la circunferencia se divida en tres, cuatro, cinco ó más partes iguales.

8ª Determinar el valor de varios ángulos formados con líneas rectas que se relacionen con la circunferencia.

9ª Conocida la longitud del radio ó del diámetro, determinar la de la circunferencia ó de un arco cualquiera.

10ª Conocida la longitud de la circunferencia ó de un arco, determinar el valor del diámetro.

52. Problemas y ejemplos concretos para resolver:

1º La distancia de México á Tula es de 80 kilómetros; se desea saber cuántas vueltas dará la rueda mayor de un carruaje en esa distancia, teniendo $1^{m},50$ de diámetro.

2º La longitud del meridiano terrestre es de 40,000.000 de metros; ¿cuál será la longitud de un grado, de un minuto, de un segundo?

3º Siendo el metro la diezmillonésima parte del cubo

drante del meridiano terrestre, se desea saber qué distancia habrá en metros de cualquier punto del meridiano al centro de la Tierra.

4º Caminando 20 leguas por hora un ferrocarril, se desea saber cuánto tiempo dilataría en dar la vuelta á la Tierra si se hubiera construido sobre el Ecuador.

5º Averiguar cuántas leguas de veinticinco al grado, recorre por hora la Tierra en su movimiento de rotación alrededor de su eje.

6º Sabiendo que el movimiento aparente del Sol es de 15 grados por hora; que cada grado de la Tierra es de 25 leguas, se desea saber: I. Qué distancia habría de México á dos poblaciones situadas, una á 18°20′ al Oriente y la otra á 30°50′ al Poniente y en el mismo paralelo. II. Siendo en México las diez de la mañana, qué hora será en dichas poblaciones.

7º Suponiendo que la altura de la estrella polar sobre el horizonte de México sea de 19°26′, ó sea la latitud de dicha ciudad, se desea saber á qué distancia se encuentra ésta última del polo y del Ecuador.

8º Supongamos: I. Que la Tierra describe alrededor del Sol en un año una circunferencia perfecta. II. Que la distancia de la Tierra al Sol sea de 37.000.000 de leguas. III. Que la duración exacta del año solar sea de $365\frac{1}{4}$ días; se pregunta: 1º ¿Cuál es en kilómetros la longitud de la circunferencia descrita por la Tierra en un año? 2º La longitud de un grado de esta circunferencia? 3º ¿El camino recorrido por la Tierra en un día? 4º ¿En una hora, en un minuto, en un segundo?

Ejercicios y observaciones. —45. Procure el Profesor demostrar intuitivamente las propiedades contenidas en este párrafo. —46. Ejercicios prácticos sobre medición de líneas y explicación de las medidas lineales. —47. Demostración intuitiva de las propiedades de los ángulos —48. Mídanse ángulos con el transportador y si hubiere grafómetro mídanse en el terreno.—49 Ejercicios demostrativos de las propiedades de la circunferencia sin recurrir á combinaciones algebraicas.—50. Hágase práctico el procedimiento que en este párrafo se indica.—51. Busque el Profesor innumerables ejemplos prácticos sobre las aplicaciones de la Longimetria. —52. El Profesor debe aquí limitarse á ayudar á los alumnos en la resolución de los problemas.

Cuestionario. —¿Cuáles son las principales propiedades de la linea recta?—¿Qué medidas se usan para la medición de longitudes?—¿Cómo se mide una linea recta?—¿Cuántos ángulos rectos suman los ángulos trazados sobre una recta ó alrededor de un punto?—¿A qué se llaman ángulos iguales, complementarios y suplementarios?—¿Qué clases de ángulos se forman en dos líneas paralelas cortadas por una oblicua?—¿Cuáles son los ángulos alternos-internos, alternos-externos y correspondientes?—¿Qué cosa es medir un ángulo?—¿Cómo se divide toda circunferencia? ¿Qué son los grados, minutos y segundos y cómo se escriben? ¿A qué se llama transportador y para qué sirve?—¿Qué cosa es el grafómetro, para qué sirve y cómo se usa?—¿Qué clase de ángulos se pueden formar con las rectas que se relacionan con la circunferencia?—¿Cómo se miden todos estos ángulos?—¿Cuáles son las principales propiedades de la circunferencia y de las rectas que con ella se relacionan?—¿Cómo se mide la longitud de una circunferencia?—¿Cuál es la fórmula que se usa?—¿Cómo se obtiene la longitud del diámetro y del radio?

2ª DIVISION.

PLANIMETRIA.

CAPITULO IX.

CONSTRUCCIÓN DE SUPERFICIES.

Sumario: —53. Construcción de triángulos —54. Construcción de cuadriláteros.—55. Trazo de polígonos irregulares: iguales, semejantes y

equivalentes.—56. Construcción de polígonos regulares.—57. Construcción de polígonos regulares inscritos. —58. Construcción de polígonos estrellados.—59. Trazo de superficies de perímetro redondo: óvalo, huevo y elipse.

53. En la construcción de los triángulos se presentan los siguientes casos:

1º **Dada la recta** AB **construir un triángulo equilátero**. Con un radio igual á dicha recta y haciendo centro en sus extremos, se trazan los arcos que se cortan en el punto D, el cual se une por medio de rectas con los puntos A y B, y se tendrá la construcción que se pide (fig. 130).

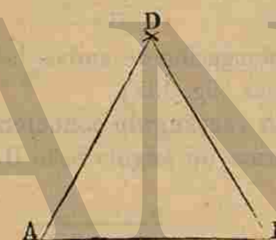


Fig. 130.

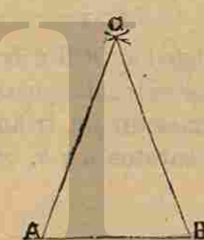


Fig. 131.

2º **Tazar un triángulo isósceles conociendo el lado menor y uno de los iguales.** Siendo A B el lado menor, se hace centro respectivamente en cada uno de sus extremos y con una medida igual al lado A C de los lados iguales se trazan los arcos que se cortan en el punto C que es el tercer vértice del triángulo pedido (figura 131).

3º **Construir un triángulo isósceles dada la base**

Ejercicios y observaciones. —45. Procure el Profesor demostrar intuitivamente las propiedades contenidas en este párrafo. —46. Ejercicios prácticos sobre medición de líneas y explicación de las medidas lineales. —47. Demostración intuitiva de las propiedades de los ángulos —48. Mídanse ángulos con el transportador y si hubiere grafómetro mídanse en el terreno.—49 Ejercicios demostrativos de las propiedades de la circunferencia sin recurrir á combinaciones algebraicas.—50. Hágase práctico el procedimiento que en este párrafo se indica.—51. Busque el Profesor innumerables ejemplos prácticos sobre las aplicaciones de la Longimetria. —52. El Profesor debe aquí limitarse á ayudar á los alumnos en la resolución de los problemas.

Cuestionario. —¿Cuáles son las principales propiedades de la linea recta?—¿Qué medidas se usan para la medición de longitudes?—¿Cómo se mide una linea recta?—¿Cuántos ángulos rectos suman los ángulos trazados sobre una recta ó alrededor de un punto?—¿A qué se llaman ángulos iguales, complementarios y suplementarios?—¿Qué clases de ángulos se forman en dos líneas paralelas cortadas por una oblicua?—¿Cuáles son los ángulos alternos-internos, alternos-externos y correspondientes?—¿Qué cosa es medir un ángulo?—¿Cómo se divide toda circunferencia? ¿Qué son los grados, minutos y segundos y cómo se escriben? ¿A qué se llama transportador y para qué sirve?—¿Qué cosa es el grafómetro, para qué sirve y cómo se usa?—¿Qué clase de ángulos se pueden formar con las rectas que se relacionan con la circunferencia?—¿Cómo se miden todos estos ángulos?—¿Cuáles son las principales propiedades de la circunferencia y de las rectas que con ella se relacionan?—¿Cómo se mide la longitud de una circunferencia?—¿Cuál es la fórmula que se usa?—¿Cómo se obtiene la longitud del diámetro y del radio?

2ª DIVISION.

PLANIMETRIA.

CAPITULO IX.

CONSTRUCCIÓN DE SUPERFICIES.

Sumario: —53. Construcción de triángulos —54. Construcción de cuadriláteros.—55. Trazo de polígonos irregulares: iguales, semejantes y equivalentes.—56. Construcción de polígonos regulares.—57. Construcción de polígonos regulares inscritos. —58. Construcción de polígonos estrellados.—59. Trazo de superficies de perímetro redondo: óvalo, huevo y elipse.

53. En la construcción de los triángulos se presentan los siguientes casos:

1º **Dada la recta** AB **construir un triángulo equilátero**. Con un radio igual á dicha recta y haciendo centro en sus extremos, se trazan los arcos que se cortan en el punto D, el cual se une por medio de rectas con los puntos A y B, y se tendrá la construcción que se pide (fig. 130).

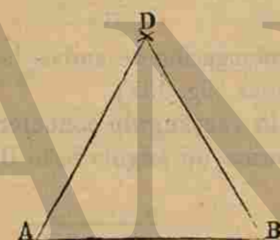


Fig. 130.

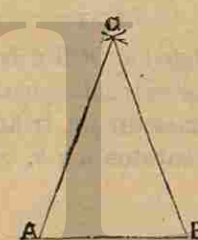


Fig. 131.

2º **Tazar un triángulo isósceles conociendo el lado menor y uno de los iguales.** Siendo A B el lado menor, se hace centro respectivamente en cada uno de sus extremos y con una medida igual al lado A C de los lados iguales se trazan los arcos que se cortan en el punto C que es el tercer vértice del triángulo pedido (figura 131).

3º **Construir un triángulo isósceles dada la base** *a* y el ángulo opuesto á ella *b*. Se traza una recta indefinida AB, se toma de ella BC $= a$; en el punto C se traza la recta CE de manera que tenga con la otra la abertura del ángulo *b*, se divide el ángulo ECB en dos mitades con la bisectriz CD, en el extremo B se traza otro

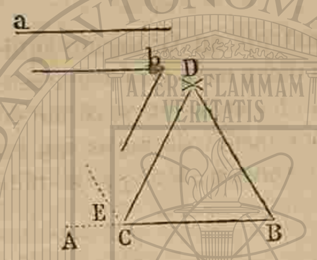


Fig. 132.

Fig. 133.

ángulo igual á DCB y la prolongación de ambos lados cerrará el triángulo que se desea (fig. 132).

4º **Construir un triángulo rectángulo conociendo los dos catetos** *a* y *b*. Se forma un ángulo recto BAC

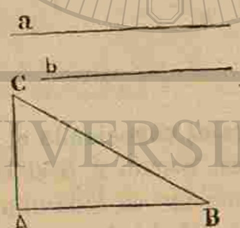


Fig. 134.

Fig. 135.

con los dos catetos dados, en seguida se traza la hipotenusa y quedará resuelto el problema (fig. 133).

5º **Construir un triángulo rectángulo dada la hi-**

potenusa *a* **y un cateto** *b*. Se traza un ángulo recto CAB, el lado AB se hace igual al cateto dado, y desde el punto B como centro tomando como radio la hipotenusa se corta el otro cateto en el punto C y quedará construído el triángulo (fig. 134).

6º **Dado un cateto** *a* **y un ángulo agudo** *b* **en un extremo, construir el triángulo rectángulo correspondiente.** Se traza una recta AB igual al cateto dado, se levanta en cualquiera de sus extremos una perpendicular y en el otro un ángulo igual al lado, se prolongan en seguida ambas líneas hasta que se corten en el punto C y quedará resuelto el problema (fig. 135).

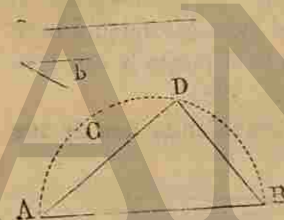


Fig. 136.

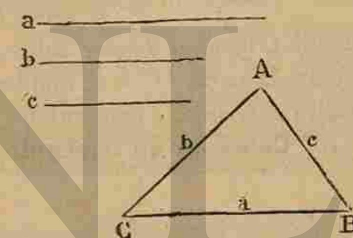


Fig. 137.

7º **Construir un triángulo rectángulo conociendo la hipotenusa** *a* **y un ángulo agudo** *b*. Se traza la recta AB igual á la hipotenusa *a*, y sobre ella como diámetro se describe una semicircunferencia ACB, en seguida se traza en uno de sus extremos, por ejemplo en A, el ángulo dado cuya segunda línea se prolonga hasta que corte en D á la semicircunferencia, se une este punto con B y se tendrá construído el triángulo (fig. 136).

8º **Dadas las rectas** *a*, *b* **y** *c* **construir un tríangu-**

lo. Se traza la recta CB = a y haciendo centro en C con un radio igual á b, se traza un arco de círculo en la parte superior, después se hace centro en B y con un radio igual á c se traza otro arco para cortar al primero, el punto de intersección será el tercer vértice del triángulo Para que este problema sea posible, es necesario que el mayor de los lados sea menor que la suma de los otros dos (fig. 137).

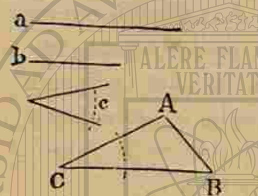


Fig. 138.

9º **Construir un triángulo dados dos lados a y b y el ángulo c comprendido entre ellos.** En la recta CB = a se construye el ángulo C igual al dado y sobre el lado AC indefinido se tomará la parte AC = b; reuniendo el punto A con B se tendrá el triángulo construído (fig. 138).

10º **Construir un triángulo conociendo dos de sus lados a y b y el ángulo A opuesto á uno de ellos.** Se traza un ángulo igual al dado A, se toma sobre uno de sus lados una distancia igual al lado b propuesto y desde el extremo B como centro y con un radio igual al lado a opuesto, se traza el arco de círculo que intercepta el

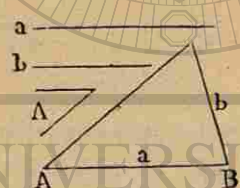


Fig. 139.

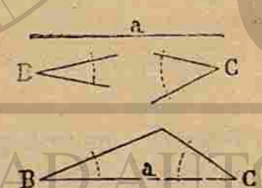


Fig. 140.

tercer lado del triángulo que será el vértice buscado (fig. 139).

11º **Construir un triángulo conociendo un lado a y los dos ángulos de sus extremos.** De los extremos de la línea dada a como vértice, se construyen los ángulos dados C y B, se prolongan los otros dos lados hasta que se cortan en el punto A que se busca (fig. 140).

12º **Construir un triángulo conociendo un lado a, un ángulo b en el extremo y otro c opuesto á dicho lado.** Se traza la recta AB = a y por el punto B la recta BC para formar el ángulo B; por el mismo punto se traza la recta BD para formar con BC un ángulo CBD = c, finalmente del punto A se traza una recta AC paralela á BD con la cual quedará construído el triángulo deseado (fig. 141).

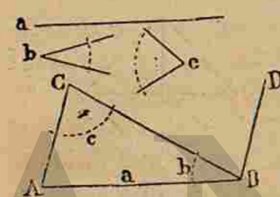


Fig. 141.

13º **Construir un triángulo del cual se conoce la altura a, la base b y uno de los otros dos lados c.** Se traza una recta indefinida AB y en un punto cualquiera

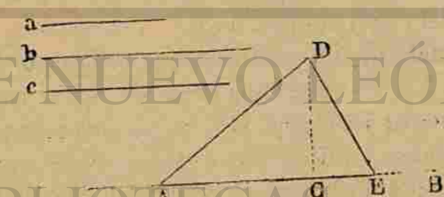


Fig. 142.

de ella C se levanta una perpendicular CD $= a$; desde el punto D como centro y con una abertura de compás igual á c se corta la recta AB en el punto A y desde este punto en la misma recta con la distancia AE $= b$ se encontrará el otro vértice del triángulo pedido (fig. 142).

54. En la construcción de los cuadriláteros se presentan los casos siguientes:

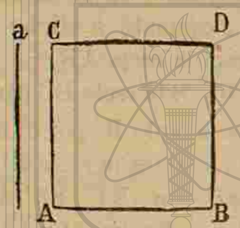


Fig. 143.

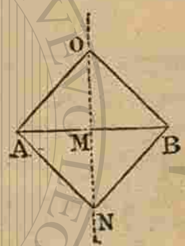


Fig. 144.

1º **Construir un cuadrado conociendo el lado** a. Se traza un ángulo recto CAB cuyos lados sean iguales á la recta a con la misma medida y haciendo centro en C y B se trazan dos arcos que se cortan en D que es el cuarto vértice del cuadrado (fig. 143).

2º **Construir un cuadrado que tenga por diagonal la recta** AB. Se traza en la mitad de dicha diagonal una perpendicular indefinida ON; en seguida desde el punto M la distancia AM $=$ MB se transporta á los puntos O y N y se tendrán los cuatro vértices del cuadrado (figura 144).

3º **Construir un paralelógramo rectángulo conociendo su altura** a **y su base** b. Se traza un ángulo recto CAB con las dos rectas dadas, se trazan dos arcos que

se cortan en D partiendo del punto B con la distancia a y del punto C con la distancia b y quedarán determinados todos sus vértices (fig. 145).

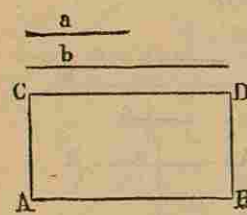


Fig. 145.

4º **Conociendo la diagonal** a **y un lado** b **construir un paralelógramo rectángulo.** Se traza un triángulo rectángulo CAB de manera que su cateto AB sea igual al lado b y su hipotenusa BC igual á la diagonal a; en seguida se trazan las paralelas correspondientes á los lados AC y AB y quedará resuelto el problema (fig. 146).

5º **Construir un romboide conociendo los lados** a **y** b **y el ángulo** c **que forman.** Se traza un ángulo CAB

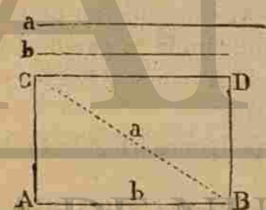


Fig. 146.

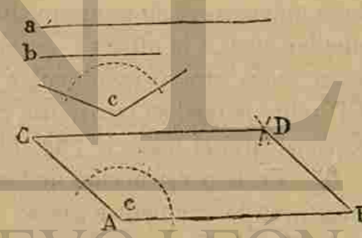


Fig. 147.

igual al dado de manera que sus lados AC y AB sean respectivamente iguales á las rectas b y a, en seguida se determina el punto D y quedará resuelto el problema (fig. 147).

El rombo se construye de la misma manera.

6º **Construir un paralelógramo conociendo sus dos diagonales** a **y** b **y el ángulo** c **que forman.** Se trazan dos rectas que se corten entre sí y que formen un ángulo igual á *c*, en seguida se dividen en dos partes iguales las dos diagonales y se transportan respectivamente sus mitades desde el punto O á los puntos A, B, C y D que son los vértices que se buscan (fig. 148).

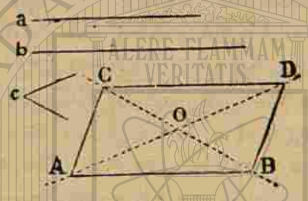


Fig. 148.

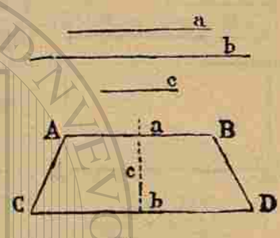


Fig. 149

7º **Construir un trapecio, conociendo sus dos bases** *a* **y** *b* **y su altura** *c*. Se traza la recta CD igual á la base mayor *b*, en su punto medio se levanta una perpendicular igual á la altura *c*, en el extremo superior de ésta se traza otra perpendicular indefinida y paralela á CD sobre la cual se transporta la base menor AB = *a* y se construirá el trapecio (fig. 149).

55. En la construcción de los polígonos irregulares se presentan los siguientes casos:

1º **Construir un polígono igual á otro.** Supongamos que se desea construir un polígono igual al designado con las letras ABCDEF, se comienza por bajar perpendiculares de todos sus vértices al lado inferior prolongándolo en caso de que fuere necesario, en seguida se traza una recta GJ = *gj*, se marcan en ella los puntos G, E, H, I, F y J; y sobre ellos se levantan tantas perpendiculares cuantas hay en la primera figura, y con las mis-

mas dimensiones hasta obtener los puntos A, B, C y D que después se unen con rectas hasta construir el polígono que se desea (fig. 150).

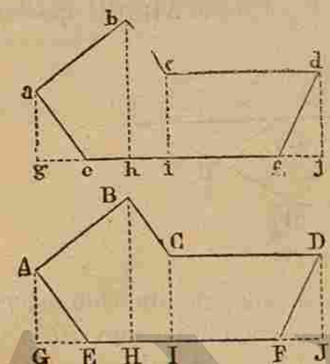


Fig. 150.

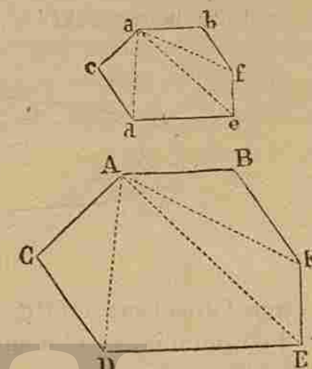


Fig. 151.

2º **Construir dos polígonos semejantes, es decir, con todos sus ángulos respectivamente iguales y sus lados homólogos proporcionales.** Sea el polígono ABCDEF cuyos lados dividiremos en dos partes iguales para construir otro semejante cuyos lados sean la mitad de los lados del primero. Se traza la recta *ab* igual á la mitad de AB, en sus extremos *a* y *b* se trazan los ángulos respectivamente iguales á A y B, se traza la recta *ac* igual á la mitad de AC y *bf* igual á la mitad de BF, y se continúa de la misma manera hasta terminar el polígono (fig. 151).

3º **Construir un polígono equivalente á otro de un lado menos, es decir que tenga la misma superficie aunque sea de forma diferente.** Supongamos el polígono ABCDE, por el punto A se traza la diagonal AC y por el punto B se traza una paralela á dicha diagonal hasta que encuentre en B′ la prolongación del lado DC, se traza la recta AB′ y el polígono ABCDE quedará

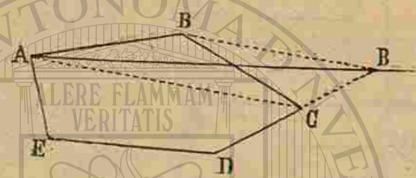


Fig. 152.

transformado en AB′DE. Con este procedimiento se puede disminuir de lados un polígono hasta convertirlo en un triángulo y sin que por ello disminuya su extensión (fig. 152).

56. En la construcción de los polígonos regulares se presentan los casos siguientes:

1º **Construir un pentágono cuyo lado sea igual á la recta** AB. Haciendo centro en los puntos A y B, con una abertura igual á dicha recta se trazan dos circunferencias; sus puntos de intersección C y D se unen por medio de una recta indefinida en su parte superior; del punto C como centro se traza un arco FHG; de los pun-

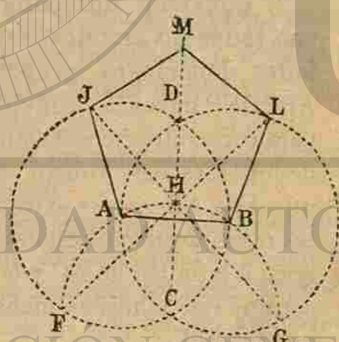


Fig. 153.

tos de dicho arco F y G se trazan dos rectas que pasan por el punto H hasta tocar la circunferencia en los puntos J y L; estos puntos se unen con A y B y se tendrá tres lados del pentágono: con la misma medida se obtiene el vértice M que es el último que se busca (fig. 153).

2º **Dada la recta** AB **como lado, construir un exágono.** Con una medida AB igual á la recta dada se tra-

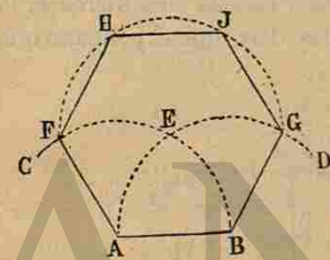


Fig. 154.

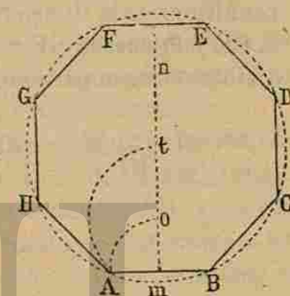


Fig. 155.

zan dos arcos BC y AD; en el punto E y con el mismo radio se traza otro arco en la parte superior del cual se obtienen las intersecciones F y G; con la misma medida se trazan los puntos H y J y se tendrá el hexágono pedido (fig. 154).

3º **Construir un octágono regular que tenga por lado la recta** AB. En el punto medio de la recta AB se levanta una perpendicular indefinida *mn*; con el radio *m*B desde *m* se traza el arco A*o*, desde *o* con el radio *o*B el arco A*t*; desde *t* con el radio B*t* se describe una circunferencia la cual contendrá ocho veces el lado AB y quedará construído el octágono regular ABCDEFGH (fig. 155).

4º **Dada una recta cualquiera N, construir un polígono regular de cualquier número de lados.** Supongamos que se trata de construir un heptágono; se traza una circunferencia cualquiera cuyo diámetro AB se divide en siete partes iguales; de los extremos A y B con una abertura de compás igual al diámetro, se describen dos arcos que se corten en el punto C; de este punto al penúltimo de la división del diámetro D se traza la recta CE y la cuerda BE colocada en esta circunferencia la dividirá en siete partes iguales. Para que el polígono que

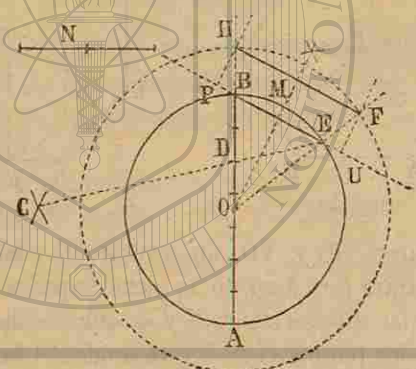


Fig. 156.

se desea construir, sus lados tengan las dimensiones de la recta N se procede como sigue: la cuerda BE se divide en dos mitades por medio de la perpendicular OM; desde el punto M y con una medida igual á la mitad de la recta N se trazan dos arquitos que determinan con la prolongación de la cuerda BE los puntos P y U; desde estos puntos se trazan dos perpendiculares PH y UF,

las cuales se cortan por medio de la prolongación del radio OB hasta H y del radio OE hasta F; desde el centro O se describe una circunferencia con cualquiera de dichos radios prolongados y la cuerda HF = N será el lado del heptágono que se desea (figura 156).

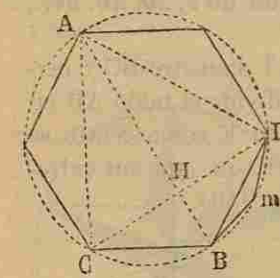


Fig. 157.

57. En la construcción de los polígonos regulares inscritos se dan los casos siguientes:

1º **Inscribir un polígono regular de 3, 6, 12, etc., lados.**

Para el triángulo se traza un diámetro AB, y del extremo B con la medida del radio se determinan los puntos C y D, y la recta CD será el lado del triángulo (fig. 157).

Para el polígono de seis lados basta trazar en la circunferencia seis veces la medida del radio ó sea la cuerda BD que es el lado del hexágono.

Para el de doce lados se divide el arco del hexágono en dos mitades, y una de ellas *mD* será el lado que se desea.

El mismo procedimiento se emplea en los polígonos de 24, 48, etc., lados.

2º **Inscribir un polígono regular de 4, 8, 16, etc., lados.**

Para el de cuatro lados basta trazar dos diámetros perpendiculares y uniendo sus extremos por rectas iguales á AB, quedará inscrito el cuadrado (fig. 158).

El de ocho lados se forma con la mitad BD del arco que corresponde al cuadrado. Los de 16, 32, etc., lados se forman de la misma manera.

3º **Inscribir un polígono regular de 5, 10, 20, etc., lados.**

Para el de cinco lados se traza el diámetro BC y perpendicular á él el radio AD; se divide el radio AB en dos partes iguales, y desde el punto E como centro se describe el arco DF y la recta DF, que une sus extremos será el lado del pentágono (fig. 159).

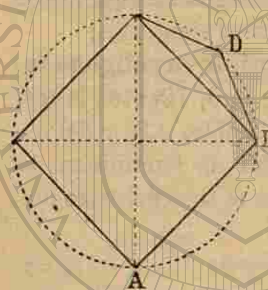


Fig. 158.

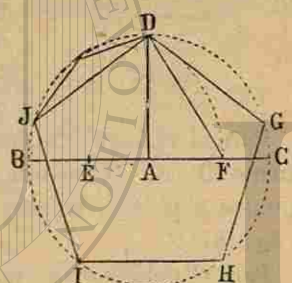


Fig. 159

Los de 10 lados, 20, 40, etc., se forman tomando la mitad del arco del polígono de 5, 10, etc.

4º **Inscribir un polígono regular de un número cualquiera de lados.**

Este problema se puede resolver siguiendo el procedimiento indicado en el párrafo 4º del número 56.

Para el de 7 lados puede construirse también tomando la mitad de la cuerda que corresponde al triángulo. Para el de 9 tomando la tercera parte del arco que corresponde á la misma figura, etc. Así pueden construirse muchos polígonos derivándolos de los ya conocidos.

58. Los polígonos regulares estrellados se forman uniendo por medio de cuerdas sus vértices de dos en dos ó de tres en tres en los polígonos inscritos (figs. 160 y y 161).

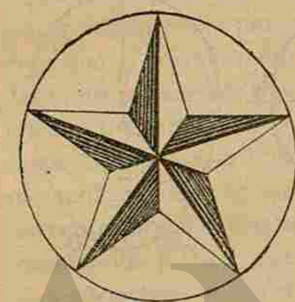


Fig. 160

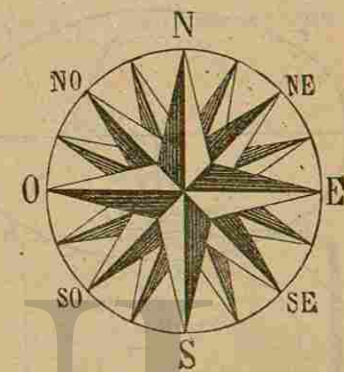


Fig. 161.

59. Trazo de las superficies de perímetro redondo: óvalo, huevo y elipse.

1º **Construcción del óvalo.** Se traza la recta indefinida *ab*, se miden en ella cuatro distancias iguales *as*, *st*, *tx* y *xb*; con una de estas medidas como radio se describen tres circunferencias cuyos centros son *s*, *t* y *x*; se trazan las rectas *gh*, *gn*, *cd* y *df* que pasan por cada centro y los puntos de intersección de las circunferencias; estas rectas se cortan en *g* y en *d* que sirven de nuevos centros, desde los cuales con un radio igual á una de ellas, por ejemplo *cd*, se trazan los arcos *cf* y *hn*, y quedará construído el óvalo (fig. 162).

2º **Construcción del huevo.** Se traza la recta AB y desde el punto medio O se describe una semicircunferencia AMB, se traza después una perpendicular MP sobre la cual se toma la distancia OC igual á OB, el pun-

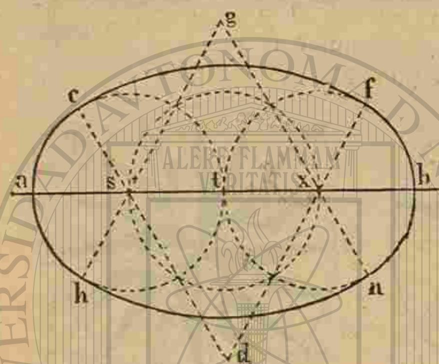


Fig. 162.

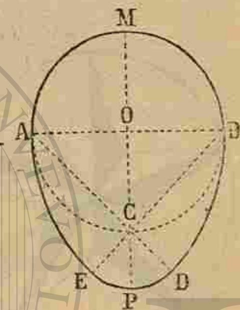


Fig. 163.

to C se une con A y B por medio de rectas indefinidas; con un radio AB y desde los puntes A y B se describen los arcos AE y BD: por último desde C con un radio CE se traza el arco EPD y quedará formado el huevo (figura 163).

Otro procedimiento. Sobre la recta indefinida AB se trazan ocho distancias iguales; en el punto 3 como centro, con un radio 3A, se traza una circunferencia; desde el punto

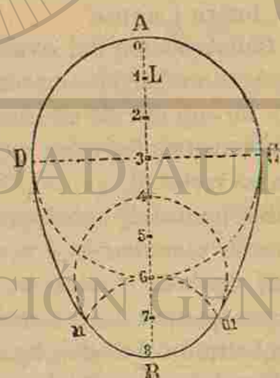


Fig. 164.

6, con un radio 6B, se traza una segunda circunferencia menor que la primera; con un radio 6B desde el punto B se traza un arco que determina los puntos m y n; se traza un diámetro DC perpendicular á la recta AB, con un radio ab desde los puntos n y D se trazan los arcos que se cortan en el punto b; con el mismo radio desde los puntos m y C se trazan otros arcos que se cortan en a; con el mismo radio y tomando como centros a y b se trazan los arcos Cm y Dn, y quedará terminado el huevo (fig. 164).

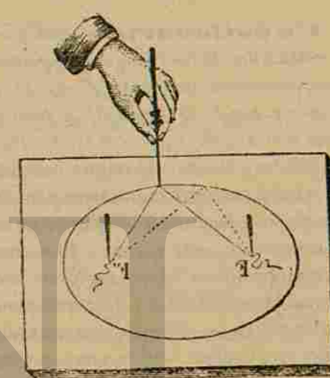


Fig 165.

3º **Trazo de la elipse.** El procedimiento más sencillo para trazar una elipse es el siguiente: se fijan en los focos F y F′ dos clavitos ó alfileres en los cuales se ata un hilo ó cordón cuya longitud sea igual al eje mayor; en seguida, por medio de un lápiz se atiranta dicho hilo y se describe la curva que deberá ser una elipse, puesto que la suma de dos de sus radios vectores será siempre igual al eje mayor (fig. 165).

Ejercicios y observaciones. — 53. Procure el Profesor en la construcción de cada triángulo, hacer que los alumnos expliquen el fundamento del procedimiento que emplean.—54. Se hace la misma recomendación respecto de los cuadriláteros.—55. Pónganse variados ejemplos de figuras iguales, semejantes y equivalentes; ejercicios de aumento y diminución de figuras, explicación de la escala.—56. Trácense polígonos regulares de diferente número de lados y búsquese prácticamente la relación del lado del polígono con el apotema en cifras numéricas.—57. Explíquense los procedimientos seguidos en la construcción de los polígonos inscritos.—58. Háganse polígonos estrellados desde el pentágono en adelante.—59. Las construcciones del óvalo, el huevo y la elipse; si fuere posible, practíquense también en el terreno.

Cuestionario.—¿Qué problemas gráficos se presentan en la construcción de los triángulos?—¿Cómo se construye un triángulo equilátero conociendo un lado?—¿Cómo se traza el isósceles conociendo el lado menor y uno de los iguales?—¿Cómo se traza el isósceles conociendo la base y el ángulo opuesto á ella?—Trazo del triángulo rectángulo conociendo los catetos.—El mismo conociendo la hipotenusa y un cateto.—El mismo conociendo un cateto y un ángulo agudo en un extremo.—El mismo conociendo la hipotenusa y un ángulo agudo.—Trazar un triángulo conociendo los tres lados.—El mismo conociendo dos lados y el ángulo comprendido.—El mismo conociendo dos de sus lados y el ángulo opuesto á uno de ellos.—El mismo conociendo un lado y los dos ángulos de los extremos.—El mismo conociendo un lado, un ángulo en el extremo y otro opuesto.—El mismo conociendo la base, la altura y otro lado.—¿Qué problemas gráficos se presentan en la construcción de los cuadriláteros?—¿Cómo se construye el cuadrado conociendo un lado?—El mismo conociendo la diagonal.—¿Cómo se construye un paralelógramo rectángulo conociendo la altura y la base?—El mismo conociendo la diagonal y un lado.—El romboide conociendo dos lados y el ángulo comprendido.—El mismo conociendo sus dos diagonales y el ángulo que forman.—El trapecio conociendo las dos bases y la altura.—¿Qué problemas gráficos se presentan en la construcción de los polígonos irregulares?—¿Qué son polígonos iguales y cómo se construyen?—¿Qué son polígonos semejantes y cómo se construyen?—¿Qué son polígonos equivalentes y cómo se construyen?—¿Qué problemas gráficos se presentan en la construcción de los polígonos regulares?—¿Cómo se construye el pentágono regular conociendo un lado?—El hexágono conociendo un lado.—El octágono conociendo un lado.—Un polígono regular de cualquier número de lados, conociendo uno.—¿Qué problemas gráficos se presentan en la construcción de los polígonos inscritos?—¿Cómo se inscribe el polígono regular de 3, 6, 12, 24, etc., lados?—El polígono regular de 4, 8, 16, 32, etc., lados.—El polígono regular de 5, 10, 20, etc., lados.—El polígono de cualquier número de lados.—¿Cómo se puede inscribir por otro medio el de 7, 14, etc., lados?—O bien el de 9, 18, etc., lados.—¿Cómo se trazan los polígonos regulares estrellados?—¿Qué problemas gráficos se presentan en la construcción de superficies de perímetro redondo?—¿Cómo se construye el óvalo?—Construya Ud. el huevo por los dos procedimientos explicados.—¿Cómo se construye la elipse?

CAPITULO X.

PROPIEDADES Y MEDICIÓN DE SUPERFICIES.

Sumario.—60. Principales propiedades de los triángulos.—61. Propiedades de los cuadriláteros.—62. Propiedades de los polígonos.—63. Propiedades del círculo y la elipse.—64. Superficie de los paralelógramos.—65. Superficie del triángulo.—66. Superficie del trapecio.—67. Superficie de los polígonos irregulares.—68. Superficie de los polígonos regulares.—69. Superficie del círculo y la elipse.—70. Principales aplicaciones de la Planimetria.—71. Problemas y ejemplos concretos.

60. Las principales propiedades de los triángulos son las siguientes: 1ª Todo triángulo tiene tres lados y tres ángulos.—2ª La suma de dos de sus lados es mayor que la longitud del tercer lado.—3ª Al mayor lado se halla opuesto el mayor ángulo y viceversa.—4ª A lados iguales se hallan opuestos ángulos iguales.—5ª La suma de los ángulos de un triángulo es igual á dos ángulos rectos ó sean 180 grados.—6ª Cada uno de los ángulos de un triángulo equilátero vale 60 grados.—7ª Un triángulo no puede tener á la vez dos ángulos obtusos, ni dos ángulos rectos, ni uno recto y otro obtuso.—8ª Las tres alturas de un triángulo correspondientes á sus tres bases respectivas se cortan en un punto interior ó exterior.

ejemplos de figuras iguales, semejantes y equivalentes; ejercicios de aumento y diminución de figuras, explicación de la escala. — 56. Trácense polígonos regulares de diferente número de lados y búsquese prácticamente la relación del lado del polígono con el apotema en cifras numéricas — 57. Explíquense los procedimientos seguidos en la construcción de los polígonos inscritos. — 58. Háganse polígonos estrellados desde el pentágono en adelante. — 59. Las construcciones del óvalo, el huevo y la elipse; si fuere posible, practíquense también en el terreno.

Cuestionario. — ¿Qué problemas gráficos se presentan en la construcción de los triángulos? — ¿Cómo se construye un triángulo equilátero conociendo un lado? — ¿Cómo se traza el isósceles conociendo el lado menor y uno de los iguales? — ¿Cómo se traza el isósceles conociendo la base y el ángulo opuesto á ella? Trazo del triángulo rectángulo conociendo los catetos. El mismo conociendo la hipotenusa y un cateto. — El mismo conociendo un cateto y un ángulo agudo en un extremo. — El mismo conociendo la hipotenusa y un ángulo agudo. — Trazar un triángulo conociendo los tres lados. — El mismo conociendo dos lados y el ángulo comprendido. — El mismo conociendo dos de sus lados y el ángulo opuesto á uno de ellos. — El mismo conociendo un lado y los dos ángulos de los extremos. — El mismo conociendo un lado, un ángulo en el extremo y otro opuesto. — El mismo conociendo la base, la altura y otro lado. — ¿Qué problemas gráficos se presentan en la construcción de los cuadriláteros? ¿Cómo se construye el cuadrado conociendo un lado? — El mismo conociendo la diagonal. — ¿Cómo se construye un paralelógramo rectángulo conociendo la altura y la base? — El mismo conociendo la diagonal y un lado. — El romboide conociendo dos lados y el ángulo comprendido. — El mismo conociendo sus dos diagonales y el ángulo que forman. — El trapecio conociendo las dos bases y la altura. — ¿Qué problemas gráficos se presentan en la construcción de los polígonos irregulares? ¿Qué son polígonos iguales y cómo se construyen? — ¿Qué son polígonos semejantes y cómo se construyen? — ¿Qué son polígonos equivalentes y cómo se construyen? — ¿Qué problemas gráficos se presentan en la construcción de los polígonos regulares? — ¿Cómo se construye el pentágono regular conociendo un lado? El hexágono conociendo un lado. — El octágono conociendo un lado. — Un polígono regular de cualquier número de lados, conociendo uno. — ¿Qué problemas gráficos se presentan en la construcción de los polígonos inscritos? — ¿Cómo se inscribe el polígono regular de

3, 6, 12, 24, etc., lados? — El polígono regular de 4, 8, 16, 32, etc., lados. El polígono regular de 5, 10, 20, etc., lados. — El polígono de cualquier número de lados. — ¿Cómo se puede inscribir por otro medio el de 7, 14, etc., lados? O bien el de 9, 18, etc., lados. — ¿Cómo se trazan los polígonos regulares estrellados? — ¿Qué problemas gráficos se presentan en la construcción de superficies de perímetro redondo? — ¿Cómo se construye el óvalo? Construya Ud. el huevo por los dos procedimientos explicados. — ¿Cómo se construye la elipse?

CAPITULO X.

PROPIEDADES Y MEDICIÓN DE SUPERFICIES.

Sumario. — 60. Principales propiedades de los triángulos. — 61. Propiedades de los cuadriláteros. — 62. Propiedades de los polígonos. — 63. Propiedades del círculo y la elipse. — 64. Superficie de los paralelógramos. — 65. Superficie del triángulo. — 66. Superficie del trapecio. — 67. Superficie de los polígonos irregulares. — 68. Superficie de los polígonos regulares. — 69. Superficie del círculo y la elipse. — 70. Principales aplicaciones de la Planimetría. — 71. Problemas y ejemplos concretos.

60. Las principales propiedades de los triángulos son las siguientes: 1ª Todo triángulo tiene tres lados y tres ángulos. — 2ª La suma de dos de sus lados es mayor que la longitud del tercer lado. — 3ª Al mayor lado se halla opuesto el mayor ángulo y viceversa. — 4ª A lados iguales se hallan opuestos ángulos iguales. — 5ª La suma de los ángulos de un triángulo es igual á dos ángulos rectos ó sean 180 grados. — 6ª Cada uno de los ángulos de un triángulo equilátero vale 60 grados. — 7ª Un triángulo no puede tener á la vez dos ángulos obtusos, ni dos ángulos rectos, ni uno recto y otro obtuso. — 8ª Las tres alturas de un triángulo correspondientes á sus tres bases respectivas se cortan en un punto interior ó exterior.

—9ª Las tres bisectrices de un triángulo se cortan en un punto interior.—10ª Todo triángulo puede considerarse como la mitad de un paralelógramo.—11ª En todo triángulo isósceles los dos ángulos del lado menor son iguales entre sí.—12ª En un triángulo rectángulo la suma de los ángulos agudos es igual á un ángulo recto.—13ª Dos triángulos que tienen una misma base y una misma altura son equivalentes.—14ª Dos triángulos son iguales cuando tienen sus tres lados respectivamente iguales.—15ª Dos triángulos son iguales cuando tienen igual un ángulo y los lados que lo forman son iguales cada uno al suyo.—16ª Dos triángulos pueden tener sus tres ángulos iguales sin ser iguales.

61. Las principales propiedades de los cuadriláteros son las siguientes: 1ª Todo cuadrilátero tiene cuatro lados y cuatro ángulos.—2ª La suma de los cuatro ángulos de un cuadrilátero vale cuatro ángulos rectos.—3ª Todo paralelógramo puede descomponerse en dos triángulos iguales.—4ª En todo paralelógramo los lados y ángulos opuestos son iguales.—5ª Las diagonales de un paralelógramo se cortan en partes mutuamente iguales.—6ª La mayor diagonal de un paralelógramo es la opuesta al mayor ángulo y viceversa.—7ª Las diagonales del cuadrado y del rombo se cortan siempre en ángulo recto.—8ª Dos paralelógramos que tienen iguales dos lados y el ángulo comprendido son iguales.—9ª Toda recta paralela á las dos bases de un trapecio divide los otros dos lados en partes proporcionales.—10ª La recta que une los medios de los dos lados no paralelos de un trapecio es igual á la semisuma de las bases, etc.

62. Las principales propiedades de los polígonos son

las siguientes: 1ª Todo polígono tiene tantos ángulos como lados tiene.—2ª Todo polígono puede descomponerse en tantos triángulos como lados tiene, siempre que todas las diagonales partan del centro á todos los vértices.—3ª Todo polígono se divide en tantos triángulos como lados tiene menos dos, siempre que sean formados por diagonales que parten de un solo vértice á los demás.—4ª En los polígonos regulares los apotemas son siempre iguales; lo mismo pasa con los radios ó rectas que parten de los vértices al centro.—5ª La suma de todos los ángulos del centro en un polígono regular vale cuatro ángulos rectos.—6ª El valor de un ángulo del centro de un polígono regular es igual al cociente que resulta de dividir el valor de cuatro ángulos rectos por el número de lados del polígono.—7ª La suma de todos los ángulos interiores de un polígono vale tantas veces dos ángulos rectos como lados tiene, menos dos.—8ª El valor de un ángulo interior de un polígono regular se obtiene dividiendo el valor de todos los ángulos juntos por el número de ángulos ó lados que tenga el polígono, etc.

63. Las principales propiedades del círculo y la elipse son las siguientes: 1ª Todo círculo puede considerarse como un polígono de infinitos lados, en el cual su perímetro es la circunferencia y su apotema es el radio.—2ª La relación que existe entre la circunferencia y el diámetro es siempre constante en todos los círculos.—3ª En toda elipse la suma de dos de sus radios vectores es igual al eje mayor.—4ª El círculo es una elipse cuyos dos focos están en el centro y por consiguiente todos sus radios vectores son iguales entre sí, etc.

64. Superficie de los paralelógramos.

La superficie de todo paralelógramo se mide multiplicando la longitud de la base por la longitud de la altura.

$$S = B \times A.$$

Examinemos la razón de esta fórmula.

En el paralelógramo **cuadrado** coloquemos la unidad de medida de superficie sobre la base, y observaremos que cabe en ella tres veces por ejemplo; si esta faja la repetimos hasta cubrir toda la superficie del cuadrado, notaremos que cabe en ella otras tantas veces como unidades tiene la altura ó sea $S = 3 \times 3 = 9$ metros cuadrados ó cualquiera otra medida superficial que se haya elegido (fig. 166).

Fig. 166.

Fig. 167.

En el paralelógramo **rectángulo** se observa lo mismo que en el cuadrado, colocando en la base cuatro medidas superficiales por ejemplo; tendremos que repetir esta faja tres veces que mide la altura ó sea $S = 4 \times 3 = 12$ metros cuadrados de superficie (fig. 167).

En el paralelógramo **rombo** se medirá la superficie de un cuadrado prolongando su base inferior y bajando dos perpendiculares de su base superior; pues aun cuando

en el lado derecho se agrega un triángulo, se quita otro igual en el lado izquierdo, con lo cual queda compensada la superficie (fig. 168).

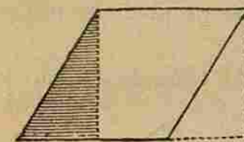


Fig. 168.

Fig. 169.

En el paralelógramo **romboide** pasa lo mismo que en el rombo, según se observa en la figura correspondiente (fig. 169).

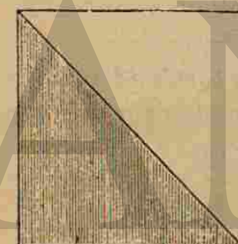


Fig. 170.

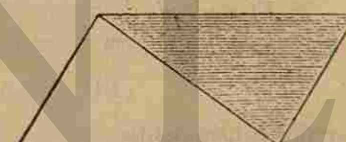


Fig. 171.

65. Superficies de los triángulos.

La superficie de un triángulo se obtiene multiplicando la longitud de la base por la longitud de la altura y dividiendo el producto por dos.

$$S = \frac{B \times A}{2}.$$

En efecto, todo triángulo es la mitad de un paralelógramo; es así que la superficie de todo paralelógramo es el producto de la base por la altura y el triángulo la mitad de un paralelógramo, luego su superficie será la mitad del producto de la base por la altura (figs. 170 y 171).

El triángulo rectángulo tiene tres propiedades importantes:

1ª *El cuadrado de cada uno de los lados del ángulo recto es igual al producto de la hipotenusa por el segmento adyacente* (figura 172).

$$(AB)^2 = AC \times AD$$
$$(BC)^2 = AC \times DC$$

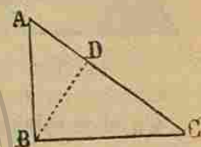


Fig. 172.

y por consiguiente

$$AB = \sqrt{AC \times AD.}$$
$$BC = \sqrt{AC \times DC.}$$

2ª *El cuadrado de la perpendicular bajada del ángulo recto es igual al producto de los dos segmentos de la hipotenusa.*

$$(BD)^2 = AD \times DC$$

y por consiguiente

$$BD = \sqrt{AD \times DC.}$$

3ª *El cuadrado de la hipotenusa en un triángulo rectángulo es igual á la suma de los cuadrados de los catetos* (figura 173).

$$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$$

y por consiguiente

$$AC = \sqrt{(AC)^2 + (BC)^2}$$
$$AB = \sqrt{(AC)^2 - (BC)^2}$$
$$BC = \sqrt{(AC)^2 - (AB)^2}\ .$$

Según esta última propiedad, puede fácilmente medirse la diagonal de un cuadrado cuyos dos lados son iguales (fig. 174).

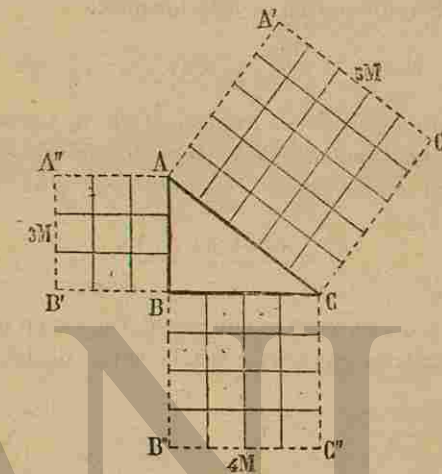


Fig. 173.

Representemos los lados AB y BC con la letra a y como $AB = BC = a$, resulta:

$$AC = \sqrt{2 \times a^2}\ .$$

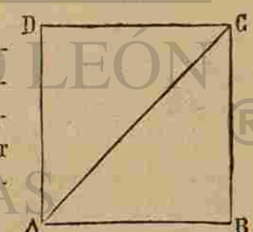


Fig. 174.

También se puede medir la superficie de un triángulo conociendo las dimensiones de sus tres lados y sin conocer la altura, por medio del siguiente procedimiento:

De la semisuma de los tres lados, se resta sucesivamente cada lado, después se efectúa el producto de ella que es el semiperímetro, por *cada una de las restas obtenidas; la raíz cuadrada de este producto es la superficie pedida.*

Supongamos que a, b y c son los tres lados y p el semiperímetro, obtendremos esta fórmula:

$$S = \sqrt{p \times (p - a) \times (p - b) \times (p - c)}.$$

66. *La superficie de un trapecio se obtiene multiplicando la suma de las longitudes de las bases paralelas por la longitud de la altura y dividiendo el producto por dos:*

$$S = \frac{(B + b) \times A}{2}.$$

Porque todo trapecio puede transformarse en un triángulo equivalente cuya base sea la suma de las dos ba-

Fig. 175.

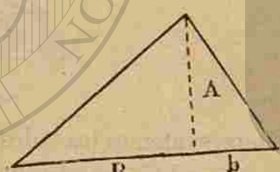


Fig. 176.

ses del trapecio, y su altura la misma del trapecio, y como la superficie del triángulo es igual al producto de la base por la altura dividido por dos, se comprenderá fácilmente la razón de la fórmula anterior (figs. 175-176).

67. *La superficie de un polígono irregular se mide dividiéndolo en triángulos y calculando la superficie de todos y cada uno de ellos. La suma total será la superficie pedida* (fig. 177).

68. Superficie de los polígonos regulares.

La superficie de un polígono regular se mide multiplicando el perímetro por el apotema y dividiendo el producto por dos:

$$S = \frac{P \times Ap}{2}.$$

Porque todo polígono regular se descompone en varios triángulos iguales y el conjunto puede considerarse co-

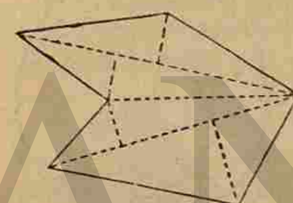


Fig. 177.

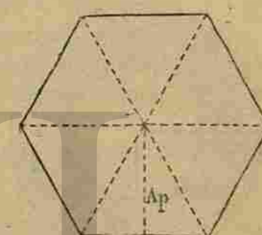


Fig. 178.

mo un solo triángulo cuya base es el perímetro y su altura el apotema, de donde resulta la fórmula precedente (fig. 178).

69. Superficie del círculo y la elipse.

La superficie de un círculo se obtiene multiplicando la longitud de la circunferencia por el radio y dividiendo el producto por dos:

$$S = \frac{C \times R}{2}.$$

Porque todo círculo puede considerarse como un polígono de infinitos lados en que la circunferencia representa al perímetro y el radio al apotema, lo cual demuestra claramente la fórmula.

La superficie de una corona circular se obtiene buscando la diferencia de las superficies de los dos círculos (fig. 179).

La superficie de un sector de círculo se obtiene multiplicando la longitud del arco de círculo por el radio y dividiendo el producto por dos (fig. 180).

La superficie de la elipse se obtiene multiplicando el producto de los dos semi-ejes por la cantidad 3,1416.

Fig. 179.

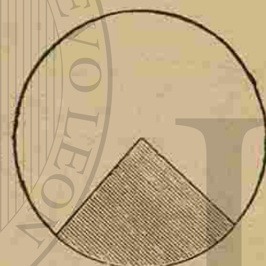


Fig. 180.

Supongamos que a y b representan los ejes, tendremos:

$$S = \frac{a \times b}{4} \times \pi.$$

70. Algunas aplicaciones de la Planimetría.

1ª Háganse ejercicios de las medidas de superficie, precisando las relaciones que existen entre la hectárea, el área, la centiárea, el decímetro, centímetro y milímetro cuadrados.

2ª Ejercicios sobre elevación al cuadrado y extracción de la raíz cuadrada.

3ª Comprobación de las propiedades de los triángulos, los cuadriláteros, los polígonos, el círculo y la elipse.

4ª Tomar datos por medio de la escala, de bases, alturas, apotemas, radios, etc., en las figuras geométricas con el objeto de medir sus superficies.

5ª Ejercicios diversos sobre la aplicación de las fórmulas para la determinación de superficies por medio de ejemplos concretos.

6ª Determinar el número de ladrillos, losas, viguetas, azulejos, etc., que entran en toda clase de superficies planas: pavimentos, techos, paredes, etc.

71. Problemas y ejemplos concretos para resolver:

1º Cuántas losas de 8 decímetros de largo y 5 de ancho se necesitarán para enlosar un patio cuadrado que mide 25 metros de cada lado.

2º Averiguar á cuántos ladrillos triangulares de 20 centímetros de base por 15 de altura equivale una superficie triangular que mide 15 metros de base y 10 de altura.

3º Cuántos vidrios de medio metro cuadrado se necesitarán para un tejado compuesto de cuatro superficies: dos trapecios y dos triángulos; siendo cada base mayor de los primeros 12 metros, cada base menor 10 metros, la altura 6 metros; y la base de los segundos de 8 metros, ignorándose la altura.

4º Cuántas fanegas de sembradura de maíz de un doceavo de caballería podrán sembrarse en un terreno de forma pentagonal, que mide por el Norte 2,500 metros; por el Este 1,025, por el Sur 3,500 y por el Oeste 2,000. El ángulo comprendido entre Norte y Oeste es de 100 grados, entre Oeste y Sur 80 grados y entre Sur y Este 150 grados.

5º Cuántos metros de tela de 8 decímetros de ancho se necesitarán para formar un toldo octagonal de forma regular, midiendo cada lado 5 metros.

6º Calcular la superficie de una corona circular, cuyo círculo menor mide 12 metros de diámetro, siendo la anchura de la corona de 4 metros, é investigar después á cuántos azulejos pentagonales de un decímetro por lado equivale su superficie.

Ejercicios y observaciones. 60. Compruébense ó demuéstrense por medios intuitivos ó gráficos, según la mayor ó menor dificultad que presenten todas las propiedades de los triángulos.—61. Hágase lo mismo con los cuadriláteros.—62. Practíquense varios ejercicios con las propiedades de los polígonos.—63. Recordación general de las propiedades de la circunferencia y explicación de las del círculo y la elipse.—64. Demostración intuitiva de la superficie del paralelógramo y ejemplos diversos.—65. Lo mismo con el triángulo, trazos de alturas, división de paralelógramos en triángulos, dado el triángulo formar el paralelógramo, ejemplos diversos sobre la aplicación de las propiedades del triángulo rectángulo, aplicación de la fórmula del triángulo en función de sus tres lados.—66. El trapecio, ejemplos concretos y explicación de la fórmula.—67. Mídanse varios polígonos irregulares y transfórmense en otros equivalentes.—68. Mídanse polígonos regulares averiguando el valor del apotema.—69. Ejemplos diversos sobre superficies circulares y elípticas.—70. Háganse aplicaciones concretas de todos estos ejercicios.—71. Resolución de estos problemas con el auxilio del profesor.

Cuestionario.—¿Cuáles son las principales propiedades de los triángulos?—Respecto de sus lados.—De sus ángulos.—De sus alturas.—De sus bisectrices.—Enumere Vd. algunas propiedades especiales del isósceles y el rectángulo ó de algún otro.—¿Qué propiedades tienen comparados entre sí respecto de su igualdad, semejanza ó equivalencia?—¿Cuáles son las principales propiedades de los cuadriláteros?—Respecto de sus lados.—Respecto de sus ángulos.—¿Qué propiedades especiales corresponden á los paralelógramos?—A los trapecios.—¿Cuáles son las principales propiedades de los polígonos?—Trazando diagonales de un vértice á los demás, ó bien, del centro á todos los vértices, ¿cuántos triángulos se forman de un polígono?—¿Cuál es el valor de un ángulo en los polígonos regulares, ya sea del centro ó de un vértice?—¿Cuál es la suma de todos los ángulos de un polígono en uno y otro caso?—¿Cuáles son las principales propiedades del círculo y la elipse?—¿Cómo se mide la superficie de los paralelógramos?—¿Qué particularidad se nota en las superficies del rombo y el romboide?—¿Cómo se determina la superficie en un triángulo?—¿Cuáles son las tres propiedades importantes que tienen los triángulos rectángulos?—¿Cómo se mide la superficie de un triángulo conociendo sus tres lados?—¿Cómo se obtiene la superficie de un trapecio?—¿Cómo se mide la superficie de los polígonos irregulares?—¿Cómo se mide la superficie de los polígonos regulares?—¿Cómo se mide la superficie de un círculo?—De una corona circular ó de un sector.—De una elipse.

3ª DIVISION.

ESTEREOMETRIA.

CAPITULO XI.

CONSTRUCCIÓN DE VOLÚMENES.

Sumario.—72. Construcción de los poliedros regulares.—73. Construcción de los poliedros irregulares.—74. Construcción de los cuerpo redondos.—75. Construcción de los cuerpos mixtos.

72. Para construir los poliedros regulares se procede de la manera siguiente:

1º El **tetraedro** se forma con un triángulo equilátero ABC, se dividen sus tres lados en dos partes iguales y con los puntos *a*, *b* y *c* se construye el triángulo interior *abc*, en seguida se da un doblez en las líneas *ab*, *ac* y *bc*, hasta reunir en un solo punto los vértices A, B y C y quedará construído el tetraedro (fig. 181).

5º Cuántos metros de tela de 8 decímetros de ancho se necesitarán para formar un toldo octagonal de forma regular, midiendo cada lado 5 metros.

6º Calcular la superficie de una corona circular, cuyo círculo menor mide 12 metros de diámetro, siendo la anchura de la corona de 4 metros, é investigar después á cuántos azulejos pentagonales de un decímetro por lado equivale su superficie.

Ejercicios y observaciones. 60. Compruébense ó demuéstrense por medios intuitivos ó gráficos, según la mayor ó menor dificultad que presenten todas las propiedades de los triángulos.—61. Hágase lo mismo con los cuadriláteros.—62. Practíquense varios ejercicios con las propiedades de los polígonos.—63. Recordación general de las propiedades de la circunferencia y explicación de las del círculo y la elipse.—64. Demostración intuitiva de la superficie del paralelógramo y ejemplos diversos.—65. Lo mismo con el triángulo, trazos de alturas, división de paralelógramos en triángulos, dado el triángulo formar el paralelógramo, ejemplos diversos sobre la aplicación de las propiedades del triángulo rectángulo, aplicación de la fórmula del triángulo en función de sus tres lados.—66. El trapecio, ejemplos concretos y explicación de la fórmula.—67. Mídanse varios polígonos irregulares y transfórmense en otros equivalentes.—68. Mídanse polígonos regulares averiguando el valor del apotema.—69. Ejemplos diversos sobre superficies circulares y elípticas.—70. Háganse aplicaciones concretas de todos estos ejercicios.—71. Resolución de estos problemas con el auxilio del profesor.

Cuestionario.—¿Cuáles son las principales propiedades de los triángulos?—Respecto de sus lados.—De sus ángulos.—De sus alturas.—De sus bisectrices.—Enumere Vd. algunas propiedades especiales del isósceles y el rectángulo ó de algún otro.—¿Qué propiedades tienen comparados entre sí respecto de su igualdad, semejanza ó equivalencia?—¿Cuáles son las principales propiedades de los cuadriláteros?—Respecto de sus lados.—Respecto de sus ángulos.—¿Qué propiedades especiales corresponden á los paralelógramos?—A los trapecios.—¿Cuáles son las principales propiedades de los polígonos?—Trazando diagonales de un vértice á los demás, ó bien, del centro á todos los vértices, ¿cuántos triángulos se forman de un polígono?—¿Cuál es el valor de un ángulo en los polígonos regulares, ya sea del centro ó de un vértice?—¿Cuál es la suma de todos los ángulos de un polígono en uno y otro caso?—¿Cuáles son las principales propiedades del círculo y la elipse?—¿Cómo se mide la superficie de los paralelógramos?—¿Qué particularidad se nota en las superficies del rombo y el romboide?—¿Cómo se determina la superficie en un triángulo?—¿Cuáles son las tres propiedades importantes que tienen los triángulos rectángulos?—¿Cómo se mide la superficie de un triángulo conociendo sus tres lados?—¿Cómo se obtiene la superficie de un trapecio?—¿Cómo se mide la superficie de los polígonos irregulares?—¿Cómo se mide la superficie de los polígonos regulares?—¿Cómo se mide la superficie de un círculo?—De una corona circular ó de un sector.—De una elipse.

3ª DIVISION.

ESTEREOMETRIA.

CAPITULO XI.

CONSTRUCCIÓN DE VOLÚMENES.

Sumario.—72. Construcción de los poliedros regulares.—73. Construcción de los poliedros irregulares.—74. Construcción de los cuerpo redondos.—75. Construcción de los cuerpos mixtos.

72. Para construir los poliedros regulares se procede de la manera siguiente:

1º El **tetraedro** se forma con un triángulo equilátero ABC, se dividen sus tres lados en dos partes iguales y con los puntos *a*, *b* y *c* se construye el triángulo interior *abc*, en seguida se da un doblez en las líneas *ab*, *ac* y *bc*, hasta reunir en un solo punto los vértices A, B y C y quedará construído el tetraedro (fig. 181).

2º El **cubo** ó **hexaedro** se forma con seis cuadrados colocados en cruz, cuatro de arriba á abajo, uno á la derecha y otro á la izquierda del segundo superior. Para construirlo se doblan los cuadrados 1, 5 y 6 sobre el número 2, en seguida el 3 y el 4 sobre el mismo hasta cerrar el cubo (fig. 182).

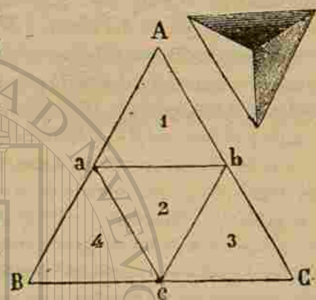


Fig. 181.

3º El **octaedro** se forma con ocho triángulos equiláteros colocados según representa la figura: tres en la parte superior, dos en medio y tres en la parte inferior (fig. 183).

4º El **dodecaedro** se forma con doce pentágonos re-

Fig. 182.

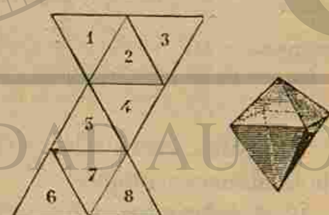


Fig. 183

gulares colocados de manera que representen dos estrellas, de seis pentágonos cada una y unidas entre sí, según lo indica la figura (fig. 184).

5º El **icosaedro** se forma por veinte triángulos equiláteros colocados en tres hileras: cinco en la parte superior, diez en el centro y cinco en la inferior (fig. 185).

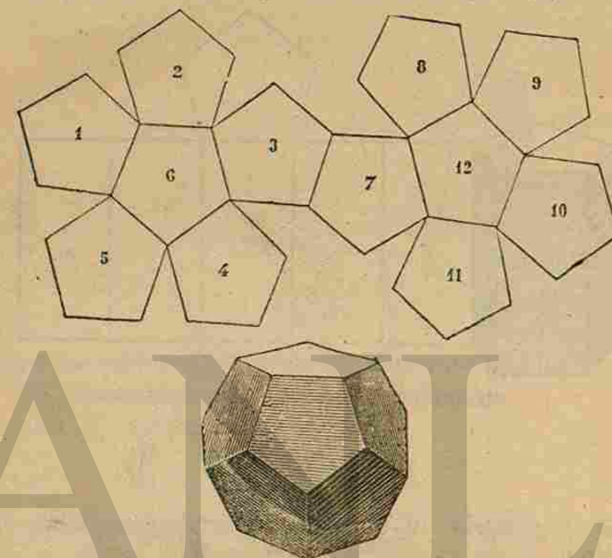


Fig. 184.

73. La construcción en los poliedros irregulares se verifica de la manera siguiente:


Fig. 185.

1º Los **prismas** tienen por caras laterales paralelógramos y por bases triángulos, cuadriláteros ó polígonos (fig. 186).

El prisma puede engendrarse por el movimiento vertical y paralelo de un polígono cualquiera sobre sí mismo.

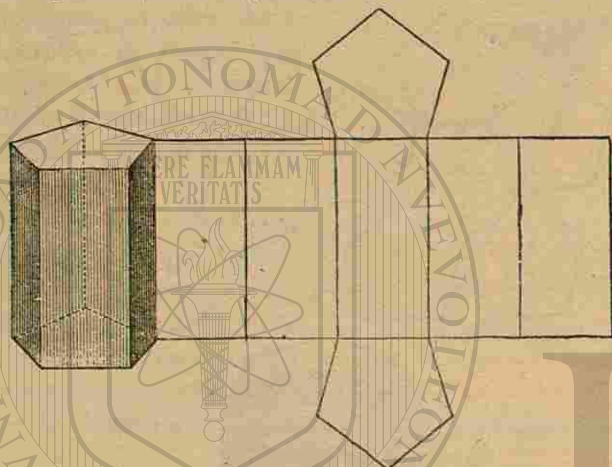


Fig. 186.

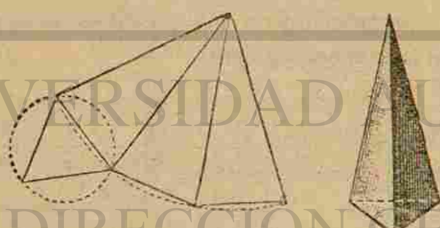


Fig. 187.

2º La **pirámide** tiene por caras laterales triángulos y por base un triángulo, un cuadrilátero ó un polígono cualquiera (fig. 187).

La **pirámide truncada** tiene por caras laterales trapecios, y por bases dos triángulos, cuadriláteros ó polígonos semejantes y de tamaños diferentes (fig. 188).

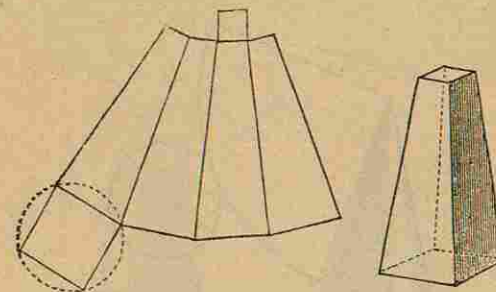


Fig. 188.

74 Construcción de los cuerpos redondos.

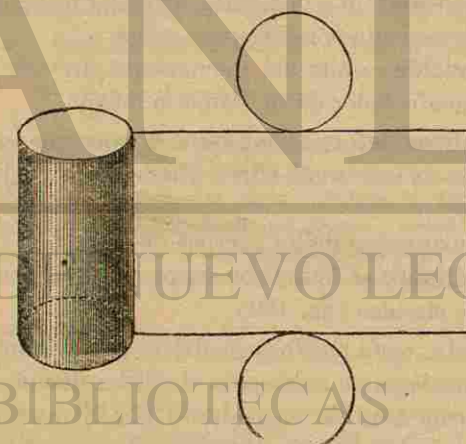


Fig. 189.

1º La superficie de la esfera equivale á cuatro círculos máximos ó que tienen por diámetro el mismo de la esfera.

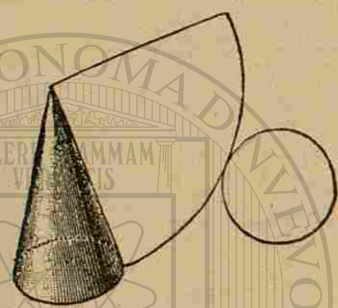


Fig. 190.

Haciendo girar un semicírculo alrededor de su diámetro, su movimiento engendra una esfera.

2º El **ovoide** resulta del movimiento giratorio de un semi-óvalo alrededor de su diámetro mayor.

3º El **elipsoide** puede engendrarse por el movimiento giratorio de una semi-elipse alrededor de cualquiera de sus ejes.

75. Construcción de los cuerpos mixtos.

1º El **cilindro** se forma con un paralelógramo rectángulo y dos círculos (fig. 189).

El cilíndro recto puede engendrarse por la revolución de un paralelógramo rectángulo alrededor de uno de sus lados. Puede también engendrarse por el movimiento vertical y paralelo de una circunferencia sobre sí misma.

2º El **cono** está formado con un sector de círculo y un círculo (fig. 190).

El cono recto puede engendrarse por la revolución de un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos.

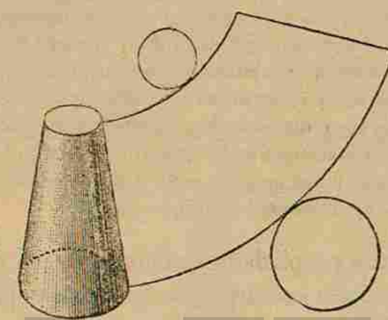


Fig. 191.

El cono recto truncado está formado con un trapecio *circular* y dos círculos de tamaño diferente (fig. 191).

Ejercicios y observaciones.—72. Constrúyanse los poliedros regulares con cartones en los cuales se haya previamente dibujado la superficie desenvuelta, según lo indican las figuras.—73. La misma recomendación respecto de los prismas y pirámides.—74. Respecto de los cuerpos redondos procúrese engendrarlos por medio del movimiento giratorio.—75. Hágase lo mismo con los cuerpos mixtos.

Cuestionario.—¿Cómo se pueden construir los poliedros regulares?—El tetraedro.—El cubo ó hexaedro.—El octaedro.—El dodecaedro.—El icosaedro.—¿Cómo se construyen los poliedros irregulares?—Los prismas.—Las pirámides.—Las pirámides truncadas.—¿Cómo se engendran los cuerpos redondos?—La esfera.—El ovoide.—El elipsoide.—¿Cómo se construyen los cuerpos mixtos?—El cilindro.—El cono.—El cono truncado.

CAPITULO XII.

PROPIEDADES Y MEDICIÓN DE LOS VOLÚMENES.

Sumario.—76. Propiedades generales de los volúmenes.—77. Superficie y volumen del prisma.—78. Superficie y volumen del cilindro.—79. Superficie y volumen de la pirámide. 80. Superficie y volumen del cono.—81. Superficie y volumen de la pirámide truncada.—82. Superficie y volumen del cono truncado.—83. Superficie y volumen de la esfera.—84. Superficie y volumen de los poliedros regulares.—85. Volumen de los cuerpos de forma irregular.—86. Algunas aplicaciones de la Estereometría.—87. Problemas y ejemplos concretos.

76. Algunas propiedades generales de los volumenes: 1ª Las superficies consideradas aisladamente ó combinadas entre sí tienen las mismas posiciones y combinaciones de las líneas. 2ª Un ángulo diedro tiene siempre por intersección una línea ó arista. 3ª Todo ángulo diedro tiene por medida la abertura de un ángulo lineal formado por dos perpendiculares que partan de la arista común en un mismo punto. 4ª Un ángulo poliedro se compone de tantos ángulos diedros como caras tiene. 5ª Un ángulo triedro regular tiene por intersección un punto y sólo puede formarse con tres triángulos equiláteros, tres cuadrados, tres pentágonos regulares; pero nunca con polígonos regulares de mayor número de lados. 6ª Un ángulo poliedro regular tiene también por intersección un punto y sólo puede formarse por cuatro ó cinco triángulos equiláteros; pero nunca por mayor número de triángulos, ni mucho menos por polígonos regulares de mayor número de lados. 7ª La suma de los ángulos planos que concurren en el vértice de un ángulo triedro ó poliedro es siempre menor que cuatro ángulos rectos. 8ª Las únicas combinaciones de polígonos regulares que suman 360 grados son de seis triángulos, de cuatro cuadrados y de tres hexágonos. 9ª El número de vértices ó ángulos poliedros de un poliedro regular se obtiene multiplicando el número de ángulos de cada cara por el número de caras que tiene el cuerpo y se divide el producto por el número de caras que concurren á cada vértice. 10ª El número total de aristas de un

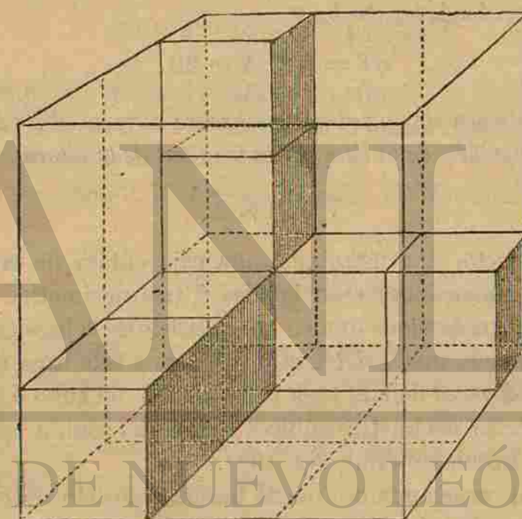


Fig. 192.

poliedro regular se obtiene multiplicando el número de lados de una cara por el número de caras de que está formado y el producto se divide por dos, etc.

77. Superficie y volumen del prisma.

La superficie lateral de un prisma recto se mide multiplicando el perímetro de la base por la altura:

$$SL = P \times A.$$

Porque la superficie lateral de todo prisma se desenvuelve en un paralelógramo rectángulo, cuya base es el perímetro y su altura la misma del prisma.

La superficie total de un prisma recto es igual á la superficie lateral más las dos bases:

$$ST = P \times A + 2B.$$

El volumen de un prisma cualquiera es igual al producto de la superficie de la base por la longitud de la altura:

$$V = B \times A.$$

En efecto, si construimos una caja cúbica de cartón cuyas dimensiones sean iguales á tres decímetros por ejemplo, notaremos que en la superficie de la base caben exactamente nueve decímetros cúbicos y esta capa repetida tres veces llenará toda la capacidad del cubo ó sean $9 \times 3 = 27$ decímetros cúbicos que es una comprobación de la fórmula anterior (fig. 192).

Igual razonamiento puede hacerse respecto de cualquier paralelipípedo ó cualquier prisma cuyas bases tengan mayor número de lados.

78. Superficie y volumen del cilindro.

La superficie lateral de un cilindro recto se obtiene multiplicando la circunferencia de la base por la altura.

En efecto, el cilindro puede considerarse como un prisma de infinitas caras, siendo sus bases dos círculos

paralelos y sus perímetros circunferencias; por consiguiente su superficie lateral es también la de un paralelógramo rectángulo cuya base es la circunferencia y la altura la misma del cilindro.

La fórmula quedará de la manera siguiente:

$$SL = C \times A.$$

La superficie total de un cilindro recto es igual á la lateral más las dos bases.

$$ST = C \times A + 2 \times \left(\frac{C \times R}{2}\right).$$

Supuesto que cada base es un círculo.

El volumen de un cilindro recto es igual al producto de la superficie de la base por la altura.

Pero como la base es un círculo, la fórmula quedará así:

$$V = \left(\frac{C \times R}{2}\right) \times A.$$

79. Superficie y volumen de la pirámide.

La superficie lateral de una pirámide recta se obtiene multiplicando el perímetro de la base por el apotema, ó sea la altura que corresponde á uno de los triángulos laterales, y dividiendo el producto por dos:

$$SL = \frac{P \times Ap}{2}.$$

Porque la superficie lateral de toda pirámide recta es la suma de todos los triángulos en que se descompone, con los cuales resulta un sólo triángulo que tiene por base el perímetro y por altura el apotema.

La superficie total de una pirámide recta es igual á la superficie lateral más la de la base:

$$ST = \frac{P \times Ap}{2} + B.$$

El volumen de una pirámide es igual al producto de la superficie de la base por la altura dividido por tres:

$$V = \frac{B \times A}{3}.$$

Porque toda pirámide puede considerarse como la tercera parte de un prisma de la misma base y altura, ó bien un prisma puede descomponerse en tres pirámides equivalentes (fig. 193).

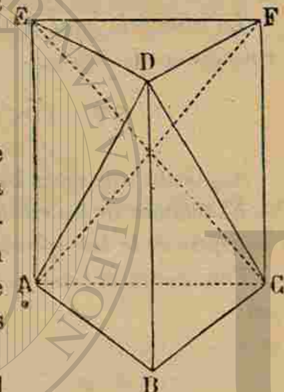


Fig 193.

80. Superficie y volumen del cono.

La superficie lateral de un cono recto se obtiene multiplicando el perímetro de la base por el apotema ó generatriz, ó sea la recta trazada de la cúspide á cualquier punto de la circunferencia.

Es exactamente el mismo procedimiento que para la pirámide, puesto que el cono puede considerarse como una pirámide de infinitas caras, cuya base es un círculo y su perímetro una circunferencia. La fórmula quedará modificada de este modo:

$$SL = \frac{C \times Ap}{2}.$$

La superficie total de un cono recto es igual á la lateral más la de la base:

$$ST = \left(\frac{C \times Ap}{2}\right) + \left(\frac{C \times R}{2}\right).$$

El volumen de un cono es igual al producto de la base por la altura y dividido por tres:

$$V = \frac{\frac{C \times R}{2} \times A}{3}.$$

Los fundamentos de esta fórmula son los mismos que se dieron respecto del volumen de la pirámide.

81. Superficie y volumen de la pirámide truncada.

La superficie lateral de una pirámide truncada recta es igual á la suma de los perímetros de las bases por la altura de una cara lateral y dividido el producto por dos:

$$SL = \frac{(P + p) \times Ap}{2}.$$

La superficie lateral de una pirámide truncada se descompone en varios trapecios y su conjunto puede formar un solo trapecio que tiene por bases los perímetros y por altura la que corresponde á una cara lateral.

La superficie total de una pirámide truncada recta es igual á la lateral más las dos bases:

$$ST = \frac{(P + p) \times Ap}{2} + B + b.$$

El volumen de una pirámide truncada es igual á la suma de los volúmenes de las tres pirámides en que se descompone

$$V=\left(\frac{B\times A}{3}\right)+\left(\frac{b\times A}{3}\right)+\left(\frac{\sqrt{(B\times b)}\times A}{3}\right).$$

En efecto, toda pirámide truncada equivale á tres pirámides de la misma altura y de bases diferentes: la primera EABC tiene la base mayor, la segunda EADF tiene una base menor, y la tercera EAFC tiene una base que es media proporcional entre las dos anteriores, ó sea la raíz cuadrada del producto de la base mayor por la menor (fig. 194).

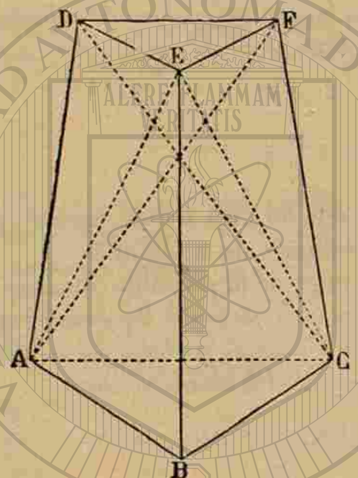


Fig. 194.

82. Superficie y volumen del cono truncado.

La superficie lateral de un cono truncado recto se obtiene de la misma manera que la de la pirámide truncada, teniendo en cuenta que las bases son círculos y los perímetros circunferencias:

$$SL=\frac{(C+c)\times Ap}{2}.$$

La razón de esta fórmula es evidente, supuesto que la superficie lateral de un cono truncado es exactamente la forma de un trapecio circular.

La superficie total de un cono truncado es igual á la lateral más las dos bases:

$$ST=\left(\frac{(C+c)\times Ap}{2}\right)+\left(\frac{C\times R}{2}\right)+\left(\frac{c\times r}{2}\right).$$

El volumen de un cono truncado se resuelve por la misma fórmula de la pirámide truncada, teniendo en cuenta la forma circular de las bases:

$$V=\left(\frac{\frac{C\times R}{2}\times A}{3}\right)+\left(\frac{\frac{c\times r}{2}\times A}{3}\right)+\left(\frac{\sqrt{\left(\frac{C\times R}{2}\right)\times\left(\frac{c\times r}{2}\right)}\times A}{3}\right).$$

83. Superficie y volumen de la esfera.

En una esfera de madera le fijaremos en un punto cualquiera un clavo de hierro.

Enrollemos alrededor del clavo un cordón hasta cubrir la mitad de la esfera.

Dividamos el cordón en dos partes iguales.

Cada mitad del cordón lo enrollaremos en espiral alrededor de un clavo sobre una mesa.

Las dos superficies circulares que resultan son iguales entre sí.

Cubriendo estas superficies con una media esfera se ve que son iguales á un círculo máximo.

Pero como son dos círculos máximos los que se formaron con el cordón, la media esfera que se envolvió mide exactamente dos círculos máximos y la esfera entera medirá cuatro círculos máximos.

Luego:

La superficie de la esfera es igual al cuádruplo de la superficie de un círculo máximo del mismo diámetro que ella:

$$S = 4 \times \left(\frac{C \times R}{2}\right).$$

Porque la superficie de toda esfera equivale exactamente á cuatro círculos máximos que es lo que indica la fórmula anterior.

El volumen de la esfera es igual á la tercera parte del producto de la superficie total por el radio:

$$V = \frac{4 \times \left(\frac{C \times R}{2}\right) \times R}{3}.$$

Porque toda esfera puede considerarse como un cono, cuya base es la superficie total de la esfera y su altura el radio de la misma.

84. Superficie y volumen de los poliedros regulares.

La superficie total de todo poliedro regular es igual al producto de la superficie de una cara por el número de caras que tenga el poliedro:

$$ST = B \times N.$$

Llamemos B la superficie de la cara y N el número de caras, y se tendrá la fórmula anterior.

El volumen de un poliedro regular se obtiene multiplicando la superficie total por el radio inscrito y dividiendo el producto por tres:

$$V = \frac{(B \times N) \times A}{3}.$$

En efecto, todo poliedro regular puede considerarse como una pirámide cuya base es su superficie total ó sea la suma de todas las superficies de sus caras, y su altura el radio inscrito ó sea una perpendicular del centro del poliedro al centro de una cara, cuya recta la designamos con la letra A en la fórmula precedente.

85. Volumen de los cuerpos de forma irregular.

Hay dos procedimiento para determinar el volumen de los cuerpos de forma irregular, y son los siguientes:

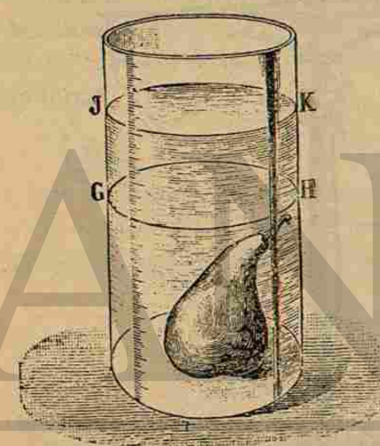
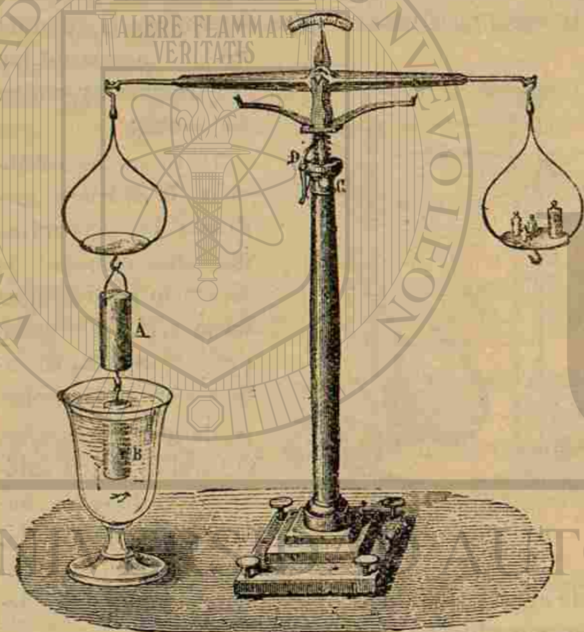


Fig. 195.

1º En un vaso cilíndrico de vidrio y graduado con determinadas dimensiones, se vierte un poco de agua hasta GH, por ejemplo; en seguida se sumerge en ella el cuerpo de forma irregular, el nivel del agua subirá naturalmente, supongamos hasta JK, claro es que el volumen de agua GHJK será el volumen del cuerpo que deseábamos medir (fig. 195).

2º El segundo procedimiento para medir el volumen de los cuerpos de forma irregular se obtiene por medio de su densidad ó peso específico.

Se llama **densidad** de un cuerpo un número que expresa cuántas veces este cuerpo es más á menos pesasado que el agua en igualdad de volumen. Así, por ejemplo, un centímetro cúbico de fierro pesa $7^{g}\,8^{dg}$. Y un centímetro cúbico de agua pesa sólo un gramo, de donde resulta que el mismo volumen tiene peso diferente, y por consiguiente el peso específico ó densidad del fierro será 7,8. (1)



Ahora bien, como la densidad sólo viene á representar el peso de un cuerpo en la unidad de volumen de

(1) Hágase la descripción de la balanza que representa el grabado y explíquese su funcionamiento.

agua que se haya elegido, claro es que repitiendo dicha cantidad tantas veces como unidades tenga el volumen, el producto nos dará el peso total de todo el cuerpo. Así tendremos que el peso de un cuerpo es el producto de su volumen por su densidad ó

$$P = V \times D.$$

Por ejemplo, sabemos que 1 centímetro cúbico de fierro pesa 7 gramos 8 decigramos, un trozo de 4 centímetros cúbicos, que es el volumen total, pesará 4 veces dicha cantidad ó sea el volumen por la densidad, en esta forma:

$$P = 4 \times 7{,}8 = 31^{gr},2.$$

De la fórmula anterior se deduce que:

El volumen de un cuerpo de forma irregular se obtiene dividiendo el peso de dicho cuerpo por su densidad:

$$V = \frac{P}{D}.$$

Ejemplo: un trozo de fierro pesa 31 gramos 2 decigramos, ¿cuál será su volumen?

Sabiendo que la densidad del fierro es 7,8, tendremos:

$$V = \frac{31.2}{7{,}8} = 4^{cm}.$$

Para obtener el volumen en centímetros cúbicos, es preciso que el peso se dé en gramos, porque 1 gramo es el peso de un centímetro cúbico de agua destilada á la temperatura de 4 grados centígrados.

Densidades de algunos cuerpos sólidos y líquidos tomado del curso de Física de Langlebert.

CUERPOS SÓLIDOS:

Platino	22,069	Zinc	6,861
Oro	19,258	Diamante	3,516
Plomo	11,352	Mármol blanco	2,837
Plata	10,474	Cristal de roca	2,653
Cobre	8,788	Azufre	2,033
Hierro	7,788	Madera de pino	0,657
Estaño	7,291	Corcho	0,240

CUERPOS LÍQUIDOS:

Mercurio	13,596	Aceite de oliva	0,915
Acido sulfúrico	1,841	Eter acético	0,890
Cloroformo	1,480	Esencia de limón	0,880
Acido clorhídrico	1,240	Esencia de trementina	0,870
Acido azótico	1,217	Aceite de nafta	0,887
Agua de mar	1,026	Alcohol absoluto	0,792
Agua á 4°	1,000	Eter sulfúrico	0,715

86. Algunas aplicaciones de la Estereometría.

1ª Ejercicios con las medidas de volumen, partiendo del metro cúbico al decímetro, al centímetro, al milímetro y al contrario.

2ª Ejercicios con las medidas de capacidad mayores y menores que el litro.

3ª Ejercicios con las medidas de peso mayores y menores que el gramo.

4ª Ejercicios de comparación de las medidas de volumen con las de capacidad y las de peso.

5ª Elevación al cubo y extracción de la raíz cúbica.

6ª Comprobación de las principales propiedades de los volúmenes.

7ª Ejemplos concretos sobre las fórmulas en la determinación de superficies laterales, totales y volúmenes de los cuerpos.

8ª Problemas para medir la capacidad de estanques, fuentes, pozos, bodegas, habitaciones, paredes, etc., etc.

9ª Problemas para medir el volumen de los cuerpos de forma irregular haciendo uso de la tabla de densidades conocida y procurar investigar otras nuevas en virtud del principio de Arquímedes.

87. Problemas y ejemplos concretos para resolver:

1º ¿Cuántos rollos de papel tapiz de diez varas de largo por 20 pulgadas de ancho se necesitan para empapelar un salón de 12 metros de largo, 6 de ancho y 8 de alto, teniendo 9 puertas de 3 metros de altura, 2 de ancho, con un semicírculo de 50 centímetros de radio, y colocándose el papel á una vara de altura sobre el suelo?

2º Teniendo una caja cúbica 4 metros por lado ¿cuántas tablas de 8 decímetros de largo y 2 de ancho se necesitarán para su construcción?

3º ¿Cuál será el volumen de una pared circular que mide 3 metros de altura y 1 metro de espesor, en el concepto que el terreno que se pretende cercar tiene 50 metros de radio?

4º ¿Cuántas hojas de lata de 5 decímetros de largo, por 4 de ancho se necesitarán para hacer un bote cilíndrico de 1 metro de altura y 40 centímetros de diámetro?

5º Un kiosko cuya base es un decágono regular, tiene un techo cónico de 5 metros de la circunferencia á la cúspide y siete metros de diámetro, ¿á cuantas hojas de zinc de 2 varas de largo y 3 cuartas de ancho equivale su superficie?

6º ¿A cuántos azulejos de un decímetro cuadrado equivaldrá la superficie interior y lateral de una paila de mampostería, cuya forma es un cono truncado, midiendo su radio mayor 3 metros y 1 metro 25 centímetros el menor?

7º ¿Cuántas cargas de maíz podrá contener una bodega que mide 15 metros de largo, 8 de ancho y 7 de altura? El cuartillo de maíz mide 150 pulgadas cúbicas.

8º Una fuente tiene 5 metros de radio y 2 de profundidad; ¿cuántos barriles de agua cabrán en ella y cuánto importarán á centavo el barril? Un cuartillo para líquidos mide 36 pulgadas cúbicas.

9º ¿Cuántas toneladas pesará un trozo de jabón contenido en una gran paila que tiene la forma de una pirámide cuadrangular truncada de 5 metros de altura, midiendo el lado de la base mayor 4 metros y 2 el lado de la base menor, en el concepto de que un cuartillo de jabón fundido pesa 14 onzas?

10º Un botellón esférico de 1 metro de diámetro está lleno de vino, ¿cuántas botellas de cuartillo y medio podrá contener?

11º Averiguar la superficie de la Tierra, su volumen y su peso, suponiendo que fuera una esfera hueca llena de agua á la temperatura de cuatro grados del termómetro centígrado (1).

Ejercicios y observaciones.—76. Comprobación de las propiedades de los volúmenes enunciados en este número.—77. Hágase intuitivamente la demostración de las fórmulas relativas al prisma rectangular.—78. Considerado el cilindro como un prisma de infinitas caras, su estudio debe seguir después del poliedro anterior.—79. Explicación y aplicaciones de las fórmulas de la pirámide.—80. El cono considerado como una pirámide de infinitas caras.—81. Explicación y aplicaciones de las fórmulas de la pirámide truncada.—82. Hágase lo mismo con el cono truncado.—83. Explicación y aplicaciones de las fórmulas de la esfera.—84. Los poliedros regulares pueden considerarse como un conjunto de pirámides para determinar su volumen.—85. Explicación del principio de Arquímedes, métodos que se emplean para buscar la densidad de los cuerpos.—86. Insistir mucho sobre todas las aplicaciones de la Estereometría con diversos ejercicios y ejemplos.—87. Procure el profesor que todos los problemas al resolverlos se razonen suficientemente.

(1) Advertimos aquí una vez por todas, que intencionalmente no hemos querido aceptar en todas las fórmulas contenidas en esta obra ninguna regla algebraica, porque creemos que los alumnos pueden confundirse, y deseando evitar confusiones, las hemos transformado sin alterar el fondo en otras equivalentes, separándonos de la rutina en provecho de los niños de de tierna edad, para quienes escribimos.

Cuestionario.—¿Cuáles son las propiedades generales de los volúmenes?—¿Cuáles son las propiedades especiales de los ángulos diedros?—Los ángulos triedros.—Los ángulos poliedros.—¿Qué clase de superficies regulares pueden formar un ángulo triedro?—¿Qué clase de superficies regulares y cuántas pueden formar un ángulo poliedro?—¿Cuál es el límite ó el valor que deben tener todos los ángulos planos que concurren en el vértice de un ángulo triedro ó poliedro?—¿Qué combinaciones de superficies regulares iguales que concurren en un punto pueden sumar 360 grados exactos?—¿Cómo se averigua el número total de caras, aristas ó puntos que tiene un poliedro regular?—¿Cómo se obtiene la superficie lateral y total de un prisma?—Su volumen.—La superficie lateral y total del cilindro y su volumen.—Superficies y volúmenes de la pirámide.—Del cono.—De la pirámide truncada.—Del cono truncado.—De la esfera.—Superficie y volumen de los poliedros regulares.—¿Qué procedimientos se conocen para obtener el volumen de los cuerpos de forma irregular?—¿En qué consiste el procedimiento del vaso graduado?—¿El procedimiento del peso específico ó sea de la densidad de los cuerpos?

APENDICE.

POTENCIAS Y RAICES INTUITIVAS.

De nuestra obra sobre "Metodología de la Aritmética," página 116, en el Capítulo XV, intitulado: *Los problemas trascendentales*, extractamos lo siguiente:

El carácter distintivo y fundamental de los problemas *trascendentes* está indicado en las dos proporciones siguientes:

1ª Conocida la longitud de una línea recta, determinar la superficie del cuadrado ó el volumen del cubo geométricos correspondientes.

2ª Conocida la superficie de un cuadrado ó el volumen de un cubo determinar la longitud del lado del cuadrado ó del cubo geométricos correspondientes.

Para calcular la superficie del cuadrado ó el volumen del cubo, conociendo la longitud del lado correspondiente, se emplean los procedimientos geométricos adoptados para la medición del paralelógramo cuadrado, y para la medición del prisma cuadrangular cúbico respectivamente.

Para calcular la longitud del lado de un cuadrado ó de un cubo, conociendo la superficie ó el volumen correspondientes, se emplean los procedimientes de extracción de la raíz cuadrada y cúbica respectivamente.

En los ejemplos siguientes precisaremos el carácter peculiar de estos problemas.

Primer ejemplo.—Un patio de forma cuadrada mide 6 metros lineales por lado; ¿cuántos metros cuadrados medirá su superficie?

Para la solución de este problema se emplean los siguientes procedimientos.

1º Como todo cuadrado geométrico tiene sus cuatro lados iguales y sus cuatro ángulos rectos, es claro que tomando como base un solo lado, podrán colocarse en él 6 metros cuadrados, y colocando esta faja 6 veces cubriremos la superficie total del cuadrado; pero como cada faja tiene 6 metros y se necesitan 6 fajas iguales, se obtendrá como resultado final: $6 \times 6 = 36$ metros cuadrados de superficie.

2º Todo cuadrado geométrico puede descomponerse en cuadrados parciales ó en paralelógramos rectángulos, según que la longitud del lado del cuadrado la consideremos en su totalidad ó en un número cualquiera de partes iguales ó desiguales:

1º Si el lado 6 metros lo descomponemos en seis unidades:

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6,$$

la superficie resultará descompuesta en 36 cuadrados iguales ó sean 36 metros cuadrados.

2º Si lo descomponemos en

$$1 + 1 + 1 + 1 + 2 = 6,$$

ó sean cinco partes, obtendremos 25 figuras geométricas de las cuales son 16 cuadrados de un metro por lado, 8 paralelógramos de dos metros por uno y 1 cuadrado de dos metros por lado: total, 36 metros cuadrados de superficie.

3º Si lo descomponemos en cuatro partes:

$$1 + 1 + 2 + 2 = 6,$$

resultarán 16 figuras geométricas: 4 cuadrados de un metro por lado, 4 cuadrados de dos metros por lado y 8 paralelógramos de un metro por dos; total, 36 metros cuadrados.

4º Si lo descomponemos en tres partes:

$$1 + 2 + 3 = 6,$$

resultarán 9 figuras geométricos: 3 cuadrados de uno, dos y tres metros por lado respectivamente; 2 paraleló-

gramos de uno por dos, 2 de uno por tres y 2 de dos por tres; total, 36 metros cuadrados.

5º Si lo descomponemos en dos partes:

$$2 + 4 = 6,$$

resultarán 4 figuras geométricas: 1 cuadrado de dos por dos, 1 cuadrado de cuatro por cuatro y 2 paralelógramos iguales de dos por cuatro; total, 36 metros cuadrados de superficie, según se observa en el grabado, que podrá servir también para comprobar todas las observaciones precedentes.

Este modo de formación del cuadrado es el más aceptado de todos, y se usa para los números mayores de diez, los cuales se descomponen en decenas y unidades, resultando la siguiente fórmula:

$$d^2 + 2du + u^2$$

decenas cuadradas, más doble producto de decenas por unidades, más unidades cuadradas.

Con lo expuesto queda probado que todo cuadrado ó segunda potencia de un número, es un cuadrado geométrico, compuesto de figuras cuadradas y rectangulares.

Segundo ejemplo.—Una plaza de forma cuadrada, mide 625 metros cuadrados de superficie; se desea saber ¿cuál será la longitud de uno de sus lados?

Para resolver este problema hay que descomponer la superficie total de la plaza en cuatro figuras geométricas: dos cuadrados de tamaño diferente y dos paralelógramos iguales. El cuadrado mayor está formado por las decenas cuadradas, y en el presente caso, dicho cuadrado es mayor que 100 y menor que 900; si fuera 100, el lado del cuadrado sería una decena ó 10; si fuera 900 el cuadrado, sería su lado 3 decenas ó 30; pero 100 es menor que 625 y 900 es mayor; luego el lado del cuadrado no debe ser ni 1 ni 3 decenas, sino la decena intermedia entre ambas, es decir, la decena 2 ó sea su equivalente

20 unidades. Pero como el cuadrado de 20 mide 400 metros cuadrados, es claro que en los 225 metros cuadrados restantes están contenidos el segundo cuadrado y los dos paralelógramos que faltan.

Para averiguar la longitud del lado del segundo cuadrado ó sea la cifra de las unidades, hay necesidad de observar la cifra terminal de la derecha de los cuadrados de los diez primeros números. Se notan los siguientes hechos: terminan en 1 los cuadrados de 1 y 9; terminan en 4 los cuadrados de 2 y 8; termina en 5 el cuadrado de 5; terminan en 6 los cuadrados de 4 y 6; terminan en 9 los cuadrados de 3 y 7, y terminan en 0 el cuadrado de 10 y sus múltiplos. Ningún cuadrado se observa que termine en las cifras 2, 3, 7 y 8. Ahora bien, aplicando estas observaciones al número 625 ó al 225 restante, notamos desde luego que su cifra terminal es 5, luego el número que sirvió para formar el cuadrado respectivo debe ser necesariamente el número 5, y por consecuencia el segundo cuadrado será 25 metros cuadrados de superficie, que disminuídos del 225, quedarán 200 metros cuadrados, cuya cantidad representa las superficies de dos paralelógramos iguales de 100 metros cuadrados cada uno y de 20 metros por 5, que son las dos partes en que se descompuso la longitud 25, que mide cada lado de la plaza.

La serie de operaciones verificadas para resolver el segundo problema es lo que se llama la extracción de la raíz cuadrada, que consiste en ir restando parcialmente del cuadrado cada una de sus partidas: decenas cuadradas, doble producto de decenas por unidades y unidades cuadradas.

Tercer ejemplo.—Un estanque de forma cúbica mide 6 metros de profundidad; se desea saber ¿cuántos metros cúbicos medirá el volumen?

Este problema puede resolverse empleando los dos procedimientos siguientes:

1º Todo cubo geométrico está terminado por seis caras cuadradas iguales, perpendiculares entre sí; por consiguiente, en la base podrán colocarse 36 metros cúbicos y cuya capa, repitiéndola 6 veces, llenará totalmente el volumen del estanque ó sean $36 \times 6 = 216$ metros cúbicos de volumen.

2º Todo cubo geométrico se descompone en cubos y en prismas cuadrangulares de base cuadrada. En el problema que venimos estudiando, pueden hacerse cinco descomposiciones diferentes, según que la longitud del lado del estanque lo consideremos dividido en seis, cinco, cuatro, tres ó dos partes, del modo siguiente:

1º En 6 partes: $1+1+1+1+1+1$, el volumen será de 216 cubos de un metro por arista.

2º En cinco partes: $1+1+1+1+2$, el volumen será de 125 cuerpos: 64 cubos de un metro por arista, 48 prismas de un metro cuadrado por base y dos de altura, 12 prismas de 4 metros cuadrados de base y uno de altura, 1 cubo de dos metros de arista.

3º En 4 partes: $1+1+2+2$, el volumen será de 64 cuerpos: 8 cubos de uno por arista, 24 prismas de un metro cuadrado de base por dos de altura, 24 prismas de cuatro metros de base por uno de altura, 8 cubos de dos por arista.

4º En 3 partes: $1+2+3$, el volumen será de 27 cuerpos: 3 cubos de uno, dos y tres metros por arista, 3 prismas de cuatro metros cuadrados de base por uno de altura, 3 de nueve por uno, 3 de uno por dos, 3 de uno por tres, 3 de nueve por dos, 3 de cuatro por tres, 6 de uno por dos y por tres.

5º En 2 partes: $2+4$, el volumen será de 8 cuerpos: 2 cubos de dos y cuatro metros por arista, 3 prismas de cuatro por cuatro (1), 3 prismas de diez y seis por dos.

Este modo de formación del cubo, es el más aceptado de todos y se usa para los números mayores de diez, los cuales se descomponen en decenas y unidades, resultando la siguiente fórmula:

$$d^3 + 3d^2u + 3du^2 + u^3$$

decenas cúbicas, más triple producto de decenas cuadradas por unidades, más triple producto de decenas por unidades cuadradas, más unidades cúbicas.

Queda probado que todo cubo ó tercera potencia de un número, es un cubo geométrico compuesto de cuerpos cúbicos y prismáticos rectangulares.

Cuarto ejemplo.—Un depósito de agua de forma cúbica tiene 2744 metros cúbicos de volumen: se desea saber ¿cuál será su profundidad?

Para resolver este problema hay que descomponer el volumen 2744 metros cúbicos en ocho cuerpos geométricos: dos cubos de tamaño diferente, tres prismas iguales

(1) Por una coincidencia la superficie de la base 4 coincide con la altura también 4, dando lugar á la formación de cubos, debiendo ser prismas; pero si en vez de $2+4$ que da origen á dicha coincidencia se consideran como partes $2+1$, el resultado sería forzosamente como sigue: 8 cuerpos: I un cubo de 1 m. cúb.: II un cubo de 8 m. cúb.; III, IV y V 3 prismas iguales de $1\times1\times2$ ó sean 6 m. cúb ; VI, VII y VIII tres prismas iguales de $2\times2\times1$ ó sean 12 m. cúb. Total: $1+8+6+12=27$ m. cúb. Obsérvese la figura 192 de esta obra.

que tengan como base las decenas cuadradas y como altura las unidades, y otros tres prismas, también iguales, cuyas bases sean las unidades cuadradas y como altura las decenas.

El mayor de los cubos contenidos en dicho volumen, está formado por las decenas cúbicas; si fuera 1 decena ó 10 unidades, el cubo sería 1000; si fueran dos decenas ó 20 unidades, el cubo sería 8000; pero este segundo número es mayor que 2744, luego no podrán ser dos decenas la primera parte de la arista, sino una sola ó sean simplemente diez unidades. Ahora bien, el cubo de 10 es 1000, restándolo de 2744 quedan 1744 metros cúbicos, en cuya cantidad están contenidos los siete cuerpos geométricos que faltan.

Para averiguar la longitud de la arista del segundo cubo ó sea el más pequeño, representado por las unidades cúbicas, hay necesidad de observar la cifra terminal de la derecha de los cubos de los diez primeros números; se notan los siguientes hechos: el cubo de 1 termina en 1, el de 2 en 8, el de 3 en 7, el de 4 en 4, el de 5 en 5, el de 6 en 6, el de 7 en 3, el de 8 en 2, el de 9 en 9 y el de 10 en 0. No hay dos cubos que terminen en la misma cifra. Aplicando estas observaciones al número 2744 ó á la resta 1744, se notará que la cifra terminal es 4; luego la cifra que sirvió para formar el segundo cubo, será necesariamente el número 4 y su volumen será de 64 metros cúbicos, que disminuídos de 1744 quedarán 1680 metros cúbicos, cuya cantidad representa los seis prismas restantes.

De estos seis prismas, tres miden 100 metros cuadrados de base por 4 metros de altura, ó sean 400 metros cúbicos de volumen por cada prisma, y por los tres son 1200 metros cúbicos, que disminuídos de 1680 quedan 480 metros cúbicos de los últimos tres prismas, que miden cada uno 16 metros cuadrados de base y 10 metros de altura ó sean 160 metros cúbicos de volumen, haciendo un total de 480 metros cúbicos que disminuídos de 480 no queda nada. La profundidad del estanque es, pués, de $10+4=14$ metros lineales.

El conjunto de todas las operaciones anteriores empleadas para resolver el cuarto problema, es lo que se llama la extracción de la raíz cúbica, que consiste en ir restando parcialmente del cubo, cada una de sus partidas: decenas cúbicas, triple producto de las decenas cuadradas por las unidades, triple producto de las decenas por las unidades cuadradas y unidades cúbicas.

FIN.

INDICE.

SEGUNDA PARTE.

Longimetría.—Planimetría—Estereometría.

1.ª DIVISIÓN—Longimetría.

2.ª DIVISIÓN—Planimetría.

3.ª DIVISIÓN.—Estereometría.

ARTICULOS PEDAGOGICOS

Por JULIO S. HERNANDEZ.

Esta importante obra de consulta para los Maestros de las Escuelas Primarias de la República, es una colección de 36 estudios pedagógicos bastante extensos sobre la educación del hombre, según el criterio filosófico reinante, el concepto científico de la Escuela y su alta misión en la vida moderna; la disciplina escolar en sus más elevadas funciones, hasta descender á los actos más insignificantes de la conducta humana; la metodología general y especial de cada asignatura comprendiendo el método, procedimiento, forma y modo de cada conocimiento científico, artístico é industrial; la organización escolar en todos sus más minuciosos detalles; la formación y división de programas escolares en meses hasta descender al esquema de la lección práctica; enumeración de todas las deficiencias actuales de nuestras escuelas primarias y medios de corregirlas; ideales pedagógicos de la futura escuela mexicana; doctrinas especiales del autor sobre la reforma pedagógica en lo que se refiere á métodos y procedimientos para la enseñanza del cálculo, el lenguaje y las nociones científicas; descripción de los métodos y procedimientos aceptados hoy en el Distrito Federal; legislación escolar vigente, precedida del decreto que creó al Consejo Superior de Educación y el discurso inaugural del Sr. Subsecretario de Instrucción Pública, Lic. D. Justo Sierra, etc.

Basta la enunciación de estos asuntos para demostrar la gran trascendencia de la obra; pero sólo hemos querido hacer de ella una síntesis muy ligera; en el índice general hay más estudios que hemos omitido, y en el curso de la obra abundan los detalles que son siempre de capital importancia para la consulta diaria de los Maestros, para la cultura de los padres de familia en sus relaciones con la Escuela, y para la ilustración de los hombres que tengan ó quieran tener ingerencia alguna en los asuntos de la enseñanza pública.