Ejercicios y observaciones. —45. Procure el Profesor demostrar intuitivamente las propiedades contenidas en este párrafo. —46. Ejercicios prácticos sobre medición de líneas y explicación de las medidas lineales. —47. Demostración intuitiva de las propiedades de los ángulos —48. Mídanse ángulos con el transportador y si hubiere grafómetro mídanse en el terreno.—49 Ejercicios demostrativos de las propiedades de la circunferencia sin recurrir á combinaciones algebraicas.—50. Hágase práctico el procedimiento que en este párrafo se indica.—51. Busque el Profesor innumerables ejemplos prácticos sobre las aplicaciones de la Longimetría. —52. El Profesor debe aquí limitarse á ayudar á los alumnos en la resolución de los problemas.

Cuestionario. —¿Cuáles son las principales propiedades de la línea recta?—¿Qué medidas se usan para la medición de longitudes?—¿Cómo se mide una línea recta? —¿Cuántos ángulos rectos suman los ángulos trazados sobre una recta ó alrededor de un punto?—¿A qué se llaman ángulos iguales, complementarios y suplementarios?—¿Qué clases de ángulos se forman en dos líneas paralelas cortadas por una oblicua? —¿Cuáles son los ángulos alternos-internos, alternos-externos y correspondientes?—¿Qué cosa es medir un ángulo?—¿Cómo se divide toda circunferencia? ¿Qué son los grados, minutos y segundos y cómo se escriben? ¿A qué se llama transportador y para qué sirve?—¿Qué cosa es el grafómetro, para qué sirve y cómo se usa?—¿Qué clase de ángulos se pueden formar con las rectas que se relacionan con la circunferencia?—¿Cómo se miden todos estos ángulos?—¿Cuáles son las principales propiedades de la circunferencia y de las rectas que con ella se relacionan? —¿Cómo se mide la longitud de una circunferencia?—¿Cuál es la fórmula que se usa?—¿Cómo se obtiene la longitud del diámetro y del radio?

2ª DIVISION.

PLANIMETRIA.

CAPITULO IX.

CONSTRUCCIÓN DE SUPERFICIES.

Sumario: —53. Construcción de triángulos —54. Construcción de cuadriláteros.—55. Trazo de polígonos irregulares: iguales, semejantes y equivalentes.—56. Construcción de polígonos regulares.—57. Construcción de polígonos regulares inscritos. —58. Construcción de polígonos estrellados.—59. Trazo de superficies de perímetro redondo: óvalo, huevo y elipse.

53. En la construcción de los triángulos se presentan los siguientes casos:

1º **Dada la recta** AB **construir un triángulo equilátero**. Con un radio igual á dicha recta y haciendo centro en sus extremos, se trazan los arcos que se cortan en el punto D, el cual se une por medio de rectas con los puntos A y B, y se tendrá la construcción que se pide (fig. 130).

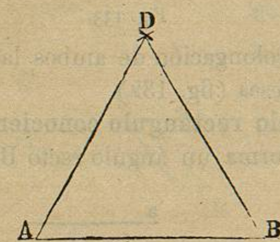

Fig. 130.

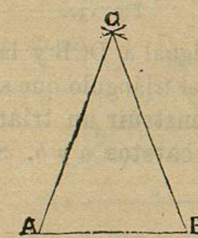

Fig. 131.

2º **Tazar un triángulo isósceles conociendo el lado menor y uno de los iguales.** Siendo A B el lado menor, se hace centro respectivamente en cada uno de sus extremos y con una medida igual al lado A C de los lados iguales se trazan los arcos que se cortan en el punto C que es el tercer vértice del triángulo pedido (figura 131).

3º **Construir un triángulo isósceles dada la base** *a* y el ángulo opuesto á ella *b*. Se traza una recta indefinida AB, se toma de ella BC $=a$; en el punto C se traza la recta CE de manera que tenga con la otra la abertura del ángulo *b*, se divide el ángulo ECB en dos mitades con la bisectriz CD, en el extremo B se traza otro

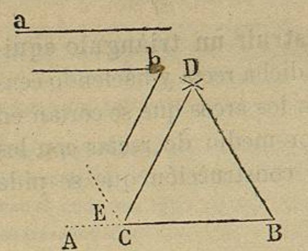

Fig. 132.

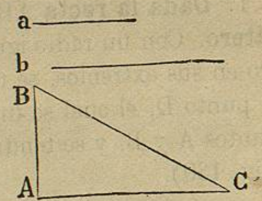

Fig. 133.

ángulo igual á DCB y la prolongación de ambos lados cerrará el triángulo que se desea (fig. 132).

4º **Construir un triángulo rectángulo conociendo los dos catetos** *a* y *b*. Se forma un ángulo recto BAC

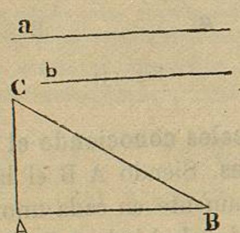

Fig. 134.

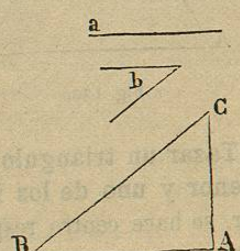

Fig. 135.

con los dos catetos dados, en seguida se traza la hipotenusa y quedará resuelto el problema (fig. 133).

5º **Construir un triángulo rectángulo dada la hipotenusa** *a* **y un cateto** *b*. Se traza un ángulo recto CAB, el lado AB se hace igual al cateto dado, y desde el punto B como centro tomando como radio la hipotenusa se corta el otro cateto en el punto C y quedará construído el triángulo (fig. 134).

6º **Dado un cateto** *a* **y un ángulo agudo** *b* **en un extremo, construir el triángulo rectángulo correspondiente.** Se traza una recta AB igual al cateto dado, se levanta en cualquiera de sus extremos una perpendicular y en el otro un ángulo igual al lado, se prolongan en seguida ambas líneas hasta que se corten en el punto C y quedará resuelto el problema (fig. 135).

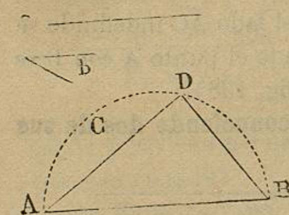

Fig. 136.

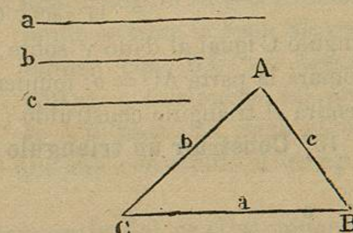

Fig. 137.

7º **Construir un triángulo rectángulo conociendo la hipotenusa** *a* **y un ángulo agudo** *b*. Se traza la recta AB igual á la hipotenusa *a*, y sobre ella como diámetro se describe una semicircunferencia ACB, en seguida se traza en uno de sus extremos, por ejemplo en A, el ángulo dado cuya segunda línea se prolonga hasta que corte en D á la semicircunferencia, se une este punto con B y se tendrá construído el triángulo (fig. 136).

8º **Dadas las rectas** *a*, *b* **y** *c* **construir un trángulo-**

lo. Se traza la recta CB $= a$ y haciendo centro en C con un radio igual á b, se traza un arco de círculo en la parte superior, después se hace centro en B y con un radio igual á c se traza otro arco para cortar al primero, el punto de intersección será el tercer vértice del triángulo Para que este problema sea posible, es necesario que el mayor de los lados sea menor que la suma de los otros dos (fig. 137).

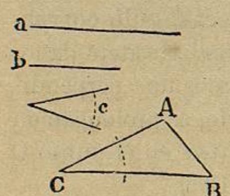

Fig. 138.

9º **Construir un triángulo dados dos lados a y b y el ángulo c comprendido entre ellos.** En la recta CB $= a$ se construye el ángulo C igual al dado y sobre el lado AC indefinido se tomará la parte AC $= b$; reuniendo el punto A con B se tendrá el triángulo construído (fig. 138).

10º **Construir un triángulo conociendo dos de sus**

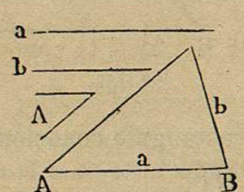

Fig. 139.

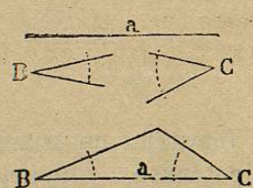

Fig 140.

lados a y b y el ángulo A opuesto á uno de ellos. Se traza un ángulo igual al dado A, se toma sobre uno de sus lados una distancia igual al lado b propuesto y desde el extremo B como centro y con un radio igual al lado a opuesto, se traza el arco de círculo que intercepta el

tercer lado del triángulo que será el vértice buscado (fig. 139).

11º **Construir un triángulo conociendo un lado a y los dos ángulos de sus extremos.** De los extremos de la línea dada a como vértice, se construyen los ángulos dados C y B, se prolongan los otros dos lados hasta que se cortan en el punto A que se busca (fig. 140).

12º **Construir un triángulo conociendo un lado a, un ángulo b en el extremo y otro c opuesto á dicho lado.** Se traza la recta AB $= a$ y por el punto B la recta BC para formar el ángulo B; por el mismo punto se traza la recta BD para formar con BC un ángulo CBD $= c$, finalmente del punto A se traza una recta AC paralela á BD con la cual quedará construído el triángulo deseado (fig. 141).

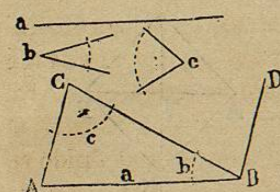

Fig. 141.

13º **Construir un triángulo del cual se conoce la**

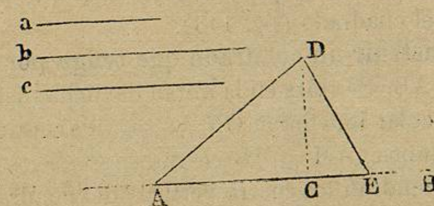

Fig. 142.

altura a, la base b y uno de los otros dos lados c. Se traza una recta indefinida AB y en un punto cualquiera de ella C se levanta una perpendicular $CD = a$; desde el punto D como centro y con una abertura de compás igual á c se corta la recta AB en el punto A y desde este punto en la misma recta con la distancia $AE = b$ se encontrará el otro vértice del triángulo pedido (fig. 142).

54. En la construcción de los cuadriláteros se presentan los casos siguientes:

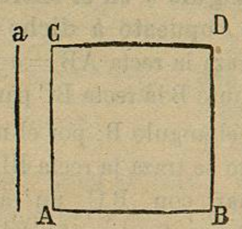

Fig. 143.

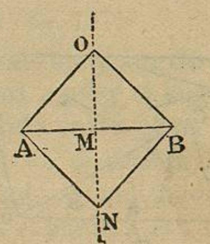

Fig. 144.

1º **Construir un cuadrado conociendo el lado** a. Se traza un ángulo recto CAB cuyos lados sean iguales á la recta a con la misma medida y haciendo centro en C y B se trazan dos arcos que se cortan en D que es el cuarto vértice del cuadrado (fig. 143).

2º **Construir un cuadrado que tenga por diagonal la recta** AB. Se traza en la mitad de dicha diagonal una perpendicular indefinida ON; en seguida desde el punto M la distancia $AM = MB$ se transporta á los puntos O y N y se tendrán los cuatro vértices del cuadrado (figura 144).

3º **Construir un paralelógramo rectángulo conociendo su altura** a **y su base** b. Se traza un ángulo recto CAB con las dos rectas dadas, se trazan dos arcos que

se cortan en D partiendo del punto B con la distancia a y del punto C con la distancia b y quedarán determinados todos sus vértices (fig. 145).

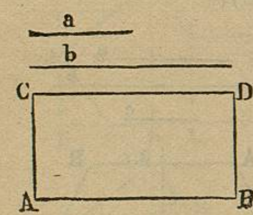

Fig. 145.

4º **Conociendo la diagonal** a **y un lado** b **construir un paralelógramo rectángulo.** Se traza un triángulo rectángulo CAB de manera que su cateto AB sea igual al lado b y su hipotenusa BC igual á la diagonal a; en seguida se trazan las paralelas correspondientes á los lados AC y AB y quedará resuelto el problema (fig. 146).

5º **Construir un romboide conociendo los lados** a **y** b **y el ángulo** c **que forman.** Se traza un ángulo CAB

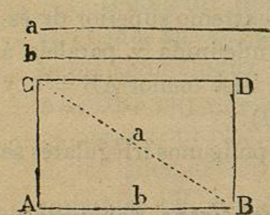

Fig. 146.

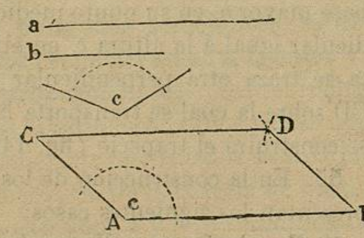

Fig. 147.

igual al dado de manera que sus lados AC y AB sean respectivamente iguales á las rectas b y a, en seguida se determina el punto D y quedará resuelto el problema (fig. 147).

El rombo se construye de la misma manera.

6º **Construir un paralelógramo conociendo sus dos diagonales** a **y** b **y el ángulo** c **que forman.** Se trazan dos rectas que se corten entre sí y que formen un ángulo igual á *c*, en seguida se dividen en dos partes iguales las dos diagonales y se transportan respectivamente sus mitades desde el punto O á los puntos A, B, C y D que son los vértices que se buscan (fig. 148).

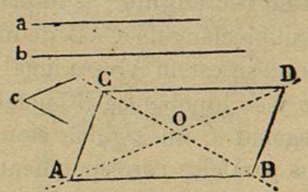

Fig. 148.

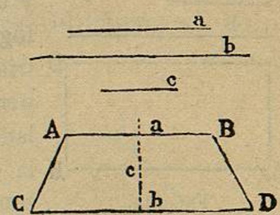

Fig. 149

7º **Construir un trapecio, conociendo sus dos bases *a* y *b* y su altura *c*.** Se traza la recta CD igual á la base mayor *b*, en su punto medio se levanta una perpendicular igual á la altura *c*, en el extremo superior de ésta se traza otra perpendicular indefinida y paralela á CD sobre la cual se transporta la base menor AB = *a* y se construirá el trapecio (fig. 149).

55. En la construcción de los polígonos irregulares se presentan los siguientes casos:

1º **Construir un polígono igual á otro.** Supongamos que se desea construir un polígono igual al designado con las letras ABCDEF, se comienza por bajar perpendiculares de todos sus vértices al lado inferior prolongándolo en caso de que fuere necesario, en seguida se traza una recta GJ = *gj*, se marcan en ella los puntos G, E, H, I, F y J; y sobre ellos se levantan tantas perpendiculares cuantas hay en la primera figura, y con las mis-

mas dimensiones hasta obtener los puntos A, B, C y D que después se unen con rectas hasta construir el polígono que se desea (fig. 150).

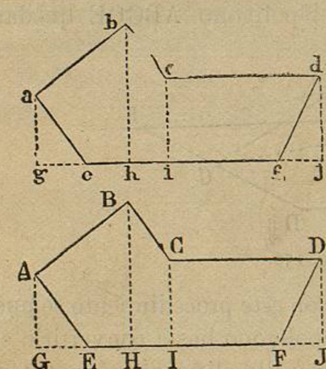

Fig. 150.

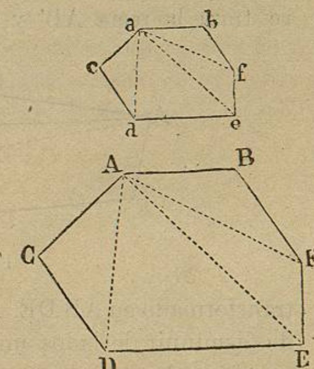

Fig. 151.

2º **Construir dos polígonos semejantes, es decir, con todos sus ángulos respectivamente iguales y sus lados homólogos proporcionales.** Sea el polígono ABCDEF cuyos lados dividiremos en dos partes iguales para construir otro semejante cuyos lados sean la mitad de los lados del primero. Se traza la recta *ab* igual á la mitad de AB, en sus extremos *a* y *b* se trazan los ángulos respectivamente iguales á A y B, se traza la recta *ac* igual á la mitad de AC y *bf* igual á la mitad de BF, y se continúa de la misma manera hasta terminar el polígono (fig. 151).

3º **Construir un polígono equivalente á otro de un lado menos, es decir que tenga la misma superficie aunque sea de forma diferente.** Supongamos el polígono ABCDE, por el punto A se traza la diagonal AC y por el punto B se traza una paralela á dicha diagonal hasta que encuentre en B′ la prolongación del lado DC, se traza la recta AB′ y el polígono ABCDE quedará

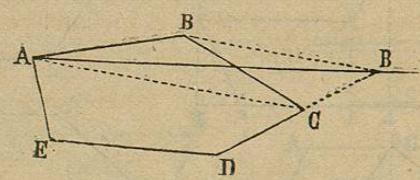

Fig. 152.

transformado en AB′DE. Con este procedimiento se puede disminuir de lados un polígono hasta convertirlo en un triángulo y sin que por ello disminuya su extensión (fig. 152).

56. En la construcción de los polígonos regulares se presentan los casos siguientes:

1º **Construir un pentágono cuyo lado sea igual á la recta** AB. Haciendo centro en los puntos A y B, con una abertura igual á dicha recta se trazan dos circunferencias; sus puntos de intersección C y D se unen por medio de una recta indefinida en su parte superior; del punto C como centro se traza un arco FHG; de los pun-

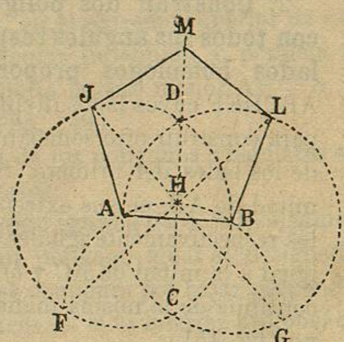

Fig. 153.

tos de dicho arco F y G se trazan dos rectas que pasan por el punto H hasta tocar la circunferencia en los puntos J y L; estos puntos se unen con A y B y se tendrá tres lados del pentágono; con la misma medida se obtiene el vértice M que es el último que se busca (fig. 153).

2º **Dada la recta** AB **como lado, construir un exágono.** Con una medida AB igual á la recta dada se tra-

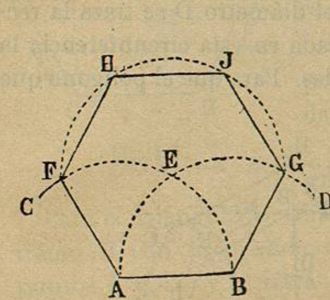

Fig. 154.

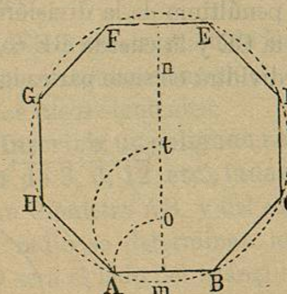

Fig. 155.

zan dos arcos BC y AD; en el punto E y con el mismo radio se traza otro arco en la parte superior del cual se obtienen las intersecciones F y G; con la misma medida se trazan los puntos H y J y se tendrá el hexágono pedido (fig. 154).

3º **Construir un octágono regular que tenga por lado la recta** AB. En el punto medio de la recta AB se levanta una perpendicular indefinida *mn;* con el radio *m*B desde *m* se traza el arco A*o*, desde *o* con el radio *o*B el arco A*t*; desde *t* con el radio B*t* se describe una circunferencia la cual contendrá ocho veces el lado AB y quedará construído el octágono regular ABCDEFGH (fig. 155).

4º **Dada una recta cualquiera N, construir un polígono regular de cualquier número de lados.** Supongamos que se trata de construir un heptágono; se traza una circunferencia cualquiera cuyo diámetro AB se divide en siete partes iguales; de los extremos A y B con una abertura de compás igual al diámetro, se describen dos arcos que se corten en el punto C; de este punto al penúltimo de la división del diámetro D se traza la recta CE y la cuerda BE colocada en esta circunferencia la dividirá en siete partes iguales. Para que el polígono que

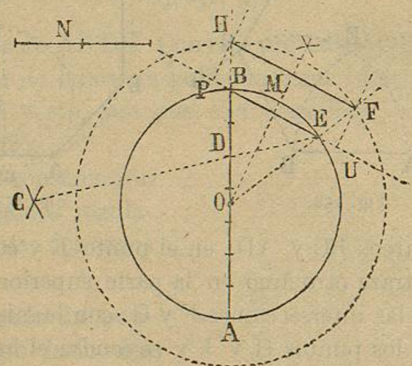

Fig. 156.

se desea construir, sus lados tengan las dimensiones de la recta N se procede como sigue: la cuerda BE se divide en dos mitades por medio de la perpendicular OM; desde el punto M y con una medida igual á la mitad de la recta N se trazan dos arquitos que determinan con la prolongación de la cuerda BE los puntos P y U; desde estos puntos se trazan dos perpendiculares PH y UF,

las cuales se cortan por medio de la prolongación del radio OB hasta H y del radio OE hasta F; desde el centro O se describe una circunferencia con cualquiera de dichos radios prolongados y la cuerda HF = N será el lado del heptágono que se desea (figura 156).

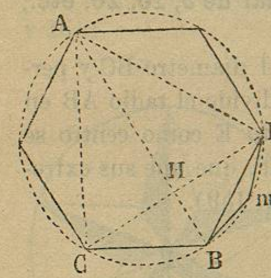

Fig. 157.

57. En la construcción de los polígonos regulares inscritos se dan los casos siguientes:

1º **Inscribir un polígono regular de 3, 6, 12, etc., lados.**

Para el triángulo se traza un diámetro AB, y del extremo B con la medida del radio se determinan los puntos C y D, y la recta CD será el lado del triángulo (fig. 157).

Para el polígono de seis lados basta trazar en la circunferencia seis veces la medida del radio ó sea la cuerda BD que es el lado del hexágono.

Para el de doce lados se divide el arco del hexágono en dos mitades, y una de ellas *mD* será el lado que se desea.

El mismo procedimiento se emplea en los polígonos de 24, 48, etc., lados.

2º **Inscribir un polígono regular de 4, 8, 16, etc., lados.**

Para el de cuatro lados basta trazar dos diámetros perpendiculares y uniendo sus extremos por rectas iguales á AB, quedará inscrito el cuadrado (fig. 158).

El de ocho lados se forma con la mitad BD del arco que corresponde al cuadrado. Los de 16, 32, etc., lados se forman de la misma manera.

3º **Inscribir un polígono regular de 5, 10, 20, etc., lados.**

Para el de cinco lados se traza el diámetro BC y perpendicular á él el radio AD; se divide el radio AB en dos partes iguales, y desde el punto E como centro se describe el arco DF y la recta DF, que une sus extremos será el lado del pentágono (fig. 159).

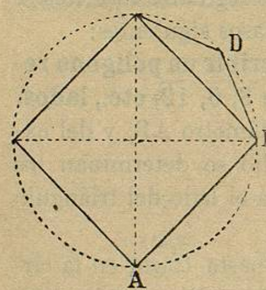

Fig. 158.

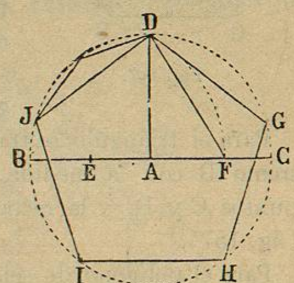

Fig. 159

Los de 10 lados, 20, 40, etc., se forman tomando la mitad del arco del polígono de 5, 10, etc.

4º **Inscribir un polígono regular de un número cualquiera de lados.**

Este problema se puede resolver siguiendo el procedimiento indicado en el párrafo 4º del número 56.

Para el de 7 lados puede construirse también tomando la mitad de la cuerda que corresponde al triángulo. Para el de 9 tomando la tercera parte del arco que corresponde á la misma figura, etc. Así pueden construirse muchos polígonos derivándolos de los ya conocidos.

58. Los polígonos regulares estrellados se forman uniendo por medio de cuerdas sus vértices de dos en dos ó de tres en tres en los polígonos inscritos (figs. 160 y y 161).

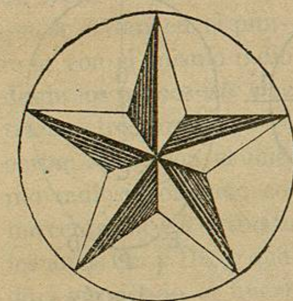
Fig. 160

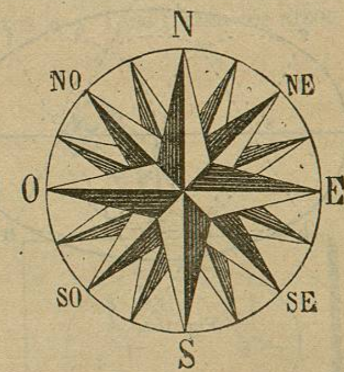

Fig. 161.

59. Trazo de las superficies de perímetro redondo: óvalo, huevo y elipse.

1º **Construcción del óvalo.** Se traza la recta indefinida *ab*, se miden en ella cuatro distancias iguales *as*, *st*, *tx* y *xb*; con una de estas medidas como radio se describen tres circunferencias cuyos centros son *s*, *t* y *x*; se trazan las rectas *gh*, *gn*, *cd* y *df* que pasan por cada centro y los puntos de intersección de las circunferencias; estas rectas se cortan en *g* y en *d* que sirven de nuevos centros, desde los cuales con un radio igual á una de ellas, por ejemplo *cd*, se trazan los arcos *cf* y *hn*, y quedará construído el óvalo (fig. 162).

2º **Construcción del huevo.** Se traza la recta AB y desde el punto medio O se describe una semicircunferencia AMB, se traza después una perpendicular MP sobre la cual se toma la distancia OC igual á OB, el pun-

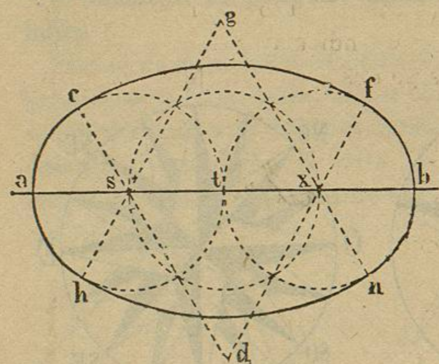

Fig. 162.

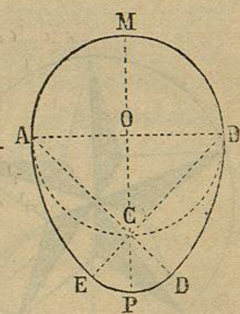

Fig. 163.

to C se une con A y B por medio de rectas indefinidas; con un radio AB y desde los puntes A y B se describen los arcos AE y BD: por último desde C con un radio CE se traza el arco EPD y quedará formado el huevo (figura 163).

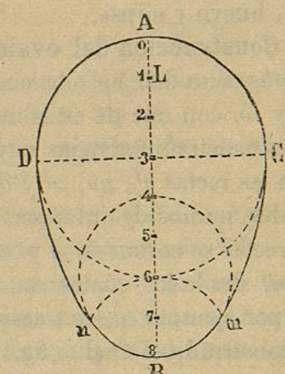

Fig. 164.

Otro procedimiento. Sobre la recta indefinida AB se trazan ocho distancias iguales; en el punto 3 como centro, con un radio 3A, se traza una circunferencia; desde el punto

6, con un radio 6B, se traza una segunda circunferencia menor que la primera; con un radio 6B desde el punto B se traza un arco que determina los puntos *m* y *n;* se traza un diámetro DC perpendicular á la recta AB, con un radio *ab* desde los puntos *n* y D se trazan los arcos que se cortan en el punto *b*; con el mismo radio desde los puntos *m* y C se trazan otros arcos que se cortan en *a;* con el mismo radio y tomando como centros *a* y *b* se trazan los arcos C*m* y D*n*, y quedará terminado el huevo (fig. 164).

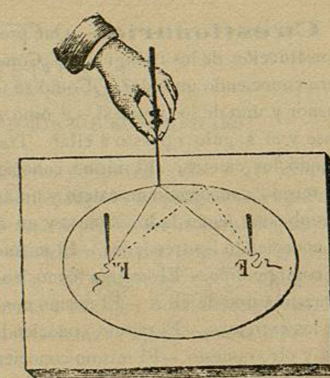

Fig 165.

3º **Trazo de la elipse.** El procedimiento más sencillo para trazar una elipse es el siguiente: se fijan en los focos F y F′ dos clavitos ó alfileres en los cuales se ata un hilo ó cordón cuya longitud sea igual al eje mayor; en seguida, por medio de un lápiz se atiranta dicho hilo y se describe la curva que deberá ser una elipse, puesto que la suma de dos de sus radios vectores será siempre igual al eje mayor (fig. 165).

Ejercicios y observaciones. — 53. Procure el Profesor en la construcción de cada triángulo, hacer que los alumnos expliquen el fundamento del procedimiento que emplean.—54. Se hace la misma recomendación respecto de los cuadriláteros.—55. Pónganse variados ejemplos de figuras iguales, semejantes y equivalentes; ejercicios de aumento y diminución de figuras, explicación de la escala.—56. Trácense polígonos regulares de diferente número de lados y búsquese prácticamente la relación del lado del polígono con el apotema en cifras numéricas.—57. Explíquense los procedimientos seguidos en la construcción de los polígonos inscritos.—58. Háganse polígonos estrellados desde el pentágono en adelante.—59. Las construcciones del óvalo, el huevo y la elipse; si fuere posible, practíquense también en el terreno.

Cuestionario.—¿Qué problemas gráficos se presentan en la construcción de los triángulos?—¿Cómo se construye un triángulo equilátero conociendo un lado?—¿Cómo se traza el isósceles conociendo el lado menor y uno de los iguales?—¿Cómo se traza el isósceles conociendo la base y el ángulo opuesto á ella? Trazo del triángulo rectángulo conociendo los catetos. El mismo conociendo la hipotenusa y un cateto.—El mismo conociendo un cateto y un ángulo agudo en un extremo.—El mismo conociendo la hipotenusa y un ángulo agudo.—Trazar un triángulo conociendo los tres lados.—El mismo conociendo dos lados y el ángulo comprendido.—El mismo conociendo dos de sus lados y el ángulo opuesto á uno de ellos.—El mismo conociendo un lado y los dos ángulos de los extremos.—El mismo conociendo un lado, un ángulo en el extremo y otro opuesto.—El mismo conociendo la base, la altura y otro lado.—¿Qué problemas gráficos se presentan en la construcción de los cuadriláteros? ¿Cómo se construye el cuadrado conociendo un lado?—El mismo conociendo la diagonal.—¿Cómo se construye un paralelógramo rectángulo conociendo la altura y la base?—El mismo conociendo la diagonal y un lado.—El romboide conociendo dos lados y el ángulo comprendido.—El mismo conociendo sus dos diagonales y el ángulo que forman.—El trapecio conociendo las dos bases y la altura.—¿Qué problemas gráficos se presentan en la construcción de los polígonos irregulares? ¿Qué son polígonos iguales y cómo se construyen?—¿Qué son polígonos semejantes y cómo se construyen?—¿Qué son polígonos equivalentes y cómo se construyen?—¿Qué problemas gráficos se presentan en la construcción de los polígonos regulares?—¿Cómo se construye el pentágono regular conociendo un lado? El hexágono conociendo un lado.—El octágono conociendo un lado.—Un polígono regular de cualquier número de lados, conociendo uno.—¿Qué problemas gráficos se presentan en la construcción de los polígonos inscritos?—¿Cómo se inscribe el polígono regular de 3, 6, 12, 24, etc., lados?—El polígono regular de 4, 8, 16, 32, etc., lados. El polígono regular de 5, 10, 20, etc., lados.—El polígono de cualquier número de lados.—¿Cómo se puede inscribir por otro medio el de 7, 14, etc., lados? O bien el de 9, 18, etc., lados.—¿Cómo se trazan los polígonos regulares estrellados?—¿Qué problemas gráficos se presentan en la construcción de superficies de perímetro redondo?—¿Cómo se construye el óvalo? Construya Ud. el huevo por los dos procedimientos explicados.—¿Cómo se construye la elipse?

CAPITULO X.

PROPIEDADES Y MEDICIÓN DE SUPERFICIES.

Sumario.—60. Principales propiedades de los triángulos.—61. Propiedades de los cuadriláteros.—62. Propiedades de los polígonos.—63. Propiedades del círculo y la elipse.—64. Superficie de los paralelógramos.—65. Superficie del triángulo.—66. Superficie del trapecio.—67. Superficie de los polígonos irregulares.—68. Superficie de los polígonos regulares.—69. Superficie del círculo y la elipse.—70. Principales aplicaciones de la Planimetría.—71. Problemas y ejemplos concretos.

60. Las principales propiedades de los triángulos son las siguientes: 1ª Todo triángulo tiene tres lados y tres ángulos.—2ª La suma de dos de sus lados es mayor que la longitud del tercer lado.—3ª Al mayor lado se halla opuesto el mayor ángulo y viceversa.—4ª A lados iguales se hallan opuestos ángulos iguales.—5ª La suma de los ángulos de un triángulo es igual á dos ángulos rectos ó sean 180 grados.—6ª Cada uno de los ángulos de un triángulo equilátero vale 6 grados.—7ª Un triángulo no puede tener á la vez dos ángulos obtusos, ni dos ángulos rectos, ni uno recto y otro obtuso.—8ª Las tres alturas de un triángulo correspondientes á sus tres bases respectivas se cortan en un punto interior ó exterior.