ejemplos de figuras iguales, semejantes y equivalentes; ejercicios de aumento y diminución de figuras, explicación de la escala.—56. Trácense polígonos regulares de diferente número de lados y búsquese prácticamente la relación del lado del polígono con el apotema en cifras numéricas —57. Explíquense los procedimientos seguidos en la construcción de los polígonos inscritos · 58 Háganse polígonos estrellados desde el pentágono en adelante.—59 Las construcciones del óvalo, el huevo y la elipse; si fuere posible, practíquense también en el terreno.

Cuestionario.- ¿Qué problemas gráficos se presentan en la construcción de los triángulos? - ¿Cómo se construye un triángulo equilátero conociendo un lado?—¿Cómo se traza el isósceles conociendo el lado menor y uno de los iguales? —¿Cómo se traza el isósceles conociendo la base y el ángulo opuesto á ella? Trazo del triángulo rectángulo conociendo los catetos. El mismo conociendo la hipotenusa y un cateto.—El mismo conociendo un cateto y un ángulo agudo en un extremo. - El mismo conociendo la hipotenusa y un ángulo agudo. —Trazar un triángulo conociendo los tres lados. — El mismo conociendo dos lados y el ángulo comprendido.— El mismo conociendo dos de sus lados y el ángulo opuesto á uno de ellos. – El mismo conociendo un lado y los dos ángulos de los extremos.—El mismo conociendo un lado, un ángulo en el extremo y otro opuesto. —El mismo conociendo la base, la altura y otro lado. —¿Qué problemas gráficos se presentan en la construcción de los cuadriláteros? ¿Cómo se construye el cuadrado conociendo un lado?—El mismo conociendo la diagonal. – ¿Cómo se construye un paralelógramo rectángulo conociendo la altura y la base?– El mismo conociendo la diagonal y un lado. – El romboide conociendo dos lados y el ángulo comprendido. - El mismo conociendo sus dos diagonales y el ángulo que forman —El trapecio conociendo las dos bases y la altura.—¿Qué problemas gráficos se presentan en la construcción de los polígonos irregulares? ¿Qué son polígonos iguales y cómo se construyen? -¿Qué son polígonos semejantes y cómo se construyen? – ¿Qué son polígonos equivalentes y cómo se construyen? - ¿Qué problemas gráficos se presentan en la construcción de los polígonos regulares?—¿Cómo se construye el pentágono regular conociendo un lado? El hexágono conociendo un lado. – El octágono conociendo un lado. – Un polígono regular de cualquier número de lados, conociendo uno.—¿Qué problemas gráficos se presentan en la construcción de los polígonos inscritos?—¿Cómo se inscribe el polígono regular de

3, 6, 12, 24, etc., lados? - El polígono regular de 4, 8, 16, 32, etc , lados. El polígono regular de 5, 10, 20, etc., lados. – El polígono de cualquier número de lados —¿Cómo se puede inscribir por otro medio el de 7, 14, etc., lados? O bien el de 9, 18, etc., lados. – ¿Cómo se trazan los polígonos regulares estrellados? —¿Qué problemas gráficos se presentan en la construcción de superficies de perímetro redondo?—¿Cómo se construye el óvalo? Construya Ud. el huevo por los dos procedimientos explicados. —¿Cómo se construye la elipse?

CAPITULO X.

PROPIEDADES Y MEDICIÓN DE SUPERFICIES.

Sumario.- 60 Principales propiedades de los triángulos — 61. Propiedades de los cuadriláteros. — 62. Propiedades de los polígonos.— 63 Propiedades del círculo y la elipse. - 64. Superficie de los paralelógramos. —65 Superficie del triángulo. — 66. Superficie del trapecio.- 67. Superficie de los polígonos irregulares — 68. Superficie de los polígonos regulares.— 69 Superficie del círculo y la elipse.—70. Principales aplicaciones de la Planimetría.- 71. Problemas y ejemplos concretos.

60. Las principales propiedades de los triángulos son las siguientes: 1ª Todo triángulo tiene tres lados y tres ángulos.—2ª La suma de dos de sus lados es mayor que la longitud del tercer lado.—3ª Al mayor lado se halla opuesto el mayor ángulo y viceversa.—4ª A lados iguales se hallan opuestos ángulos iguales.—5ª La suma de los ángulos de un triángulo es igual á dos ángulos rectos ó sean 180 grados. — 6ª Cada uno de los ángulos de un triángulo equilátero vale 6 grados.—7ª Un triángulo no puede tener á la vez dos ángulos obtusos, ni dos ángulos rectos, ni uno recto y otro obtuso.—8ª Las tres alturas de un triángulo correspondientes á sus tres bases respectivas se cortan en un punto interior ó exterior.

—9ª Las tres bisectrices de un triángulo se cortan en un punto interior.—10ª Todo triángulo puede considerarse como la mitad de un paralelógramo.—11ª En todo triángulo isósceles los dos ángulos del lado menor son iguales entre sí.—12ª En un triángulo rectángulo la suma de los ángulos agudos es igual á un ángulo recto.—13ª Dos triángulos que tienen una misma base y una misma altura son equivalentes.—14ª Dos triángulos son iguales cuando tienen sus tres lados respectivamente iguales.—15ª Dos triángulos son iguales cuando tienen igual un ángulo y los lados que lo forman son iguales cada uno al suyo.—16ª Dos triángulos pueden tener sus tres ángulos iguales sin ser iguales.

61. Las principales propiedades de los cuadriláteros son las siguientes: 1ª Todo cuadrilátero tiene cuatro lados y cuatro ángulos.—2ª La suma de los cuatro ángulos de un cuadrilátero vale cuatro ángulos rectos.—3ª Todo paralelógramo puede descomponerse en dos triángulos iguales.—4ª En todo paralelógramo los lados y ángulos opuestos son iguales.—5ª Las diagonales de un paralelógramo se cortan en partes mutuamente iguales.—6ª La mayor diagonal de un paralelógramo es la opuesta al mayor ángulo y viceversa.—7ª Las diagonales del cuadrado y del rombo se cortan siempre en ángulo recto.—8ª Dos paralelógramos que tienen iguales dos lados y el ángulo comprendido son iguales.—9ª Toda recta paralela á las dos bases de un trapecio divide los otros dos lados en partes proporcionales.—10ª La recta que une los medios de los dos lados no paralelos de un trapecio es igual á la semisuma de las bases, etc.

62. Las principales propiedades de los polígonos son

las siguientes: 1ª Todo polígono tiene tantos ángulos como lados tiene.—2ª Todo polígono puede descomponerse en tantos triángulos como lados tiene, siempre que todas las diagonales partan del centro á todos los vértices.—3ª Todo polígono se divide en tantos triángulos como lados tiene menos dos, siempre que sean formados por diagonales que parten de un solo vértice á los demás.—4ª En los polígonos regulares los apotemas son siempre iguales; lo mismo pasa con los radios ó rectas que parten de los vértices al centro.—5ª La suma de todos los ángulos del centro en un polígono regular vale cuatro ángulos rectos.—6ª El valor de un ángulo del centro de un polígono regular es igual al cociente que resulta de dividir el valor de cuatro ángulos rectos por el número de lados del polígono.—7ª La suma de todos los ángulos interiores de un polígono vale tantas veces dos ángulos rectos como lados tiene, menos dos.—8ª El valor de un ángulo interior de un polígono regular se obtiene dividiendo el valor de todos los ángulos juntos por el número de ángulos ó lados que tenga el polígono, etc.

63. Las principales propiedades del círculo y la elipse son las siguientes: 1ª Todo círculo puede considerarse como un polígono de infinitos lados, en el cual su perímetro es la circunferencia y su apotema es el radio.—2ª La relación que existe entre la circunferencia y el diámetro es siempre constante en todos los círculos.—3ª En toda elipse la suma de dos de sus radios vectores es igual al eje mayor.—4ª El círculo es una elipse cuyos dos focos están en el centro y por consiguiente todos sus radios vectores son iguales entre sí, etc.

64. Superficie de los paralelógramos.

La superficie de todo paralelógramo se mide multiplicando la longitud de la base por la longitud de la altura.

$$S = B \times A.$$

Examinemos la razón de esta fórmula.

En el paralelógramo **cuadrado** coloquemos la unidad de medida de superficie sobre la base, y observaremos que cabe en ella tres veces por ejemplo; si esta faja la repetimos hasta cubrir toda la superficie del cuadrado, notaremos que cabe en ella otras tantas veces como unidades tiene la altura ó sea $S = 3 \times 3 = 9$ metros cuadrados ó cualquiera otra medida superficial que se haya elegido (fig. 166).

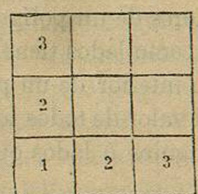

Fig. 166.

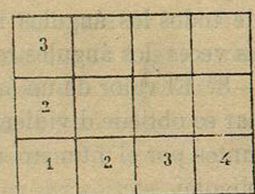

Fig. 167.

En el paralelógramo **rectángulo** se observa lo mismo que en el cuadrado, colocando en la base cuatro medidas superficiales por ejemplo; tendremos que repetir esta faja tres veces que mide la altura ó sea $S = 4 \times 3 = 12$ metros cuadrados de superficie (fig. 167).

En el paralelógramo **rombo** se medirá la superficie de un cuadrado prolongando su base inferior y bajando dos perpendiculares de su base superior; pues aun cuando

en el lado derecho se agrega un triángulo, se quita otro igual en el lado izquierdo, con lo cual queda compensada la superficie (fig. 168).

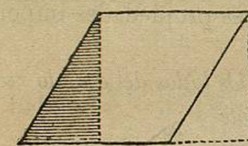
Fig. 168.

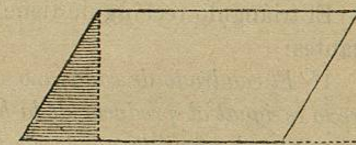
Fig. 169.

En el paralelógramo **romboide** pasa lo mismo que en el rombo, según se observa en la figura correspondiente (fig. 169).

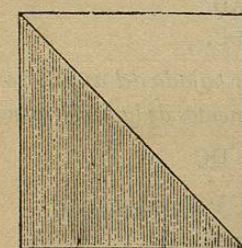
Fig. 170.

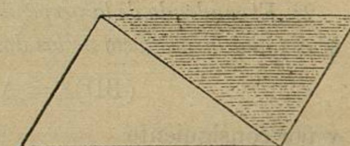
Fig. 171.

65. Superficies de los triángulos.

La superficie de un triángulo se obtiene multiplicando la longitud de la base por la longitud de la altura y dividiendo el producto por dos.

$$S = \frac{B \times A}{2}.$$

En efecto, todo triángulo es la mitad de un paralelógramo; es así que la superficie de todo paralelógramo es el producto de la base por la altura y el triángulo la mitad de un paralelógramo, luego su superficie será la mitad del producto de la base por la altura (figs. 170 y 171).

El triángulo rectángulo tiene tres propiedades importantes:

1ª *El cuadrado de cada uno de los lados del ángulo recto es igual al producto de la hipotenusa por el segmento adyacente* (figura 172).

$$(AB) = AC \times AD$$
$$(BC)^2 = AC \times DC$$

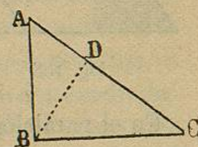

Fig. 172.

y por consiguiente

$$AB = \sqrt{AC \times AD}.$$
$$BC = \sqrt{AC \times DC}.$$

2ª *El cuadrado de la perpendicular bajada del ángulo recto es igual al producto de los dos segmentos de la hipotenusa.*

$$(BD)^2 = AD \times DC$$

y por consiguiente

$$BD = \sqrt{AD \times DC}.$$

3ª *El cuadrado de la hipotenusa en un triángulo rectángulo es igual á la suma de los cuadrados de los catetos* (figura 173).

$$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$$

y por consiguiente

$$AC = \sqrt{(AC)^2 + (BC)^2}$$
$$AB = \sqrt{(AC)^2 - (BC)^2}$$
$$BC = \sqrt{(AC)^2 - (AB)^2}.$$

Según esta última propiedad, puede fácilmente medirse la diagonal de un cuadrado cuyos dos lados son iguales (fig. 174).

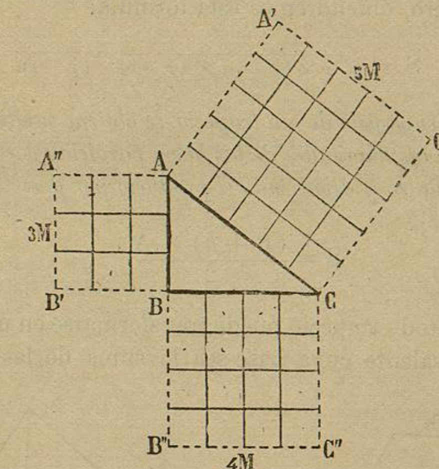

Fig. 173.

Representemos los lados AB y BC con la letra a y como $AB = BC = a$, resulta:

$$AC = \sqrt{2 \times a^2}.$$

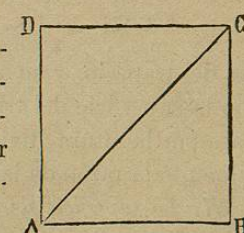

Fig. 174.

También se puede medir la superficie de un triángulo conociendo las dimensiones de sus tres lados y sin conocer la altura, por medio del siguiente procedimiento:

De la semisuma de los tres lados, se resta sucesivamente cada lado, después se efectúa el producto de ella que es el semiperímetro, por *cada una de las restas obtenidas; la raíz cuadrada de este producto es la superficie pedida.*

Supongamos que a, b y c son los tres lados y p el semiperímetro, obtendremos esta fórmula:

$$S = \sqrt{p \times (p - a) \times (p - b) \times (p - c)}.$$

66. *La superficie de un trapecio se obtiene multiplicando la suma de las longitudes de las bases paralelas por la longitud de la altura y dividiendo el producto por dos:*

$$S = \frac{(B + b) \times A}{2}.$$

Porque todo trapecio puede transformarse en un triángulo equivalente cuya base sea la suma de las dos ba-

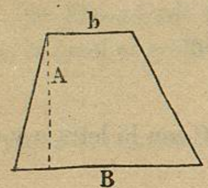

Fig. 175.

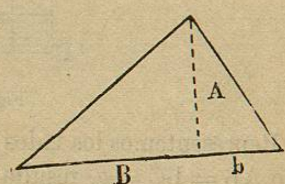

Fig. 176.

ses del trapecio, y su altura la misma del trapecio, y como la superficie del triángulo es igual al producto de la base por la altura dividido por dos, se comprenderá fácilmente la razón de la fórmula anterior (figs. 175-176).

67. *La superficie de un polígono irregular se mide dividiéndolo en triángulos y calculando la superficie de todos y cada uno de ellos. La suma total será la superficie pedida* (fig. 177).

68. Superficie de los polígonos regulares.

La superficie de un polígono regular se mide multiplicando el perímetro por el apotema y dividiendo el producto por dos:

$$S = \frac{P \times Ap}{2}.$$

Porque todo polígono regular se descompone en varios triángulos iguales y el conjunto puede considerarse co-

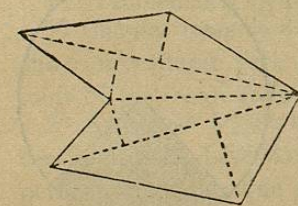
Fig. 177.

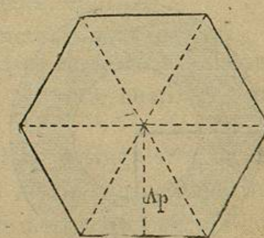

Fig. 178.

mo un solo triángulo cuya base es el perímetro y su altura el apotema, de donde resulta la fórmula precedente (fig. 178).

69. Superficie del círculo y la elipse.

La superficie de un círculo se obtiene multiplicando la longitud de la circunferencia por el radio y dividiendo el producto por dos:

$$S = \frac{C \times R}{2}.$$

Porque todo círculo puede considerarse como un polígono de infinitos lados en que la circunferencia representa al perímetro y el radio al apotema, lo cual demuestra claramente la fórmula.

La superficie de una corona circular se obtiene buscando la diferencia de las superficies de los dos círculos (fig. 179).

La superficie de un sector de círculo se obtiene multiplicando la longitud del arco de círculo por el radio y dividiendo el producto por dos (fig. 180).

La superficie de la elipse se obtiene multiplicando el producto de los dos semi-ejes por la cantidad 3,1416.

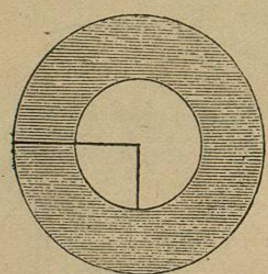

Fig. 179.

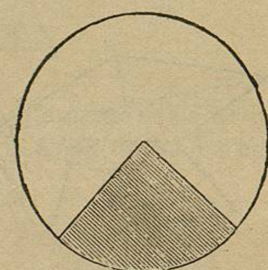

Fig. 180.

Supongamos que a y b representan los ejes, tendremos:

$$S = \frac{a \times b}{4} \times \pi.$$

70. Algunas aplicaciones de la Planimetría.

1ª Háganse ejercicios de las medidas de superficie, precisando las relaciones que existen entre la hectárea, el área, la centiárea, el decímetro, centímetro y milímetro cuadrados.

2ª Ejercicios sobre elevación al cuadrado y extracción de la raíz cuadrada.

3ª Comprobación de las propiedades de los triángulos, los cuadrilateros, los polígonos, el círculo y la elipse.

4ª Tomar datos por medio de la escala, de bases, alturas, apotemas, radios, etc., en las figuras geométricas con el objeto de medir sus superficies.

5ª Ejercicios diversos sobre la aplicación de las fórmulas para la determinación de superficies por medio de ejemplos concretos.

6ª Determinar el número de ladrillos, losas, viguetas, azulejos, etc., que entran en toda clase de superficies planas: pavimentos, techos, paredes, etc.

71. Problemas y ejemplos concretos para resolver:

1º Cuántas losas de 8 decímetros de largo y 5 de ancho se necesitarán para enlosar un patio cuadrado que mide 25 metros de cada lado.

2º Averiguar á cuántos ladrillos triangulares de 20 centímetros de base por 15 de altura equivale una superficie triangular que mide 15 metros de base y 10 de altura.

3º Cuántos vidrios de medio metro cuadrado se necesitarán para un tejado compuesto de cuatro superficies: dos trapecios y dos triángulos; siendo cada base mayor de los primeros 12 metros, cada base menor 10 metros, la altura 6 metros; y la base de los segundos de 8 metros, ignorándose la altura.

4º Cuántas fanegas de sembradura de maíz de un doceavo de caballería podrán sembrarse en un terreno de forma pentagonal, que mide por el Norte 2,500 metros; por el Este 1,025, por el Sur 3,500 y por el Oeste 2,000. El ángulo comprendido entre Norte y Oeste es de 100 grados, entre Oeste y Sur 80 grados y entre Sur y Este 150 grados.

5º Cuántos metros de tela de 8 decímetros de ancho se necesitarán para formar un toldo octagonal de forma regular, midiendo cada lado 5 metros.

6º Calcular la superficie de una corona circular, cuyo círculo menor mide 12 metros de diámetro, siendo la anchura de la corona de 4 metros, é investigar después á cuántos azulejos pentagonales de un decímetro por lado equivale su superficie.

Ejercicios y observaciones. 60. Compruébense ó demuéstrense por medios intuitivos ó gráficos, según la mayor ó menor dificultad que presenten todas las propiedades de los triángulos.—61. Hágase lo mismo con los cuadriláteros.—62. Practíquense varios ejercicios con las propiedades de los polígonos.—63. Recordación general de las propiedades de la circunferencia y explicación de las del círculo y la elipse.—64. Demostración intuitiva de la superficie del paralelógramo y ejemplos diversos.—65. Lo mismo con el triángulo, trazos de alturas, división de paralelógramos en triángulos, dado el triángulo formar el paralelógramo, ejemplos diversos sobre la aplicación de las propiedades del triángulo rectángulo, aplicación de la fórmula del triángulo en función de sus tres lados.—66. El trapecio, ejemplos concretos y explicación de la fórmula.—67. Mídanse varios polígonos irregulares y transfórmense en otros equivalentes.—68. Mídanse polígonos regulares averiguando el valor del apotema.—69. Ejemplos diversos sobre superficies circulares y elípticas.—70. Háganse aplicaciones concretas de todos estos ejercicios.—71. Resolución de estos problemas con el auxilio del profesor.

Cuestionario.—¿Cuáles son las principales propiedades de los triángulos?—Respecto de sus lados.—De sus ángulos.—De sus alturas.—De sus bisectrices.—Enumere Vd. algunas propiedades especiales del isósceles y el rectángulo ó de algún otro.—¿Qué propiedades tienen comparados entre sí respecto de su igualdad, semejanza ó equivalencia?—¿Cuáles son las principales propiedades de los cuadriláteros?—Respecto de sus lados.—Respecto de sus ángulos.—¿Qué propiedades especiales corresponden á los paralelógramos?—A los trapecios.—¿Cuáles son las principales propiedades de los polígonos?—Trazando diagonales de un vértice á los demás, ó bien, del centro á todos los vértices, ¿cuántos triángulos se forman de un polígono?—¿Cuál es el valor de un ángulo en los polígonos regulares, ya sea del centro ó de un vértice?—¿Cuál es la suma de todos los ángulos de un polígono en uno y otro caso?—¿Cuáles son las principales propiedades del círculo y la elipse?—¿Cómo se mide la superficie de los paralelógramos?—¿Qué particularidad se nota en las superficies del rombo y el romboide?—¿Cómo se determina la superficie en un triángulo?—¿Cuáles son las tres propiedades importantes que tienen los triángulos rectángulos?—¿Cómo se mide la superficie de un triángulo conociendo sus tres lados?—¿Cómo se obtiene la superficie de un trapecio?—¿Cómo se mide la superficie de los polígonos irregulares?—¿Cómo se mide la superficie de los polígonos regulares?—¿Cómo se mide la superficie de un círculo?—De una corona circular ó de un sector.—De una elipse.

3ª DIVISION.

ESTEREOMETRIA.

CAPITULO XI.

CONSTRUCCIÓN DE VOLÚMENES.

Sumario.—72. Construcción de los poliedros regulares.—73. Construcción de los poliedros irregulares.—74. Construcción de los cuerpo redondos.—75. Construcción de los cuerpos mixtos.

72. Para construir los poliedros regulares se procede de la manera siguiente:

1º El **tetraedro** se forma con un triángulo equilátero ABC, se dividen sus tres lados en dos partes iguales y con los puntos *a*, *b* y *c* se construye el triángulo interior *abc*, en seguida se da un doblez en las líneas *ab*, *ac* y *bc*, hasta reunir en un solo punto los vértices A, B y C y quedará construído el tetraedro (fig. 181).