CAPITULO XII.

PROPIEDADES Y MEDICIÓN DE LOS VOLÚMENES.

Sumario.—76. Propiedades generales de los volúmenes.—77. Superficie y volumen del prisma.—78. Superficie y volumen del cilindro.—79. Superficie y volumen de la pirámide. 80. Superficie y volumen del cono.—81. Superficie y volumen de la pirámide truncada.—82. Superficie y volumen del cono truncado.—83. Superficie y volumen de la esfera.—84. Superficie y volumen de los poliedros regulares.—85. Volumen de los cuerpos de forma irregular.—86. Algunas aplicaciones de la Estereometría.—87. Problemas y ejemplos concretos.

76. Algunas propiedades generales de los volumenes: 1ª Las superficies consideradas aisladamente ó combinadas entre sí tienen las mismas posiciones y combinaciones de las líneas. 2ª Un ángulo diedro tiene siempre por intersección una línea ó arista. 3ª Todo ángulo diedro tiene por medida la abertura de un ángulo lineal formado por dos perpendiculares que partan de la arista común en un mismo punto. 4ª Un ángulo poliedro se compone de tantos ángulos diedros como caras tiene. 5ª Un ángulo triedro regular tiene por intersección un punto y sólo puede formarse con tres triángulos equiláteros, tres cuadrados, tres pentágonos regulares; pero nunca con polígonos regulares de mayor número de lados. 6ª Un ángulo poliedro regular tiene también por intersección un punto y sólo puede formarse por cuatro ó cinco triángulos equiláteros; pero nunca por mayor número de triángulos, ni mucho menos por polígonos regulares de mayor número de lados. 7ª La suma de los ángulos planos que concurren en el vértice de un ángulo triedro ó poliedro es siempre menor que cuatro ángu-

los rectos. 8ª Las únicas combinaciones de polígonos regulares que suman 360 grados son de seis triángulos, de cuatro cuadrados y de tres hexágonos. 9ª El número de vértices ó ángulos poliedros de un poliedro regular se obtiene multiplicando el número de ángulos de cada cara por el número de caras que tiene el cuerpo y se divide el producto por el número de caras que concurren á cada vértice. 10ª El número total de aristas de un

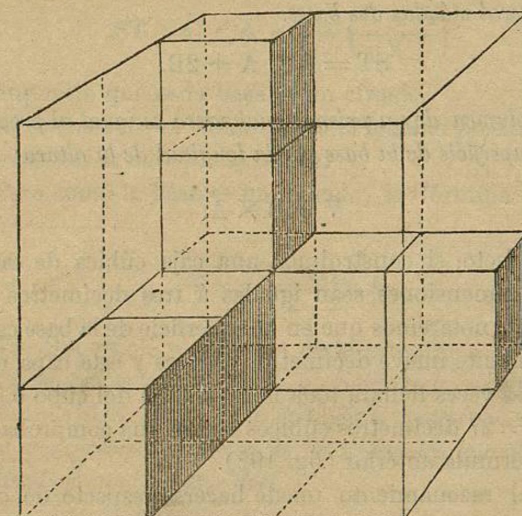


Fig. 192.

poliedro regular se obtiene multiplicando el número de lados de una cara por el número de caras de que está formado y el producto se divide por dos, etc.

77. Superficie y volumen del prisma.

La superficie lateral de un prisma recto se mide multiplicando el perímetro de la base por la altura:

$$SL = P \times A.$$

Porque la superficie lateral de todo prisma se desenvuelve en un paralelógramo rectángulo, cuya base es el perímetro y su altura la misma del prisma.

La superficie total de un prisma recto es igual á la superficie lateral más las dos bases:

$$ST = P \times A + 2B.$$

El volumen de un prisma cualquiera es igual al producto de la superficie de la base por la longitud de la altura:

$$V = B \times A.$$

En efecto, si construimos una caja cúbica de cartón cuyas dimensiones sean iguales á tres decímetros por ejemplo, notaremos que en la superficie de la base caben exactamente nueve decímetros cúbicos y esta capa repetida tres veces llenará toda la capacidad del cubo ó sean $9 \times 3 = 27$ decímetros cúbicos que es una comprobación de la fórmula anterior (fig. 192).

Igual razonamiento puede hacerse respecto de cualquier paralelipípedo ó cualquier prisma cuyas bases tengan mayor número de lados.

78. Superficie y volumen del cilindro.

La superficie lateral de un cilindro recto se obtiene multiplicando la circunferencia de la base por la altura.

En efecto, el cilindro puede considerarse como un prisma de infinitas caras, siendo sus bases dos círculos

paralelos y sus perímetros circunferencias; por consiguiente su superficie lateral es también la de un paralelógramo rectángulo cuya base es la circunferencia y la altura la misma del cilindro.

La fórmula quedará de la manera siguiente:

$$SL = C \times A.$$

La superficie total de un cilindro recto es igual á la lateral más las dos bases.

$$ST = C \times A + 2 \times \left(\frac{C \times R}{2}\right).$$

Supuesto que cada base es un círculo.

El volumen de un cilindro recto es igual al producto de la superficie de la base por la altura.

Pero como la base es un círculo, la fórmula quedará así:

$$V = \left(\frac{C \times R}{2}\right) \times A.$$

79. Superficie y volumen de la pirámide.

La superficie lateral de una pirámide recta se obtiene multiplicando el perímetro de la base por el apotema, ó sea la altura que corresponde á uno de los triángulos laterales, y dividiendo el producto por dos:

$$SL = \frac{P \times Ap}{2}.$$

Porque la superficie lateral de toda pirámide recta es la suma de todos los triángulos en que se descompone, con los cuales resulta un sólo triángulo que tiene por base el perímetro y por altura el apotema.

La superficie total de una pirámide recta es igual á la superficie lateral más la de la base:

$$ST = \frac{P \times Ap}{2} + B.$$

El volumen de una pirámide es igual al producto de la superficie de la base por la altura dividido por tres:

$$V = \frac{B \times A}{3}.$$

Porque toda pirámide puede considerarse como la tercera parte de un prisma de la misma base y altura, ó bien un prisma puede descomponerse en tres pirámides equivalentes (fig. 193).

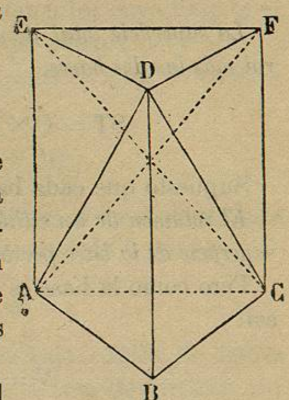


Fig 193.

80. Superficie y volumen del cono.

La superficie lateral de un cono recto se obtiene multiplicando el perímetro de la base por el apotema ó generatriz, ó sea la recta trazada de la cúspide á cualquier punto de la circunferencia.

Es exactamente el mismo procedimiento que para la pirámide, puesto que el cono puede considerarse como una pirámide de infinitas caras, cuya base es un círculo y su perímetro una circunferencia. La fórmula quedará modificada de este modo:

$$SL = \frac{C \times Ap}{2}.$$

La superficie total de un cono recto es igual á la lateral más la de la base:

$$ST = \left(\frac{C \times Ap}{2}\right) + \left(\frac{C \times R}{2}\right).$$

El volumen de un cono es igual al producto de la base por la altura y dividido por tres:

$$V = \frac{\frac{C \times R}{2} \times A}{3}.$$

Los fundamentos de esta fórmula son los mismos que se dieron respecto del volumen de la pirámide.

81. Superficie y volumen de la pirámide truncada.

La superficie lateral de una pirámide truncada recta es igual á la suma de los perímetros de las bases por la altura de una cara lateral y dividido el producto por dos:

$$SL = \frac{(P + p) \times Ap}{2}.$$

La superficie lateral de una pirámide truncada se descompone en varios trapecios y su conjunto puede formar un solo trapecio que tiene por bases los perímetros y por altura la que corresponde á una cara lateral.

La superficie total de una pirámide truncada recta es igual á la lateral más las dos bases:

$$ST = \frac{(P + p) \times Ap}{2} + B + b.$$

El volumen de una pirámide truncada es igual á la suma de los volúmenes de las tres pirámides en que se descompone

$$V = \left(\frac{B \times A}{3}\right) + \left(\frac{b \times A}{3}\right) + \left(\frac{\sqrt{(B \times b)} \times A}{3}\right).$$

En efecto, toda pirámide truncada equivale á tres pirámides de la misma altura y de bases diferentes: la primera EABC tiene la base mayor, la segunda EADF tiene una base menor, y la tercera EAFC tiene una base que es media proporcional entre las dos anteriores, ó sea la raíz cuadrada del producto de la base mayor por la menor (fig. 194).

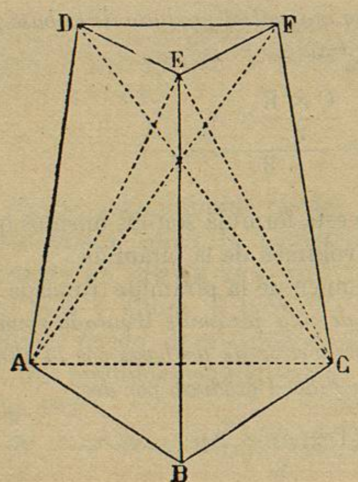


Fig. 194.

82. Superficie y volumen del cono truncado.

La superficie lateral de un cono truncado recto se obtiene de la misma manera que la de la pirámide truncada, teniendo en cuenta que las bases son círculos y los perímetros circunferencias:

$$SL = \frac{(C + c) \times Ap}{2}.$$

La razón de esta fórmula es evidente, supuesto que la superficie lateral de un cono truncado es exactamente la forma de un trapecio circular.

La superficie total de un cono truncado es igual á la lateral más las dos bases:

$$ST = \left(\frac{(C+c) \times Ap}{2}\right) + \left(\frac{C \times R}{2}\right) + \left(\frac{c \times r}{2}\right).$$

El volumen de un cono truncado se resuelve por la misma fórmula de la pirámide truncada, teniendo en cuenta la forma circular de las bases:

$$V = \left(\frac{\frac{C \times R}{2} \times A}{3}\right) + \left(\frac{\frac{c \times r}{2} \times A}{3}\right) + \left(\frac{\sqrt{\left(\frac{C \times R}{2}\right) \times \left(\frac{c \times r}{2}\right)} \times A}{3}\right).$$

83. Superficie y volumen de la esfera.

En una esfera de madera le fijaremos en un punto cualquiera un clavo de hierro.

Enrollemos alrededor del clavo un cordón hasta cubrir la mitad de la esfera.

Dividamos el cordón en dos partes iguales.

Cada mitad del cordón lo enrollaremos en espiral alrededor de un clavo sobre una mesa.

Las dos superficies circulares que resultan son iguales entre sí.

Cubriendo estas superficies con una media esfera se ve que son iguales á un círculo máximo.

Pero como son dos círculos máximos los que se formaron con el cordón, la media esfera que se envolvió mide exactamente dos círculos máximos y la esfera entera medirá cuatro círculos máximos.

Luego:

La superficie de la esfera es igual al cuádruplo de la superficie de un círculo máximo del mismo diámetro que ella:

$$S = 4 \times \left(\frac{C \times R}{2}\right).$$

Porque la superficie de toda esfera equivale exactamente á cuatro círculos máximos que es lo que indica la fórmula anterior.

El volumen de la esfera es igual á la tercera parte del producto de la superficie total por el radio:

$$V = \frac{4 \times \left(\frac{C \times R}{2}\right) \times R}{3}.$$

Porque toda esfera puede considerarse como un cono, cuya base es la superficie total de la esfera y su altura el radio de la misma.

84. Superficie y volumen de los poliedros regulares.

La superficie total de todo poliedro regular es igual al producto de la superficie de una cara por el número de caras que tenga el poliedro:

$$ST = B \times N.$$

Llamemos B la superficie de la cara y N el número de caras, y se tendrá la fórmula anterior.

El volumen de un poliedro regular se obtiene multiplicando la superficie total por el radio inscrito y dividiendo el producto por tres:

$$V = \frac{(B \times N) \times A}{3}.$$

En efecto, todo poliedro regular puede considerarse como una pirámide cuya base es su superficie total ó sea la suma de todas las superficies de sus caras, y su altura el radio inscrito ó sea una perpendicular del centro del poliedro al centro de una cara, cuya recta la designamos con la letra A en la fórmula precedente.

85. Volumen de los cuerpos de forma irregular.

Hay dos procedimiento para determinar el volumen de los cuerpos de forma irregular, y son los siguientes:

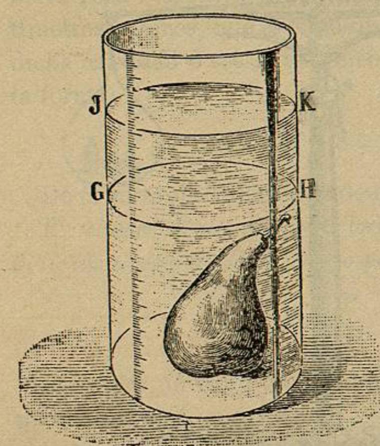
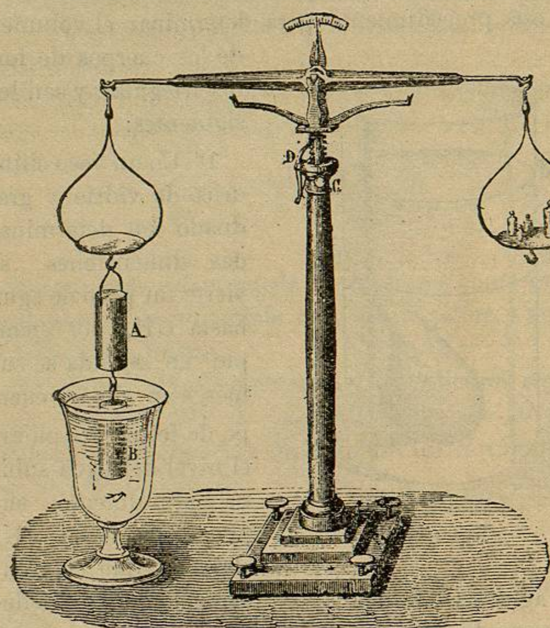


Fig. 195.

1º En un vaso cilíndrico de vidrio y graduado con determinadas dimensiones, se vierte un poco de agua hasta GH, por ejemplo; en seguida se sumerge en ella el cuerpo de forma irregular, el nivel del agua subirá naturalmente, supongamos hasta JK, claro es que el volumen de agua GHJK será el volumen del cuerpo que deseábamos medir (fig. 195).

2º El segundo procedimiento para medir el volumen de los cuerpos de forma irregular se obtiene por medio de su densidad ó peso específico.

Se llama **densidad** de un cuerpo un número que expresa cuántas veces este cuerpo es más á menos pesasado que el agua en igualdad de volumen. Así, por ejemplo, un centímetro cúbico de fierro pesa $7^{g}\,8^{dg}$. Y un centímetro cúbico de agua pesa sólo un gramo, de donde resulta que el mismo volumen tiene peso diferente, y por consiguiente el peso específico ó densidad del fierro será 7,8. (1)



Ahora bien, como la densidad sólo viene á representar el peso de un cuerpo en la unidad de volumen de

(1) Hágase la descripción de la balanza que representa el grabado y explíquese su funcionamiento.

agua que se haya elegido, claro es que repitiendo dicha cantidad tantas veces como unidades tenga el volumen, el producto nos dará el peso total de todo el cuerpo. Así tendremos que el peso de un cuerpo es el producto de su volumen por su densidad ó

$$P = V \times D.$$

Por ejemplo, sabemos que 1 centímetro cúbico de fierro pesa 7 gramos 8 decigramos, un trozo de 4 centímetros cúbicos, que es el volumen total, pesará 4 veces dicha cantidad ó sea el volumen por la densidad, en esta forma:

$$P = 4 \times 7{,}8 = 31^{gr}{,}2.$$

De la fórmula anterior se deduce que:

El volumen de un cuerpo de forma irregular se obtiene dividiendo el peso de dicho cuerpo por su densidad:

$$V = \frac{P}{D}.$$

Ejemplo: un trozo de fierro pesa 31 gramos 2 decigramos, ¿cuál será su volumen?

Sabiendo que la densidad del fierro es 7,8, tendremos:

$$V = \frac{31.2}{7{,}8} = 4^{cm}.$$

Para obtener el volumen en centímetros cúbicos, es preciso que el peso se dé en gramos, porque 1 gramo es el peso de un centímetro cúbico de agua destilada á la temperatura de 4 grados centígrados.

Densidades de algunos cuerpos sólidos y líquidos tomado del curso de Física de Langlebert.

CUERPOS SÓLIDOS:

Platino	22,069	Zinc	6,861
Oro	19,258	Diamante	3,516
Plomo	11,352	Mármol blanco	2,837
Plata	10,474	Cristal de roca	2,653
Cobre	8,788	Azufre	2,033
Hierro	7,788	Madera de pino	0,657
Estaño	7,291	Corcho	0,240

CUERPOS LÍQUIDOS:

Mercurio	13,596	Aceite de oliva	0,915
Acido sulfúrico	1,841	Eter acético	0,890
Cloroformo	1,480	Esencia de limón	0,880
Acido clorhídrico	1,240	Esencia de trementina	0,870
Acido azótico	1,217	Aceite de nafta	0,887
Agua de mar	1,026	Alcohol absoluto	0,792
Agua á 4°	1,000	Eter sulfúrico	0,715

86. Algunas aplicaciones de la Estereometría.

1ª Ejercicios con las medidas de volumen, partiendo del métro cúbico al decímetro, al centímetro, al milímetro y al contrario.

2ª Ejercicios con las medidas de capacidad mayores y menores que el litro.

3ª Ejercicios con las medidas de peso mayores y menores que el gramo.

4ª Ejercicios de comparación de las medidas de volumen con las de capacidad y las de peso.

5ª Elevación al cubo y extracción de la raíz cúbica.

6ª Comprobación de las principales propiedades de los volúmenes.

7ª Ejemplos concretos sobre las fórmulas en la determinación de superficies laterales, totales y volúmenes de los cuerpos.

8ª Problemas para medir la capacidad de estanques, fuentes, pozos, bodegas, habitaciones, paredes, etc., etc.

9ª Problemas para medir el volumen de los cuerpos de forma irregular haciendo uso de la tabla de densidades conocida y procurar investigar otras nuevas en virtud del principio de Arquímedes.

87. Problemas y ejemplos concretos para resolver:

1º ¿Cuántos rollos de papel tapiz de diez varas de largo por 20 pùlgadas de ancho se necesitan para empapelar un salón de 12 metros de largo, 6 de ancho y 8 de alto, teniendo 9 puertas de 3 metros de altura, 2 de ancho, con un semicírculo de 50 centímetros de radio, y colocándose el papel á una vara de altura sobre el suelo?

2º Teniendo una caja cúbica 4 metros por lado ¿cuántas tablas de 8 decímetros de largo y 2 de ancho se necesitarán para su construcción?

3º ¿Cuál será el volumen de una pared circular que mide 3 metros de altura y 1 metro de espesor, en el concepto que el terreno que se pretende cercar tiene 50 metros de radio?

4º ¿Cuántas hojas de lata de 5 decímetros de largo, por 4 de ancho se necesitarán para hacer un bote cilíndrico de 1 metro de altura y 40 centímetros de diámetro?

5º Un kiosko cuya base es un decágono regular, tiene un techo cónico de 5 metros de la circunferencia á la cúspide y siete metros de diámetro, ¿á cuantas hojas de zinc de 2 varas de largo y 3 cuartas de ancho equivale su superficie?

6º ¿A cuántos azulejos de un decímetro cuadrado equivaldrá la superficie interior y lateral de una paila de mampostería, cuya forma es un cono truncado, midiendo su radio mayor 3 metros y 1 metro 25 centímetros el menor?

7º ¿Cuántas cargas de maíz podrá contener una bodega que mide 15 metros de largo, 8 de ancho y 7 de altura? El cuartillo de maíz mide 150 pulgadas cúbicas.

8º Una fuente tiene 5 metros de radio y 2 de profundidad; ¿cuántos barriles de agua cabrán en ella y cuánto importarán á centavo el barril? Un cuartillo para líquidos mide 36 pulgadas cúbicas.

9º ¿Cuántas toneladas pesará un trozo de jabón contenido en una gran paila que tiene la forma de una pirámide cuadrangular truncada de 5 metros de altura, midiendo el lado de la base mayor 4 metros y 2 el lado de la base menor, en el concepto de que un cuartillo de jabón fundido pesa 14 onzas?

10º Un botellón esférico de 1 metro de diámetro está lleno de vino, ¿cuántas botellas de cuartillo y medio podrá contener?

11º Averiguar la superficie de la Tierra, su volumen y su peso, suponiendo que fuera una esfera hueca llena de agua á la temperatura de cuatro grados del termómetro centígrado (1).

Ejercicios y observaciones.—76. Comprobación de las propiedades de los volúmenes enunciados en este número.—77. Há-

(1) Advertimos aquí una vez por todas, que intencionalmente no hemos querido aceptar en todas las fórmulas contenidas en esta obra ninguna regla algebraica, porque creemos que los alumnos pueden confundirse, y deseando evitar confusiones, las hemos transformado sin alterar el fondo en otras equivalentes, separándonos de la rutina en provecho de los niños de de tierna edad, para quienes escribimos.

gase intuitivamente la demostración de las fórmulas relativas al prisma rectangular.—78. Considerado el cilindro como un prisma de infinitas caras, su estudio debe seguir después del poliedro anterior.—79. Explicación y aplicaciones de las fórmulas de la pirámide.—80. El cono considerado como una pirámide de infinitas caras.—81. Explicación y aplicaciones de las fórmulas de la pirámide truncada.—82. Hágase lo mismo con el cono truncado.—83. Explicación y aplicaciones de las fórmulas de la esfera.—84. Los poliedros regulares pueden considerarse como un conjunto de pirámides para determinar su volumen.—85. Explicación del principio de Arquímedes, métodos que se emplean para buscar la densidad de los cuerpos.—86. Insistir mucho sobre todas las aplicaciones de la Estereometría con diversos ejercicios y ejemplos.—87. Procure el profesor que todos los problemas al resolverlos se razonen suficientemente.

Cuestionario.—¿Cuáles son las propiedades generales de los volúmenes?—¿Cuáles son las propiedades especiales de los ángulos diedros?—Los ángulos triedros.—Los ángulos poliedros.—¿Qué clase de superficies regulares pueden formar un ángulo triedro?—¿Qué clase de superficies regulares y cuántas pueden formar un ángulo poliedro?—¿Cuál es el límite ó el valor que deben tener todos los ángulos planos que concurren en el vértice de un ángulo triedro ó poliedro?—¿Qué combinaciones de superficies regulares iguales que concurren en un punto pueden sumar 360 grados exactos?—¿Cómo se averigua el número total de caras, aristas ó puntos que tiene un poliedro regular?—¿Cómo se obtiene la superficie lateral y total de un prisma?—Su volumen.—La superficie lateral y total del cilindro y su volumen.—Superficies y volúmenes de la pirámide.—Del cono.—De la pirámide truncada.—Del cono truncado.—De la esfera.—Superficie y volumen de los poliedros regulares.—¿Qué procedimientos se conocen para obtener el volumen de los cuerpos de forma irregular?—¿En qué consiste el procedimiento del vaso graduado?—¿El procedimiento del peso específico ó sea de la densidad de los cuerpos?
