EDITADO POR LA
"LIBRERIA UNIVERSAL"
Federico de la Garza.

GUIA DEL MAESTRO
PARA LA ENSEÑANZA
DE LA ARITMETICA.

INDICACIONES PRÁCTICAS SOBRE LA ENSEÑANZA DE ESTA MATERIA EN EL 2° 3° Y 4° AÑOS ESCOLARES.

POR EL

Prof. Pablo Livas,

INSPECTOR DE LAS ESCUELAS PRIMARIAS DE MONTERREY.

MONTERREY.
J. CANTU LEAL - - ZARAGOZA 48.
1904.

Guía del Maestro

PARA LA ENSEÑANZA DE LA ARITMETICA.

Indicaciones prácticas

sobre la enseñanza de esta materia en el 2o 3o y 4o años escolares

POR EL

Prof. Pablo Livas,

INSPECTOR DE LAS ESCUELAS PRIMARIAS DE MONTERREY.

EDITADO POR LA

"LIBRERIA UNIVERSAL"

FEDERICO DE LA GARZA.

MONTERREY.

TIP. J. CANTU LEAL, ZARAGOZA 48.

1904.

Al Lector.

No hay libro alguno que pueda sustituir al maestro y no está escrita con tales pretensiones la presente obra.

Consiste solamente en indicaciones prácticas que, inútiles tal vez para los maestros experimentados, no salen sobrando para los principiantes, y menos aun para los que no han tenido ocasión de estudiar en una Escuela Normal los métodos de enseñanza.

Frutos son estas indicaciones de una práctica no corta en la enseñanza de la materia, y que desearíamos sirvieran de algo á los que dan los primeros pasos en la difícil senda del Magisterio.

Monterrey, Enero 14 de 1904.

Pablo Livas.

Numeración Hablada.

1° Contar con los niños hasta diez, agregando las unidades una por una, v. g., 1 más 1 igual á 2, 2 más 1 igual á 3, 3 más 1 igual á 4, etc., llamando después la atención de los niños sobre que se ha ido contando de á UNO. Conviene que ésto se haga con cubitos de madera de un centímetro, y donde el maestro carezca de ellos, con cuadros de cartón de un centímetro por lado.

2° Comparación de los diez cubos con una regla de un centímetro de sección y un decímetro de longitud, para que vean los niños que ésta se compone de DIEZ CUBOS UNIDOS. En donde no haya, el maestro presentará una cinta de papel de un centímetro de ancho y un decímetro de longitud (diez cuadros unidos.) Ejercicios con reglas ó cintas. Ejemplo: una regla tiene diez cubos, dos tienen veinte, tres, treinta, etc., hasta noventa y se llama la atención de los niños en que se va agregando de á 10.

3° Que los niños representen con los objetos anteriores, cantidades menores de cien. Ejemplo: 45, se cogen primero cuatro reglas y luego cinco cubos, haciendo que los niños se fijen en que se cuenta primero con reglas, es decir de á DIEZ, y despúes con cubos, es decir de á UNO.

4° Contar por reglas hasta cien en esta forma: una regla es igual á diez cubos, dos á veinte, tres á treinta, etc., diez reglas valen cien cubos, llamando otra vez la atención sobre que se ha ido contando de á DIEZ.

5° Comparación de las diez reglas con una tabla de un centímetro de grueso y un decímetro cuadrado de base, para que vean los niños que ésta se compone de diez reglas ó cien cubos unidos. Donde no haya lo anterior, el maestro compara con un cuadrado de cartón de un decímetro, que equivale á diez cintas ó cien cuadros pequeños.

6° Contar con tablas. Ejemplo, una tabla vale cien cubos, dos valen doscientos, tres, trescientos, etc., llamando la atención de los niños sobre que han ido contando de á cien.

6° Representar cantidades menores de mil v. g., 245, para que los niños vean que se cogen primero 2 tablas, luego 4 reglas y después 5 cubos, es decir, que se cuenta. primero de á cien, luego de á diez y al último de á uno.

8° Que los niños digan los CIENTOS, DIECES Y UNOS que hay en una cantidad dada y representada objetivamente por el maestro, v. g., en 458 hay: 4 cientos, 5 dieces y 8 unos.

9° Leer cantidades que el maestro represente objetivamente. Ejemplo: el maestro coloca 3 tablas, 6 reglas y 4 cubos; los niños leen trescientos sesenta y cuatro.

11° Recapitulación para que los niños se fijen en que se puede contar de á uno, de á diez y de á cien, haciendo que lo expresen así.

11° Aplicación de lo anterior á cantidades que el maestro dicte: ejemplo: el maestro dicta 456 y llama la atención de los niños sobre las palabras que ha pronunciado para que observen que ha dicho: primero cuatrocientos, luego cincuenta, y por último seis; y que ellos cuentan primero por cientos (4 tablas) luego por dieces, (5 reglas) y al último por unos (6 cubos.)

12° Nombres de los grupos: se pregunta á los niños como se llama un grupo de 12 nueces (12na, el maestro lo escribe en el pizarrón), el sueldo de 15 días (15na,) el de 20 (20ena), una detención de 40 días (40na), etc., pidiéndoles después que ellos mismos den nombre á la regla ó grupo de diez cubos (diezena), á la tabla ó grupo de 100 (cientena), que sustituirá después por los usuales de decena y centena.

13° Que los niños lean cantidades que el maestro represente objetivamente y que representen del mismo modo cantidades que él dicte, expresando en cada caso cuantos cientos, dieces y unos, hay en la cantidad.

Numeración Escrita.

1° Analizar cantidades que el maestro dicte: Ejemplo, el maestro dicta sin poner los objetos á la vista de los niños una cantidad (385) para que los niños encuentren que hay en ella 3 centenas, 8 decenas y 5 unidades. Cuando los niños no puedan hallar de pronto las unidades de cada órden que hay en la cantidad, se PRONUNCIA ésta por partes: 300, 80 y 5 y si aún así vacilan se hará que ellos mismos la representen con objetos (3 tablas, 8 reglas y 5 cubos), con lo que les será más fácil hallar que contiene 3 centenas, 8 decenas y 5 unidades.

2° Escribir cantidades en el orden en que se pronuncian las palabras, poniendo encima de cada número la inicial del grupo que representa: 486 se escribe así $\overset{c}{4}\ \overset{d}{8}\ \overset{u}{6}$

Que los niños lean cantidades escritas en esa forma y que escriban del mismo modo algunas que el maestro dicte. Unas y otras han de constar de centenas, decenas y unidades primero, y después de centenas y decenas, de decenas y unidades, de centenas y unidades, de puras centenas y de puras decenas.

Lo mismo pueden escribirse horizontal que verticalmente, pero llamando la atención de los niños sobre la dirección en que se escriben las palabras, se les mostrará la conveniencia de escribir los números en la misma dirección (de izquierda á derecha.)

3° Escribir, para que los niños lean, cantidades di-

versas. en una parte del pizarrón, pautada ya para las centenas, decenas y unidades, en esta forma:

Se escribe-			Se lee.
c	d	u	
2	4	8	doscientos, cuarenta y ocho
3			trescientos
	4		cuarenta
5		2	quinientos dos.

4° Hacer que los niños se fijen en que en esas cantidades, no se le ha puesto á cada número la unidad que le corresponde, porque ya está puesta arriba.

5° Llamar la atención de los niños sobre el lugar que en la pauta ocupa cada orden de unidades, para que observen que las unidades ocupan el primer lugar de la derecha, las decenas el segundo y las centenas el tercero, para que sin necesidad de inicial, ni de pauta, se sepa POR EL LUGAR el grupo de unidades á que cada cifra se refiere.

6° Escribir cantidades fuera de la pauta, poniendo la casilla desocupada cuando no hay cifra que la llene: ejemplo, 258, se lee doscientos cincuenta y ocho, 3 □ □. trescientos, 2 4 □, doscientos cuarenta, 5 □, cincuenta, 1 □ 8, ciento ocho, en que los cuadritos indican las casillas en que no hay cifras.

7° Sustituir los cuadritos ó casillas desocupadas con ceros, haciendo ver á los niños que el cero sirve para llenar las casillas desocupadas y que lo expresen así.

8° Que los niños lean cantidades que el maestro escriba, aplicando lo anterior. Cuando encuentren dificultad para leer alguna cantidad, se escribe en la pauta y luego fuera de ella.

9° Que los niños escriban cantidades, que el maestro dicte.

Cuando se equivoquen se hará también que las escriban en la pauta y luego fuera, poniendo las cifras que hayan escrito y ceros en lugar de las casillas desocupadas.

10° Que los niños analicen cantidades que el maestro y ellos escriban, diciendo las centenas, decenas, y unidades que haya en cada una.

11° Si se quiere dar á los niños idea del millar, se vale el maestro de diez tablas unidas que forman un cubo de un decímetro, y de modo análogo al anterior, les da idea del lugar que debe ocupar el millar en la escritura de cantidades.

12° Escritura y lectura de cantidades mayores que mil.

Suma.

1° Sumar objetivamente cantidades de tres cifras, de modo que al reunir las diferentes órdenes de unidades la suma no pase de diez: Ejemplo, 234 342 (se representan las cantidades con tablas, reglas y cubos.) En este caso lo mismo da empezar por reunir las tablas, reglas y cubos, que seguir el órden inverso; resultan 5 tablas, 7 reglas y 6 cubos=576.

2° Cantidades que tengan la misma condición, sumadas mentalmente, ejemplo: se escriben en el pizarrón 324 y 653; se llama la atención de los niños sobre la manera de enunciar las cantidades, para que hagan la suma mental en esta forma: trescientos y seisientos son nevecientos, veinte y cincuenta son setenta y cuatro y tres son siete=977.

Se hará que se fijen en que se han juntado primero los cientos, luego los dieces y al último las unidades.

3° Sumar por escrito cantidades en que la suma de algunas órdenes de unidades pase de diez. Ejemplo: 387 +458. Fijándose los niños en la manera cómo lo hicieron anteriormente, dirán: 3 cientos y cuatro cientos son setesientos (escriben un 7 en la columna de los cientos, pues debe advertirse que se habrán colocado una debajo de otra las dos cantidades), ochenta y cincuenta son ciento treinta; se les hace ver que nos resultó otro ciento más, luego, hay que borrar los 7 cientos para poner 8 cientos, (como además hay treinta, se escriben 3 en la columna de los dieces); contiuúan diciendo 7 y 8 son quince; se les hace ver que nos resultó otro diez más, luego, hay que borrar el 3 para poner un 4, y como ademas hay cinco unidades se escribe el 5. Fue igual á 845.

Cuando los niños no encuentren cuantos cientos y dieces hay en la suma de las decenas, se hace la operación con objetos, procediendo del mismo modo cuando no encuentren las decenas y unidades que resultan de la suma de éstas.

4° Hacer que los niños observen que para no borrar los números que se hayan ido escribiendo, CONVIENE EMPEZAR A SUMAR POR LA COLUMNA DE LAS

UNIDADES, á fin de separar DE UNA VEZ los dieces que resulten; y continuar con las decenas, separando los cientos, etc.

5° Que los niños digan por donde se empieza á sumar, qué es lo que se escribe y qué es lo que se separa ó LLEVA.

Resta.

1° Restar por escrito, cantidades en que todas las cifras del minuendo sean mayores que las del sustraendo.
Ejemplo:

$$\begin{array}{r} 895 \\ -362 \\ \hline 533. \end{array}$$

Por analogía con la suma se empezará por la derecha; pero se hará ver á los niños que lo mismo daría empezar por el otro lado.

Conviene que al hacer la resta digan los niños el nombre de las unidades que van restando (5 unidades menos 2=3, 9 decenas menos 6=3, etc.)

2° Restar OBJETIVAMENTE cantidades en que algunas cifras del minuendo sean menores que sus correspondientes del sustraendo.

Ejemplo:

$$\begin{array}{r} 825 \\ -453 \\ \hline \end{array}$$

Se representa la primera cantidad con objetos (8 tablas, 2 reglas y 5 cubos) y la segunda se apunta con cifras en el pizarón para que por ella vean los niños lo que hay que quitar.

Se empieza á hacer la operación principiando por las unidades y se hace observar á los niños que para quitar las 5 decenas se necesita cambiar una tabla ó centena por reglas (decenas) es decir SE PIDE UNA CENTENA.

Se hacen varias restas de esta clase auxiliándose con objetos y luego la misma resta en el pizarrón con cifras.

3° Restar cantidades como las anteriores sin objetos desde al principio. Cuando los niños no se acuerden del procedimiento, ejecutan la operación objetivamente y luego por escrito.

4° Restar cuando hay varios ceros en el minuendo. Se hace la operación primero con objetos, ejemplo: 600
—245.

Se cambia una tabla por 10 reglas y una regla por 10 cubos, quedando 5 tablas, 9 reglas y 10 cubos que se apuntan en esta forma:

$$\begin{array}{r} 5,9,10 \\ 6\ 0\ 0 \\ -2\ 4\ 5 \\ \hline \end{array}$$

y luego se ejecuta la operación=355.

5° Que digan los niños por donde se empieza á restar, qué se hace cuando falta en las unidades, qué cuando falta en las decenas y cuando hay ceros.

Aunque al tratar de la manera de enseñar á los niños la suma y resta, hemos empezado por proponer los casos en abstracto para evitar repetiones; debe cada uno de los casos resultar de un problema que el maestro dicte á los niños, v. g., para el primer caso de la suma el maestro dicta. "Un comerciante tenía en caja \$234 é hizo una venta por valor de \$342. ¿Cuánto completa en efectivo?

Se pregunta á los niños si después de haber vendido tendría los mismos 234 pesos que tenía, si tendrá más dinero ó menos y cuanto más, hasta llegar á que tendrá $234+342$.

Verán luego que para saber cuanto es, se necesita juntar ó sumar esas dos cantidades y que para hacer esto más fácilmente se representan ambas cantidades con objetos, etc.

Del mismo modo se procederá en los demás casos de que se ha hablado, tanto en la suma como en la resta.

Multiplicación.

1° Hacer en forma de suma una multlplicación:

$$\begin{array}{r} 326 \\ +326 \\ 326 \\ 326 \\ 326 \\ \hline = 1630 \end{array}$$

Se llamará después la atención de los niños sobre que al sumar las unidades se repite el 6 por 5 veces, en las descenas el 2 por 5 veces, en las centenas el 3 por 5 veces y en fin que la cantidad toda está tomada por 5 veces.

2° Fundándose en lo anterior se hará que los niños observen que esa operación se puede indicar en esta otra forma 326

por 5 veces.

3° Haciendo que los niños lean esta expresión se les

llevará á descubrir que hay que tomar el 6, el 2 y el 3 por 5 veces.

Se ejecutará la operación en la forma indicada, empezando por las unidades por la misma razón que en la suma: 6 unidades por 5 veces=30, se escribe 0 unidades y quedan 3 decenas, 2 decenas por 5 veces =10 y 3 son 13 decenas, se escriben las 3 decenas y queda 1 centena, etc.

Se harán varios ejercicios escribiendo siempre la operación: primero, en forma de suma; segundo, pidiendo á los niños que la escriban en la otra forma (por tantas veces) y tercero, que ejecuten la operación indicada.

Cuando ya estén diestros en la trasformación y ejecución de estas operaciones, se iran suprimiendo las palabras "por y veces" indicandolas con el signo × y se hace observar á los niños que se multiplica "siempre que se trata de tomar varias veces una misma cantidad"

4° Se llamará también la atención de los niños sobre la cantidad de cifras que hay que escribir y palabras que pronunciar en cada una de las operaciones, para hacerlos observar que "la multiplicación es una manera rápida de sumar"

5° Multiplicar una cantidad por otra de dos difras.

Ejemplo: 328
×34

Leyendo la expresión anterior se hace que se fijen los niños en que hay que tomar la cantidad por 34 veces; ellos saben tomarla por 4 veces, que hagan esa operación y se fijen en que falta tomarla treinta veces.

Se llama la atención de los niños sobre que el que tiene que contar mucho dinero, cuenta primero una pila y luego va poniendo pilas iguales para contar más aprisa y que, en lugar de APILAR treinta veces la cantidad 328, podemos APILARLA diez veces y luego tomar TRES PILAS.

Para que descubran como se multiplica una cantidad por diez, el maestro escribe en el pizarrón:

1	×	10	=	10	[el uno y un cero]
2	×	10	=	20	,, dos ,, ,, ,,
3	×	10	=	30	,, tres ,, ,, ,,
4	×	10	=	40	,, cuatro ,, ,,
9	×	10	=	90	,, nueve ,, ,,
12	×	10	=	120	,, doce ,, ,,

para que los niños vean que para multiplicar por 10 se agrega un cero.

Se procede luego á ejecutar la operación:

$$\begin{array}{r} 328[0] \\ \times 34 \\ \hline 1312 \\ 9740 \\ \hline 11052 \end{array}$$

formando primero la PILA de diez para lo cual se agrega un cero al 328, poniéndolo entre paréntisís y luego se toman 3 pilas como esa.

Se llama la atención luego sobre que en 1312 esta el 328 por 4 veces y en 9740 por 30 veces y que para tomarlo por 34 veces se juntan ambas cantidades.

6° Cuando los niños hayan adquirido destreza en estas operaciones se les hace ver que en el segundo producto

resulta siempre un o en las unidades y que lo mismo daría no escribirlo con tal que el otro número se coloque en el segundo lugar.

7° Que los niños digan por donde se empieza la multiplicación, qué se escribe, qué se lleva, cómo se multiplica por diez, qué se hace en lugar de multiplicar por 30, 40, 60 etc.

Como se dijo antes, cada caso debe resultar de un problema que el maestro haya dictado.

División.

1° Dividir entre dos una cantidad en que todas las cifras del dividendo den cociente exacto, ejemplo: 864 ÷ 2.

Los niños se fijan en el orden en que el maestro pronuncie la cantidad por dividir y hallan mentalmente que: de 800 corresponden á cada uno de los dos 400 (lo escriben así en el pizarrón), de 60 corresponden 30 (se escribe) y de 4, 2 (que también se escribe.) Ven luego que á cada uno corresponde por todo 432.

Se les llama la atención sobre que lo que resulta equivale á leer seguidos los tres resultados que hallaron, 400, 30 y 2.

2° Que hagan la misma operación escribiendo nada más, la cifra significativa 864 ÷ 2 = 4 3 2
de 8 centenas corresponden
de 6 decenas
de 4 unidades
igual á 432.

3° Hacer objetivamente una división de una cantidad en que las cifras no den cociente exacto. Ejemplo:

$736 \div 2 =$

Se representa la cantidad con 7 tablas, 3 reglas y 6 cubos. Se empieza por repartir las tablas y se ve que alcanzan á cada uno 3 y sobra una tabla, se cambia por reglas y se tienen [10 y 3] 13 reglas, alcanzan cada uno 6 y sobra una regla, se cambia por cubos y se tienen [10 y 6] 16; alcanza cada uno 8. Igual á 368.

No debe olvidarse que cada cuestión debe resultar do un problema.

Para complemento de estas indicaciones sobre la División, véase lo que sobre ésto se dice al tratar del 3er. año.

Razonamiento por conclusiones en el 2° año escolar.

El niño adquiere la idea del número en los objetos, y así nos lo recuerdan constantemente los ábacos que vemos en la escuela, y las indicaciones que hacen á cada paso los mejores pedagogos en artículos y libros, recomendando siempre que los primeros ejercicios aritméticos que se hagan con los niños sean lo más concreto posible, que al principio se ejecuten materialmente las operaciones, con canicas, palitos, monedas, puntos, cruces y rayas, etc.

Avanzando aún más en este sentido, nos parece que, si la idea del número se adquiere en los objetos, la idea de la relación que hay entre las cantidades debe adquirirse también en la forma, pues nada es tan á propósito

como el tamaño de los objetos y la distancia á que se encuentran para que los niños adquieran con exactitud el significado de la expresión de "ser una cosa ó cantidad, tantas veces mayor ó menor que otra."

Ahora bien, en esta comparación que se establece entre las cantidades se funda la resolución razonada de los problemas que se proponen á los niños, v. g.....................

3 metros de una tela valen 45 centavos, 15 metros de la misma valdrán?.......................

Los niños dirigidos por el maestro se fijan:

1° En que la cantidad de tela cuyo valor se busca es mayor que la de arriba y por tanto el importe será una cantidad mayor que 45 centavos.

2° Que la cantidad de tela es 5 veces mayor que la otra y su importe deberá serlo también $=45\times5=225$.

Lo mismo exactamente se razonará si sabiendo el valor de un metro, se busca el de 15; sólo que en este caso los niños encuentran muy fácilmente la relación pues "toda cantidad es tantas veces mayor que la unidad, como unidades tiene."

De esto podemos inferir, que el razonamiento que los niños hacen para resolver los problemas en que se procede por CONCLUSIONES, se funda en la proporcionalidad de las cantidades y en la investigación de la releción que existe entre ellas.

Es cierto que muy bien pueden resolverse los problemas de multiplicar en esta forma, v. g., si un metro de género vale 15 centavos, 9 metros valdrán 9 veces 15 centavos ó $15\times9=135$; y las de dividir en esta otra: Si 8

3° Hacer objetivamente una división de una cantidad en que las cifras no den cociente exacto. Ejemplo:

$$736 \div 2 =$$

Se representa la cantidad con 7 tablas, 3 reglas y 6 cubos. Se empieza por repartir las tablas y se ve que alcanzan á cada uno 3 y sobra una tabla, se cambia por reglas y se tienen [10 y 3] 13 reglas, alcanzan cada uno 6 y sobra una regla, se cambia por cubos y se tienen [10 y 6] 16; alcanza cada uno 8. Igual á 368.

No debe olvidarse que cada cuestión debe resultar de un problema.

Para complemento de estas indicaciones sobre la División, véase lo que sobre ésto se dice al tratar del 3er. año.

Razonamiento por conclusiones en el 2° año escolar.

El niño adquiere la idea del número en los objetos, y así nos lo recuerdan constantemente los ábacos que vemos en la escuela, y las indicaciones que hacen á cada paso los mejores pedagogos en artículos y libros, recomendando siempre que los primeros ejercicios aritméticos que se hagan con los niños sean lo más concreto posible, que al principio se ejecuten materialmente las operaciones, con canicas, palitos, monedas, puntos, cruces y rayas, etc.

Avanzando aún más en este sentido, nos parece que, si la idea del número se adquiere en los objetos, la idea de la relación que hay entre las cantidades debe adquirirse también en la forma, pues nada es tan á propósito

como el tamaño de los objetos y la distancia á que se encuentran para que los niños adquieran con exactitud el significado de la expresión de "ser una cosa ó cantidad, tantas veces mayor ó menor que otra."

Ahora bien, en esta comparación que se establece entre las cantidades se funda la resolución razonada de los problemas que se proponen á los niños, v. g......................

3 metros de una tela valen 45 centavos, 15 metros de la misma valdrán?......................

Los niños dirigidos por el maestro se fijan:

1° En que la cantidad de tela cuyo valor se busca es mayor que la de arriba y por tanto el importe será una cantidad mayor que 45 centavos.

2° Que la cantidad de tela es 5 veces mayor que la otra y su importe deberá serlo también $=45 \times 5=225$.

Lo mismo exactamente se razonará si sabiendo el valor de un metro, se busca el de 15; sólo que en este caso los niños encuentran muy fácilmente la relación pues "toda cantidad es tantas veces mayor que la unidad, como unidades tiene."

De esto podemos inferir, que el razonamiento que los niños hacen para resolver los problemas en que se procede por CONCLUSIONES, se funda en la proporcionalidad de las cantidades y en la investigación de la releción que existe entre ellas.

Es cierto que muy bien pueden resolverse los problemas de multiplicar en esta forma, v. g., si un metro de género vale 15 centavos, 9 metros valdrán 9 veces 15 centavos ó $15 \times 9=135$; y las de dividir en esta otra: Si 8 metros cuestan 96 centavos, 1 metro costará la octava parte de 96 igual á $96 \div 8 = 12$ centavos.

Esta manera de razonar, es muy sencilla y muy puesta al alcance de los niños; pero presenta varios inconvenientes que la otra no tiene:

1° Por ser tan sencilla precisamente, educa poco, ó nada para hablar con más propiedad, y acostumbrándose los niños desde el principio á decir 8 veces ésto, si el número mayor está abajo, tantas veces menos si el mayor está arriba, se convierte el razonamiento en un MECANISMO puro y rutinario, pues ni se tiene en cuenta la proporcionolidad de las cantidades para indagar si la que se busca ha de ser mayor ó menor que su semejante, ni se hace la comparación entre ellas para saber cuántas veces ha de serlo.

Este inconveniente se pone bien de manifiesto cuando los niños empiezan á resolver problemas de quebrados en el cuarto año; pues siguiendo la costumbre de no comparar, no tienen empacho en decir "si $\frac{28}{5}$ de vara de una tela valen 135 centavos, un quinto vale 5 veces menos."

Este mismo hábito de no establecer la comparación á que nos referimos, hace también que los niños se desentiendan de la especie que representa cada cantidad y no vean la necesidad de que sean de la misma, para poder razonar con ellas; así que, lo mismo que dicen que si 5 libras de arroz valen 40 centavos, una libra vale 5 veces menos, lo mismo dirán "si 5 libras valen 40 centavos, 1 arroba vale 5 veces menos, lo que indica que han aprendido una RUTINA; pero no un razonamiento."

2° Resulta deficiente, pues el niño no puede comprender de un modo claro su aplicación á todos los casos que comprende la multiplicación v. g. 10 obreros tardan 15 días en hacer un trabajo, uno cuánto tardará?

Como no se fijan en la proporcionalidad, contestan siguiendo el hábito adquirido "un hombre tarda diez veces menos" exactamente como una vara de cualquiera cosa vale 10 veces menos que 10 varas.

Tampoco pueden aplicarlo á todos los casos que comprende la división v. g., á $6 la carga de maíz ¿cuántas se compran con 48 pesos? No hay medio de hacerlos razonar cuando se ofrece un problema así, y solamente por no ser difusos no indicamos aquí las mil vacilaciones de los pobres niños y los mil errores á que van á parar en sus esfuerzos por aplicar á la cuestión, el modo de razonar á que estaban acostumbrados. Indicaremos, sí, la aplicación bien sencilla y natural del otro razonamiento:

"Si valiera 1 peso la carga se comprarían 48 cargas, valiendo 6............se comprará una cantidad de cargas 6 veces menor."

Todo ¿porqué? por que no se llama la atención en la PROPORCIONALIDAD de las cantidades, que es la que determina que clase de relación existe entre ellas, que es la que, sacada de la naturaleza de las cosas, HACE LA LUZ en el problema.

Nada más natural, en efecto, que el que trabaja más días saque más raya (en igualdad de circunstancias por supuesto) nada más natural que mucho café importe más que un poco, que un sólo individuo haga menos trabajo que muchos y tarde más tiempo que ellos para concluir una misma obra.

3° Al no aplicar razonamiento igual á los casos de multiplicar y de dividir, se hacen de estas operaciones dos diferentes, no siendo en realidad sino la misma operación invertida, como son inversas la adición y la sustracción.

Podría decirse que así no se aplica razonamiento diferente á la multiplicación y división como aseguramos; pero aunque en el fondo no sea así, en la forma es lo que sucede, pues que así como en la primera dicen, "8 veces tal cantidad" por que ven el ocho abajo, en la segunda tienden á decir "1 vez tal cantidad" por ver abajo el uno, debiéndose esta confusión como hemos dicho antes á que no se hace la comparación referida, ni se ha llamado la atención de los niños sobre la proporcionalidad de las cantidades.

4° No se presta para que los niños infieran de una manera lógica la necesidad y la conveniencia de la reducción á la unidad cuando llegan á la regla de tres, inconveniente que no presenta el otro razonamiento. Por ultimo, la manera de razonar cuya inconveniencia hemos venido mostrando, no se sigue usando cuando los niños llegan á las aplicaciones de la regla de tres; pues entónces razonan generalmente así: si para producir \$6 de interés se necesitan \$100 de capital, para producir uno se necesita un capital 6 veces menor ó $\frac{100}{6}$ y para producir 75, otro 75 veces mayor ó $\frac{100\times75}{6}$ ect. Muchas veces se acostumbran los niños á decir "6 veces más", 6 veces menos"; pero estas expresiones carecen en realidad de sentido y no se necesita demostrar la conveniencia de sustituirlas por las de "una cantidad 6 veces mayor ó 6 veces menor,, según el caso.

De todo lo dicho se desprende que el razonamiento en el cálculo por conclusiones, debe fundarse en la comparación de las cantidades con que se razona, y que, para que los niños ejecuten ese razonamiento con CONCIENCIA DE ELLO y no por un hábito mecánico, es necesario que sus juicios se base en la comparacióu que hayan hecho de las cantidades, para descubrir su relación.

¿Cómo se adquiere objetivamente la idea de esa relación y cómo se acostumbran á hallarla? A continuación indicamos los ejercicios que en la práctica nos han servido para llegar con nuestros alumnos á ese resultado:

1° Se muestran á los niños dos reglas, de las cuales una sea de doble longitud que la otra, y se les dirigen algunas preguntas acerca del largo de cada una de ellas y de las líneas que cón ellas puedan trazarse, hasta hacerlos llegar al conocimiento de que una de ellas tiene DOBLE LARGO que la otra, y que con ella se puede trazar de una vez, una línea DOBLE de la que se puede trazar con la otra.

Con dos vasos (medio litro y litro) se les puede hacer observar que á uno de ellos le cabe dos veces lo del otro, el doble, ó una cantidad de agua dos veces mayor.

Dos trozos de gis, dos saquitos con frijol, dos montones de pizarras, libros, etc., dos grupos de niños, dos distancias tomadas de puntos de la población que ellos conozcan, pueden igualmente servir para fijar el concepto de lo que es DOBLE, dando también la expresión de peso, tamaño, cantidad grupo ó distancia DOS VECES MAS GRANDE ó DOS VECES MAYOR. De igual manera y haciendo uso también de reglas, pizarras, etc., se puede dar la idea de lo que significa ser una cosa, TRIPLE, TRES VECES MAS GRANDE, ó TRES VECES MAYOR QUE OTRA, cuádruple, etc.

2° Se trazan en el pizarrón dos líneas que tengan un decímetro de longitud una de ellas y la otra dos,

———— ——1——

llamando luego la atención de los niños sobre el tamaño de ellas, para que observen que la segunda tiene DOBLE tamaño de la primera, es decir, que es DOS VECES más grande o dos veces mayor.

3° Del mismo modo se hace la comparación de la línea pequeña con otras que tengan 2, 3, 4, 5 ó más decímetros de longitud y se les hará observar que son 2, 3, 4, ó 5, veces mayores que la primera, respectivamente.

4° Se trazan en el pizarrón 2 líneas de otras dimensiones, pero que una de ellas sea múltiplo de la otra; y se hará que los niños establezcan comparaciones entre ellas, hasta hacerles ver que, para saber cuantas veces mayor es un línea que la otra, (relación entre dos líneas) se necesita ver cuantas veces cabe la más pequeña en la más grande, y que lo expresen así (tal línea es tantas veces mayor que tal otra, porque ésta cabe tantas veces en la primera)

5° Hacer el mismo ejercicio con cantidades escritas, no con cifras sino con figuras de números, ejemplo: Un

niño tiene 8 centavos y otro, 2, ¿cuál de los dos tiene mayor cantidad de dinero? Se representan en el pizarrón los 8 centavos así: oooooooo y los dos de este modo oo para que los niños hagan la comparación y si todavía se les dificulta encontrar la relación, se forman de los 8 centavos grupo de á 2 en esta forma: oo oo oo oo, para que lleguen á descubrir que el primer niño tiene una cantidad de dinero 4 veces mayor que la del segundo.

6° Comparación de cantidades abstractas, por ejemplo, 12 y 4; y una vez que los niños encuentren que 12 es tres veces mayor que 4, preguntar porqué lo aseguran así, para que al principio lo expresen de este modo "12 es 3 veces mayor que 4 porque se necesitan 4 y 4 y otra vez 4 psra llegar á 12" ó por que cabe 3 veces en el 12.

Siempre que los niños se equivoquen al encontrar la relación entre dos cantidades, se les hará que comprueben contando, para que ellos mismos descubran su error v. g., si un niño dice: "8 es 6 veces mayor que 2," se le hará que cuente en la serie del 2 hasta llegar á 8, para que vea que no es 6 sino 4 veces mayor, y luego continúe contando para que vea también que el número 6 veces mayor que 2 no es el 8; sino el 12.

7° Se dará á los niños una cantidad cualquiera para que ellos digan otra que sea cierto número de veces mayor v. g.: una cantidad 5 veces mayor que 4; los niños contestarán 20 y el maestro los invitará á que le digan cómo hicieron para encontrarla. Lo más probable es que los niños contesten que diciendo 4 y 4=8, y 4=12, y 4=16, y 4=20. El maestro dice "4 por 5 veces igual á 20."

Se continuarán poniendo ejemplos hasta que los niños observen que "para hacer mayor una cantidad se multiplica" y que si se quiere hacer 4 veces mayor se multiplica por 4, si 5 por 5 etc." Tanto en este ejercicio como en el anterior, el maestro puede ayudarse, para que los niños hagan la comprobación de sus respuestas, del ábaco, de objetos, de figuras de números y en ocasiones de cifras también.

8 ° Comparar cantidades con la unidad.

9 ° Hayar cantidades cierto número de veces mayores que la unidad.

Estos dos ejercicios resultan facilísimos para los niños y precisamente por eso deben dejarse para el último, pues empezando por ellos encuentran la relación por rutina, sin tener idea de lo que es, ni acudir por lo tanto á la comparación de las cantidades.

10 ° Dar á los niños por medio de ejemplos, idea de la proporcionalidad de las cantidades: v. g. se han puesto dos niños á arreglar un departamento; si se pusieran 4 ¿lo arreglarían más pronto? si se pusiera uno sólo ¿lo arreglaría también más pronto? entre más niños se pusieran á arreglarlo ¿se tardarían más?

Una persona desea hacer la siembra de una labor en 15 días, si quisiera terminarla en 2 días ¿ocuparía menos trabajadores ú ocuparía más? Mientras de más tiempo se disponga ¿se necesitarán más hombres ó menos?

Un comerciante compra un carro de piloncillo y otro compra dos ¿pagará mayor cantidad ó menor? Mientras mayor cantidad de piloncillo compre ¿cómo será la cantidad de dinero que deba pagar?

11 ° Proponer un problema de multiplicar. "Un niño compró 4 pliegos de papel en 2 centavos ¿cuánto deberá pagar otro niño que necesita 12 pliegos?

Que los niños dispongan el problema en esta forma:

4 pliegos valen 2 centavos
12 ,, ,, ?

El maestro preguntará:

1 ° Si la cantidad de pliegos que necesita el segundo es mayor ó menor que la del primero.

2 ° Si la cantidad de dinero que debe pagar será mayor ó menor que 2 centavos que pagó el primero.

3 ° Cuantas veces mayor es la cantidad de pliegos cuyo valor se desea saber.

4 ° Cuantas veces mayor ha de ser la cantidad de dinero, ejecutando luego la operación, pues los niños saben ya lo que debe hacerse para hacer mayor una cantidad.

Después de poner varios problemas como el anterior, para que los niños se acostumbren á hacer la comparación que les lleva á la conclusión, se pueden poner problemas en que se sepa el precio de la unidad, siendo también conveniente, para fijar mejor las ideas, preguntar qué cantidad de papel habría sido necesario comprar para que el niño hubiere tenido que pagar una cantidad de dinero 6, 8 ó 10 veces mayor.

12 ° Proponer problemas inversos v. g.

8 hombres tardan para un trabajo 7 días.
2 ,, ,, ,, el mismo ?

y razonarlos de modo análogo al anterior.

13 ° Problemas en que el multiplicando sea de varias cifras.

Aritmética para 3er. año.

1° La primera parte del programa respectivo, está constituida por "ejercicios de cálculo mental y escrito comprendiendo las cuatro operaciones fundamentales, tomándose los problemas de los casos prácticos y comunes.

Los primeros problemas que se pongan deben pues, ser simples, es decir, que comprendan una sóla operación.

Ejemplo: ¿Cuánto cobrará en un año un individuo que gana $175.00 mensuales?

¿Cuánto recorrerá por hora un tren que en 15 horas ha recorrido 945 kilómetros?

2° Para la resolución de estos problemas debe acostumbrarse á los niños á distinguir con toda claridad los datos que forman parte del supuesto, es decir de lo que se sabe, de los que se refieren al término que se busca ó que se pregunta.

Esto se consigue fácilmente, haciéndolos que se fijen en las palabras con que el maestro ha enunciado el pro-

blema: En el primero por ejemplo, se empieza diciendo: "cuánto cobrará en un año un individuo, etc., la pregunta es por tanto

en 1 año cuánto cobrará?,,

y así lo escribiran los niños.

Fijándonos en que después se dice "un individuo que gana $175.00 mensuales" venimos en conocimiento de que ya sabemos que

"en un mes gana $175.00"

Escribiendo ésto encima de la pregunta, quedan los datos del problema arreglados en esta forma:

en 1 mes gana $175.00
en 1 año ¿cuánto gana?

Aunque al principio se escriban así los datos, después se puede hacer con los números é iniciales solamente

1 m. — $175.00
1 a. — ?

3° Después se hace notar á los niños que, para poder comparar más facilmente la cantidad de tiempo, conviene que esté expresado en unidades de una misma especie, y que como un mes no se puede reducir á años hay que reducir éste á meses. El problema queda pues arreglado en esta forma:

en 1 m. gana $175.00
,, 12 ¿cuánto gana?

4° Se procede en seguida á razonar, para encontrar así la operación que debe efectuarse para hallar la solución.

En lo que se refiere al razonamiento conviene hacer que los niños se fijen:

I. En si es mayor ó menor la cantidad de tiempo escrita abajo que su correspondiente.

II. En si deberá ser mayor ó menor que la de arriba, la cantidad de dinero que resulte como sueldo por ese tiempo.

III, En cuantas veces mayor que un mes, es la cantidad de tiempo,

IV. En cuantas veces mayor que $ 175 debe ser la cantidad de dinero que resulte.

De ese modo comprenderán ESENCIALMENTE el razonamiento, que consiste en que "siendo doce veces mayor que un mes, la cantidad de tiempo, doce veces mayor que 175 deberá ser la de dinero" y que esto equivale á multiplicar 175×12.

5° Se ejecuta la operación y una vez encontrada la solución se repite el problema en esta forma: "Un individuo que en 1 mes gana 175 pesos, en un año gana 2,100 pesos."

6° Conviene luego decir á los niños que se fijen bien en todo lo hecho, por que se va á borrar para que ellos lo vuelvan á hacer. En seguida se manda borrar y que uno de los niños dicte el problema, para que otro lo resuelva, corrigiéndole la clase donde se equivoque. Después se invitará á los alumnos para que uno sólo lo haga á la vista de todos, con el fin de que se asimilen completamente el procedimiento y órden que se siguen en la resolución de los problemas.

El maestro debe procurar introducir en los problemas la mayor variedad posible, así en la forma con que los

enuncie como en los asuntos de donde tome los datos para formarlos.

Así se evita que todas las cuestiones que se propongan á los niños, empiezen: un individuo compró etc., vendió etc., tantos metros valen tanto, tantos ¿cuánto valen? etc.

7° Es una tendencia natural en los niños aplicar después á todos los problemas este órden de arreglar los datos primero, razonar en seguida y ejecutar luego las operaciones.

Esta tendencia los hace confundirse en los de sumar y restar en que se razona inmediatamente y se pasa á ejecutar las operaciones, colocando entónces las cantidades en la forma conveniente.

Este arreglo de las cantidades difiere del otro, en que aquel se hace para discernir mejor el problema, y éste, para mayor comodidad en la ejecución de las operaciones. Para evitar esta confusión de parte de los niños, debe llamárseles la atención sobre que "en los problemas cuyos datos se arreglan antes de razonar HAY CANTIDADES DE ESPECIES DIVERSAS" y "en los otros en que se razona inmediatamente SON CANTIDADES DE LA MISMA FSPECIE"

Si esta explicación se les aclara con ejemplos antes y después, los niños distinguirán perfectamente en cuales problemas deben aplicar un procedimiento y en cuales otro.

8° Una vez que los niños estén diestros en la resolución de los problemas simples y típicos, el maestro irá introduciendo poco á poco en las cuestiones alguna complicación, con el fin de que en uno solo haya varios problemas que resolver.

Como en tales casos, la principal dificultad consiste en percibir las relaciones de los diversos datos, en separar las partes del problema y determinar el orden de su resolución; esta parte es la más educativa de la Aritmética, por que nunca llega á mecanizarse, como las otras, por el ejercicio.

Supongamos que el maestro dicta este problema: "Un comerciante ha comprado dos partidas de maíz, una de 149 cargas y otra de 425, á 9 pesos la carga ¿cuánto dinero debe entregar?"

En estos casos conviene empezar por enterarse de si los niños entendieron bien el problema, y para ello, mejor que pedirles que lo repitan es hacerles preguntas en esta forma: ¿qué compró el comerciante? (dos partidas de maíz.) de cuántas cargas era una? (de 149) y la otra? (de 425) á qué precio? (á 9 pesos carga) qué deseamos saber? (el dinero que debe entregar.)

En seguida se invita á los niños á que principien á arreglar los datos para buscar la solución. Suponiendo que algún niño empiece por buscar el valor de 149 cargas, se acepta; y una vez hecha la operación, se pregunta si nada más eso compró y con ello propondrán hallar el valor de las 425; se ejecuta esta otra operación y luego, viendo el orígen de los dos valores, vendrán en conocimiento de que es necesario reunirlos, para saber lo que el comerciante tuvo que pagar.

Terminado el problema se llama la atención de los niños sobre las partes que comprendió, á fin de que se fijen en que primero se halló el valor de 149 cargas, segundo el de 425 y tercero, el de todas juntas y de que en realidad hubo tres problemas que resolver.

Luego se les hace ver que también pudieron reunirse las 149 y 425 cargas y hallar después el valor de las 574, y que en ese caso se hacen nada más dos operaciones y dos problemas.

Cuando los niños encuentren dificultad para descomponer el problema en las partes que comprende, se les dicta para que resuelvan mentalmente, otro de igual clase con NUMEROS PEQUEÑOS á fin de que de esto saquen por analogía el órden que hay que seguir en aquel. v. g., un niño compró dos montoncitos de naranjas, uno de 10 y otro de 20 á 3 centavos; cada una, ¿cuanto tiene que pagar?

Algún niño contestará que 90 centavos, se le pregunta como halló el resultado y dice, que las 10 naranjas costaron 30 centavos y las 20, 60 y todas 90 centavos. Por analogía ven que hay que buscar el valor de unas cargas, luego el de las otras y luego juntar los valores.

Bien puede ser que el niño conteste que las naranjas eran 30 y que á 3 centavos valen 90 centavos; en ese caso se sigue el mismo procedimiento para resolver el otro problema; pero de todas maneras deben darse á conocer los dos modos de resolverlo.

9° Pondremos ejemplos de diferentes y mayores complicaciones en los problemas:

I. Un comerciante compró 75 sacos de café á 48 pesos por saco y 129 de maíz á 4 pesos cada uno ¿cuánto dinero debe pagar?

II. Un ganadero vendió 1428 novillos á 25 pesos y debe recibir el dinero en 8 abonos iguales ¿cuánto recibirá en cada abono?

III. Un tren que camina 60 kilómetros por hora, tiene que recorrer una distancia de 1685 kilómetros, ¿cuánto le falta que andar á las 15 horas de haberse puesto en marcha?

IV. Un individuo que debe á otro 2,850 pesos, le ha dado en pago 145 piezas de imperial á 4 pesos cada una y 286 de percal á 9 pesos, ¿cuánto le falta ó le sobra del pago de la cuenta?

V. El cura Don José Ma. Morelos, nació el año de 1765 y fué fusilado en 1815, ¿Cuántos años tenía cuando lo fusilaron, cuánto tiempo hace de su muerte y cuánto de su nacimiento?

VI. Un comerciante tenía en caja 910 pesos, vendió 85 cargas de trigo á 12 pesos, compró 90 cajas de jabon á 4 pesos y pagó además una libranza de 280 pesos. ¿Cuánto dinero le queda en efectivo?

VII. Un carro viene cargado con 14 bultos de sal y 12 de frijol; los de sal tienen cada uno 9 decálitros que pesan 13 kilos cada uno, y los de frijol 16 decálitros que pesan 7 kilos cada uno. ¿De cuántos kilos es la carga del carro?

VIII. ¿Cuánto gana en un viaje un fletero que trabaja con 22 carros, carga en cada uno 35 cargas de mercancias á 75 centavos cada una y gasta en sueldo y forrajes 215 pesos?

10 ° Al dictar un problema de esta clase, como se indicó antes, el maestro procura en primer lugar, por medio de una serie de preguntas, que los niños se den cuenta de una manera clara de las condiciones del problema. Supongamos que se trata del 4 ° problema "Un individuo que debe á otro 2,850 pesos, le ha dado en pago 145 piezas de imperial á 4 pesos cada una y 286 de percal á 9 pesos. ¿Cuánto le sobra ó le falta del pago de la cuenta?

El maestro pregunta:

¿Cuánto debía el individuo (2,850 pesos.)

¿Qué dió en pago (145 piezas de imperial.)

¿A cómo? (á 4 pesos.)

¿Qué más dió? (286 piezas de percal.)

¿A qué precio? [á 9 pesos cada una.]

¿Qué deseamos saber? [cuánto le falta ó le sobra.]

Hace en seguida á los niños estas reflexiones: ¿Sabemos lo que debía? [sí]

¿Sabemos ya lo que valen TODAS LAS COSAS que dió [no]

Sabemos lo que debía y no sabemos el valor que dió, ¿podremos saber inmediatamente si le sobra ó le falta? (no.)

¿Qué necesitamos saber antes? (el valor de lo que dió.)

¿Qué cosas dió (imperial y percal)

¿Qué buscamos entónces? (el valor del imperial.) Que los niños lo hagan procediendo del modo que ya saben.

¿Qué buscamos luego [el valor del percal.]

Que los niños lo hagan.

¿Cuánto vale el imperial [580 pesos.]

¿Y del percal [2,574 pesos]

¿Dió nada más lo primero [no.]
¿Dió nada más lo segundo? (no)
¿Qué dió? (las dos cosas.)
¿Cuánto valen ($2,574×580=3,154 pesos.)
¿Le sobra ó le falta (le sobra)
¿Porqué (por que le dió más de lo que debía.)
¿Cuánto le sobra ($3,154—2,850=304 pesos.)

Si los niños vacilan mucho, y no pueden encontrar por medio del anterior interrogatorio la manera de resolver el problema, se les propone como se dejó indicado uno semejante con cantidades pequeñas y sobre asunto familiar para ellos; v. g., un niño debe á otro 20 centavos y le da en pago 4 canicas á 3 centavos cada una y 2 trompos á 5 centavos. ?Cuánto le falta ó le sobra del pago?

Se hace prácticamente el problema con dos niños, y el maestro pregunta á uno de ellos ¿cuánto debes? [20 centavos.]

¿Qué cosas tienes tú que cobrar (canicas y trompos.)
¿Cuánto cobras por las canicas [12 centavos.]
¿Y por los trompos (10 centavos.]
¿Y por todo [22 centavos.]
¿Te falta ó te sobra [me sobran 2 centavos.)

Por analogía infieren que en el otro problema se busca el valor del imperial, el del percal luego; todo junto después y lo que sobra al último.

Se procede entónces á resolver el problema escrito.

11 ᶜ Observaciones:

I El recurrir para la clara inteligencia de un problema, á otro semejante con cantidades pequeñas y sobre cosas familiares á los niños, puede ser necesario siempre; pero por lo general se ofrecerá más al principio y será menos frecuente cuando los niños estén diestros en analizar los problemas. Sólo debe echarse mano de esta ayuda como último recurso.

II El interrogatorio primero' tiene por objeto enterarse de si los niños se dieron cuenta exacta de los datos del problema, y raras veces conviene suprimirlo; pero las reflexiones de que se habla en el interrogatorio siguiente, cuyo fin es sugerir á los niños el orden que debe seguirse en la resolución, se hacen solamente en los primeros problemas, dejando después que los niños, sin ninguna ayuda, busquen el procedimiento que debe seguirse, para lo cual se les deja pensar un momento.

Si no atinan, el maestro les va sugiriendo en todo ó en parte la manera de proceder.

III Cuando estén algo avanzados en este asunto, conviene dictarles problemas para que ellos los resuelvan en sus pizarras, sin ninguna ayuda; pero en este caso conviene que tengan menor complicación que los problemas que van resolviendo con el maestro.

IV Cuando hayan adquirido mediana destreza en la resolución de problemas combinados, se pasará al estudio de la regla de tres simple y lo que les corresponde de decimales, continuando después aquellos ejercicios, é introduciendo en las combinaciones, casos referentes á los nuevos conocimientos adquiridos.

V No debe olvidarse: que después de resuelto un problema, conviene que se repita lo hecho por toda la clase y por un sólo alumno después á fin de que hasta los más torpes se den cuenta exacta de todo; y que debe hacerse referencia luego, á las demás maneras que haya de resolver el mismo problema, aunque no se ejecuten las operaciones.

Algo sobre la división de enteros.

Antiguamente, cuando el aprendizaje de la aritmética era no sólo abstracto y fastidioso sino mecánico y cansado, lo principal consistía en ejecutar las operaciones con largas filas de números; aunque el niño no entendiera el mecanismo de ellas ni supiera tampoco aplicarlas á la resolución de los problemas que en la vida se presentan.

Hoy se enseña la aritmética de un modo práctico y racional, presentando al alumno las cuestiones en forma de problemas, y ejercitando su razonamiento para encontrar la relación que las cantidades tienen entre sí; pero sucede en muchas ocasioues que, huyendo del extremo AQUEL, incurrimos en otro como es el de ejercitar mucho el razonamiento en lo que podríamos llamar ANALISIS DE CUESTIONES, y olvidarnos completamente de adiestrar á los niños en la ejecución de las operaciones que tan importante es en la vida, y sin la cual de nada sirve que puedan PLANTEAR el problema más complicado.

Sobre la parte mecánica de la división de los enteros nos proponemos hacer, aunque sea á la ligera, algunas observaciones.

Ante todo deberemos fijarnos en que la división es una operación compleja en la que entran combinadas todas las que antes ha aprendido á ejecutar el niño, y que lo que más dificultades le presenta en este caso es ejecutar la resta al mismo tiempo que está multiplicando el cociente por el divisor.

Lo conveniente al principio es suprimir esta dificultad y hacer que los niños ejecuten sus divisiones en la forma en que acostumbran hacerlas en las Escuelas de los Estados Unidos.

Supongamos que se propone á los niños como un ejercicio hacer la distribución de $12,796 entre 28 personas:

Para mayor claridad se les hará que vean que la cantidad puede descomponerse en billetes de estos valores.

12 de mil.
7 de cien,
9 de diez.
6 de uno.

Luego se empieza á hacer la distribución, diciendo; 12 billetes entre 28 personas no les alcanza ni de á billete, por lo tanto necesitamos cambiarlos por billetes de á cien; nos dan 120 y los otros 7 son 127, que distribuidos entre 28, correeponden á cada uno 4.

Dando 4 á cada uno habremos dado á los 28, $4 \times 28 =$ 112, y como teníamos 127 nos sobrarán $127 - 112 = 15$ billetes de á cien.

Cambiamos éstos por billetes de á 10 y nos dan 150, y 9 que tenemos más son 159 que, distribuidos entre 28 personas corresponden 5 á cada una. A las 28 se les habrán dado $5 \times 28 = 140$ billetes y como los que había para repartir eran 159 sobrarán $159 - 140 = 19$ billetes de á diez.

Cambiados éstos por de á uno nos dan 190, y 6 que tenemos, resultan para repartir 196, que dan para cada una de las 28 personas 7 billetes; para los 28, $7 \times 28 = 196$ y como esos eran los que había no sobra nada.

Los resultados que se han ido obteniendo podrían escribirse enfrente en esta forma:

12 de á mil entre 28 personas á cada una..0
$120 + 7 = 127$ de á cien entre 28 id id id 4
A todas 112

Sobran 15
$150 + 9 = 159$ de á diez id id id id id 5
A todas 140

Sobran 19
$190 + 6 = 196$ de á uno id id id id id 7
A todas 196

000

Y después que, sin colocar los números de esta manera, hagan la división en esta otra forma:

127,9,6.	28
112	457
159	
140	
196	
196	
000	

De este modo los niños se apoderan con claridad y distinción del conocimiento que se trata que adquieran, se penetran bien del mecanismo de la operación ejecutada y entienden la regla que para ellos puede reducirse á estas cuantas palabras: se toma un dividendo parcial, se haya el cociente, se multiplica por el divisor y lo que rerulta se resta de dicho dividendo.

Con la resta y la cifra que sigue en el dividendo total se forma otro dividendo, se hace como con el primero y así sucesivamente.

Los niños comprenden muy pronto las operaciones que tienen que hacer y en qué orden cuando están dividiendo, sobre todo si el maestro los hace que se fijen en qué fué lo que hicieron al final de cada una de las divisiones parciales.

La única dificultad que persiste para ellos es la de tantear el cociente; pero si se tiene cuidado de ejercitarlos convenientemente en el cálculo mental, y el maestro los hace que dejen de tomar en cuenta algunas cifras del dividendo y divisor, para hacer el tanteo con las demás, y sobre todo, haciendo que comprueben y reformen cuando se equivoquen, se logra que se pongan diestros en encontrarlo.

Pero no puede llegarse á este resultado sino á fuerza de muchos y repetidos ejercicios, insistiendo siempre en el porqué de cada cosa, para que los niños ejecuten las operaciones con inteligencia de lo que hacen; y por eso pedimos de parte de los maestros mayor atención para estos ejercicios que tan gran papel desempeñaban en la escuela antigua, y á los que tan poca importancia concedemos ahora.

Ejercicios preparatorios para el aprendisaje completo de la DIVISION.

Hace algún tiempo que el Sr. Profesor Isabel R. Olivares, en una conversación en nuestra Escuela Normal, desarrolló la idea de los ejercicios que sirven de tema al presente artículo y que sólo vamos á reproducir aquí.

Cuando ya los niños se han ejercitado bastante en la división de enteros según el procedimiento que indicamos, de escribir el producto del cociente por el divisor y hacer después la resta como ordinariamente se acostumbra, conviene que aprendan á hacer la resta al mismo tiemque están multiplicando.

Esto naturalmente no puede hacerse de un solo salto; sino después de algunos ejercicios que gradualmente llevan á los niños al punto á que se desea conducirlos.

Desde luego nos fijaremos en qua la resta que se hace en la división difiere de la ordinaria en que la comparación se hace de abajo para arriba; y aunque esta no sea para nosotros una gran diferencia, sí lo es para los niños de corta edad.

Por ahí, pues, deberemos empezar la preparación y ha-

cer que los niños hagan algunas restas de ese modo, por ejemplo:

$$\begin{array}{r} 3428 \\ -1615 \\ \hline 1813 \end{array}$$

Ejecución: 5 para 8 faltan 3, 1 para 2, 1, 6 para 4 (no es posible,) para 14, 8 y 1 para 2 (por habérsele quitado al 3 un millar) 1. Ejercitados convenientemente en hacer la resta de este modo se puede pasar á otra de las diferencias que presenta la resta que se hace en las divisiones.

En la resta ordinaria, cada vez que para poderla efectuar se aumenta en diez una de las cifras del minuendo, se tiene el cuidado de quitarle una unidad á la que sigue á la izquierda; pues bien, en la división, en lugar de hacerlo así, se aumenta esa unidad á la que sigue del sustraendo.

Por tanto, conviene hacer que por medio de ejemplos, lo que aquí podríamos llamar experimentalmente, los niños lleguen á descubrir que, cuando se aumenta una misma cantidad al minuendo y al sustraendo la resta no se altera:

8—5=3, aumentando 4, 7, 10 etc. 12—9=3, 15—12=3, 18—15=3.

Sentado este principio y procediendo como en la resta anterior, se ejecutan algunas otras, llamando la atención de los niños en que cuando para efectuar la operación se aumentan diez unidades, decenas ó centenas á la cifra del minuendo, basta para compensar ese aumento con agregarle uno á la cifra siguiente del sustraendo, pues una decena, una centena ó un millar (según el caso) valen lo mismo que lo agregado arriba.

Luego se puede proponer á los niños el que resten de una cantidad el producto de otras dos en que el multiplicador tenga una cifra, (por ser ese el caso que se ofrece en la división) primero escribiendo el producto y después sin escribirlo. Ejemplo $1348-(256\times5)=1348-1280=68$, restando como en los ejemplos anteriores.

Después, puede pedírseles que al tiempo de multiplicar ejecuten la resta, haciendo que razonen sobre poco más ó menos de esta manera: $5\times6=30$ unidades, para 8 no es posible, para 18 ó 28 tampoco, para 38, 8; pero hemos agregado treinta unidades y para compensar debemos agregar abajo TRES DECENAS (van tres.) Se continúa: $5\times5=25$ decenas, y 3 más, son 28, para 4 no es posible, para 14 ó 24, tampoco; para $34=6$; pero hemos agregado arriba 30 decenas, para compensar agregaremos abajo 3 centenas (van 3.) Ahora, $5\times2=10$ centenas y 3 son 13, para 3 no es posible, para $13=0$. Hemos agregado arriba 10 centenas y para compensar agregaremos abajo un millar; quitándolo del único que hay arriba, no sobra nada.

Creemos que de este modo, procediendo el maestro tan lentamente como lo exijan las condiciones de la clase, haciendo en cada caso los ejercicios necesarios para que los niños se adiestren en la ejecución de las operaciones y preguntando el por qué de lo que se hace, para cerciorarse de si han entendido bien, el maestro se ahorrará tiempo y trabajo; pues se evitarán esas que podríamos llamar clases intercalares, que se ofrece dar á cada momento, cuando por haber aprendido mecánicamente el cálculo, los niños pretenden ejecutar las operaciones de un modo tan disparatado, que parece que nunca han oído hablar de ellas.

La regla de tres simple, por reducción á la unidad.

3er. año.

Al pasar los alumnos del 2° al 3er. años escolar, deben, conforme al programa de nuestras escuelas, estar ejercitados convenientemente en la multiplicación y división de enteros, y por tanto la regla de tres que figura en el programa correspondiente al último de los años referidos, no viene á ser sino una combinación de los conocimientos que sobre aritmética tienen ya adquiridos los niños.

Mas para que los alumnos puedan asimilarse bien el conocimiento que van á adquirir, y para que puedan servirse de una manera inteligente y razonada de la regla que se trata de enseñarles, es necesario:

I. Mostrarles la relación que la nueva regla tiene con las anteriores y la necesidad que hay de reducir á la unidad.

Darles sobre otras partes de la asignatura los conceptos necesarios para que puedan aplicar la regla á todos los casos que comprende.

Para lo primero podría empezarse por proponer á los niños un problema como éste: Valiendo 7 docenas de lápices $4.20 ¿á como sale la docena?

Los niños dispondrían los datos en esta forma:

7 docenas valen 420 centavos.

1 ¿Vale ? y razonarían así: si las 7 docenas valen 420 centavos, una valdrá una cantidad de dinero 7 veces menor que 420 centavos, es decir 4.20÷7=60 centavos.

Luego, llamando la atención de los niños sobre los datos del problema, se les haría que se fijaran en que "SABIENDO EL VALOR DE 7 DOCENAS ENCONTRARON EL DE UNA."

A continuación y dejando escrito en el pizarrón el problema anterior, sería conveniente proponer á los niños otro como este: "Valiendo 60 centavos la docena de lápices ¿Cuál será el valor de 18 docenas?

Los datos quedarían dispuestos así:

1 docena vale 60 centavos.
18 ¿Valen?

y el razonamiento de los niños sería, casi sin necesidad de que el maestro se los sugiriera, de este modo: si una docena vale 60 centavos, 18 valdrán una cantidad de dinero 18 veces mayor que 60 centavos, es decir, 60×18=1080 centavos. Luego, haciendo que los niños se fijaran en los datos del problema, se les haría observar que, SABIENDO EL VALOR DE UNA DOCENA DE LAPICES ENCONTRARONEL DE 18 DOCENAS.

Escritos y resueltos en el pizarrón dos problemas como los anteriores, puede considerarse que se han puesto ya laa bases sobre que ha de fundarse el discurso de los niños para descubrir el procedimiento que se les quiere enseñar, y proponerles un problema de regla de tres que, para mayor claridad, puede componerse de los dos resueltos antes y dictarse así: Valiendo 7 docenas de lápices 420 centavos ¿cuál será el imparte de 18 docenas?

Los datos quedarán dispuestos así:

7 docenas valen 420 centavos.
18 ¿valen?

Bien puede suceder, si los niños no tienen regularmente desarrollado el juicio, que al razonar digan que las 18 decenas valen una cantidad 18 veces mayor que 420 centavos; pero al llamarles el maestro la atención sobre que la cantidad de lápices no es 18 veces mayor que la de arriba, ellos reconocerán su error y dirán que la de dinero tampoco deberá serlo.

Observando atentamente las cantidades verán que la de abajo no es ni dos ni tres veces mayor que la de arriba; sino algo más de lo primero y un poco menos de lo segundo y al fin llegarán á esta conclusión: SABIENDO EL VALOR DE 7 DOCENAS NO PUEDE ENCONTRARLE EL DE 18.

El maestro entónces dispondrá los datos en esta forma:

$$\begin{cases} \text{7 docenas valen 420 centavos,} \\ \text{...} \\ \text{18 ¿valen?} \end{cases}$$

y hará que repitan que partiendo del valor de 7 docenas no puede saberse el de 18.

Luego volviendo al primer problema que resolvieron, verán otra vez que, partiendo del valor de 7 docenas puede encontrarse el de 1 y lo indicará así:

7 docenas valen 420 centavos.
1 ,, vale 60 ,,
18 ,, ¿valen?

Después volverá á llamar la atención de los niños sobre el segundo problema y repetirán que partiendo del valor de una docena se puede saber el de 18; lo que se indicará así:

7 docenas valen 420 centavos.
1 ,, vale 60 ,,
18 ,, ¿valen? 1080 ,,

Con lo que verán los niños que su conclusión de que, partiendo del valor de 7 docenas no puede saberse el de 18, era falsa, pues se puede llegar al resultado buscando antes el valor de UNA DOCENA, viniendo á ser para ellos la unidad, como el puente necesario para salvar el obstáculo que encontraron al principio.

Hasta aquí puede considerarse como terminada la primera parte, referente á que los niños encuentren por sí mismos la necesidad y conveniencia de reducir á la unidad para la resolución del problema; pero no queda por esto terminado el asunto, desde el momento en que así, sólo podrán resolver por regla de tres los problemas en que la división salga exacta.

Por lo tanto para que, como se dijo antes, puedan aplicar la regla de una manera inteligente y razonada á todos los casos que comprende, es necesario dar á los niños los conceptos siguientes:

1° Idea general de los quebrados: *

Se muestra á los niños una manzana, se divide en dos partes iguales preguntando luego el nombre de cada parte y cuantas salen de la manzana, para llegar á esta conclusión; LA MANZANA TIENE 2 MITADES. Se ejecuta lo mismo con otros objetos, como un pliego de papel, un metro de madera, el pizarrón [por medio de una linea] el contenido de un vaso, [vaciando la mitad,] la pieza de la clase, una banca, etc., siguiendo el mismo orden que con la manzana; para que de la reunión de casos lleguen los niños á la conclusión de que todo entero tiene dos mitades.

Del mismo modo se da la idea de cuartos, octavos, tercios, sextos, novenos, quintos, séptimos, décimos y luego muy rápidamente de onceavos, doceavos, etc,

2° Escritura de quebrados:

Podría hacerse con el orden siguiente: I. Preguntar el nombre de las partes cuando se hacen 2, 3, 4, 5, 8, 12, etc.. del entero.

II. Dado el nombre de las partes, [mitades, cuartos,

* Lo que se dice aquí acerca de los quebrados, es sólo de un modo accidental, pues al enseñanse la asignatura de 4° año lo hará el maestro con la extensión correspondiente.

quintos, doceavos etc.] que los niños digan cuántas se han hecho del entero.

III. Escribir quebrados como se escriben ordinariamente los enteros, es decir, 5 pesos, 3 varas, 4 octavos de vara, 3 novenos, 8 veinticinco avos, 12 ciento cincuenta y ocho avos.

IV. Que los niños digan en cuántas partes se ha dividido el entero en cada caso, y qué número podría servir para acordarse del nombre que debe darse á dichas partes, quedando así: $\frac{4}{8}$ $\frac{3}{9}$ $\frac{8}{25}$ $\frac{12}{158}$, llamando la atención sobre la rapidez y claridad que se obtiene en la escritura haciéndola de la última manera.

A continuación se darán á los niños los nombres de los términos del quebrado; y como ellos ya saben por lo anterior que el número que está debajo de la raya sólo sirve para recordar el NOMBRE ó DEDOMINACION de las partes, no encontrarán dificultad para retener la palabra DEDOMINADOR, al mismo tiempo que como el de arriba indica cuántas partes (ó el número de ellas) se quisieron escribir, encontrarán también muy oportunamente aplicado el dictado de NUMERADOR.

3° Indicar una división en forma de quebrado:

Se propondrá á los niños un problema que se preste para el caso, por ejemplo: repartir 184 naranjas entre 9 niños, y se les hará que se fijen en lo que le tocaría á cada niño si se les repartiesen las naranjas una por una.

Ellos contestarán, naturalmente, al preguntarles sobre la primer naranja que se distribuya, que á cada niño le corresponde $\frac{1}{9}$, de la segunda lo mismo y así de la tercera

hasta que de las 184 le corresponderán á cada uno $\frac{184}{9}$ Haciendo lo mismo con otras divisiones los niños infieren que TODA DIVISION SE PUEDE INDICAR EN FORMA DE QUEBRADO, poniendo el divisor como denominador.

4° Modo de hacer mayor un quebrado:

Se puede, para esto, dictar á los niños un quebrado cualquiera, por ejemplo: ¾ y hacer que multipliquen el numerador por 5 en esta forma $\frac{3}{4} \times 5 = \frac{15}{4}$

Se llama luego la atención sobre si el quebrado que resulta es mayor ó menor que el primero y cuántas veces mayor. Haciendo lo mismo con otros quebrados y con otros números y llamando en cada caso la atención acerca del cambio que sufre el valor del quebrado, los niños llegarán á estas dos conclusiones [que es conveniente formular por separado para que puedan expresarlas.]

SIEMPRE QUE SE MULTIPLICA EL NUMERADOR DE UN QUEBRADO, ESTE SE HACE MAYOR.

"Si se multiplica por 5 se hace 5 veces mayor, si por 4, 4 veces, etc.

Haciendo aplicación de todos estos conocimientos, pueden los niños resolver ya, problemas de regla de tres simple propiamente dicha, por ejemplo: En un vallado en que trabajan 15 hombres se han cavado 83 varas en la semana; si á la siguiente entran 8 hombres más ¿cuántas varas se cavarán?

Se dispondrían los datos:

15 hombres cavan 83
23 ,, ¿cavan?

Se razonará así: 15 cavan 83, 1 cavará $\frac{83}{15}$ y 23 cavarán 83×23

Los ejercicios anteriores, que he tenido oportunidad de poner en práctica, bastarán para que los niños puedan manejar el método de reducción á la unidad con conciencia del auxilio que les presta, haciendo que se ensanche el círculo de problemas que pueden resolver, sin tener necesidad de hacer otras operaciones, ni otros razonamientos que los que están acostumbrados á hacer para los problemas de multiplicar y dividir.

Todo consiste en proceder con la lentitud que las circunstancias exijan, según el desarrollo intelectual de los niños, y en no pasar nunca delante sin haberse asegurado por medio de muchos y variados ejercicios, de que los niños han entendido bien, pues no debe olvidarse nunca que, pasar al conocimiento siguiente sin que el anterior haya sido bien comprendido por los niños, es para el maestro lo mismo que para el militar dejar enemigos á la espalda,

Idea de decimales:

1 ° Escritura de una cantidad v. g., 3458 y lectura de ella por los niños.

2 ° Lectura de las diversas unidades que contiene, una por una: 3 millares, 4 centenas, 3 decenas y 8 unidades.

3 ° Valor de esas unidades, sacado de la lectura misma de la cantidad: los tres millares 3,000, las cuatro centenas 400, las cinco decenas 50 y las ocho unidades 8.

4 ° Valor de cada unidad, sacado de los valores anteriores: cada millar vale 1,000 (puesto que los tres valen 3,000). cada centena 100, cada decena 10 y cada unidad 1.

5 ° Comparación del valor de cada unidad con el de la que sigue á la derecha:

1 millar se compone de 10 centenas.
1 centena ,, ,, 10 decenas.
1 decena ,, ,, 10 unidades.

6 ° Comparación de esas unidades, pasando uno ó más lugares:

Un millar vale 100 decenas, 1,000 unidades.

Si los niños vacilan v. g., para decir cuantas decenas vale el millar, se pregunta cuantas tiene la centena y se escribe.

1 centena tiene 10 decenas
¿10 ,, (ó 1 millar) cuántas tendrán?

Se hace que formulen el razonamiento y hagan mentalmente la operación.

7° Lectura del TOTAL de unidades de cierta clase que hay en una cantidad. Ejemplo: en 4,837 unidades, hay 483 decenas, 48 centenas, etc.

Para leer la decenas que hay en esa cantidad, conviene hacer que los niños reduzcan los millares á decenas, luego las centenas y agreguen después las decenas; llamando en seguida de cada caso su atención sobre que da lo mismo que LEER SEGUIDO HASTA LA CIFRA DE LAS DECENAS.

8° Escritura de una cantidad de pesos, (485 pesos) expresando las monedas de diferentes clases con que en la práctica se podría representar: 4 billetes de cien, 8 de diez y 5 de uno (4^c 8^d 5^u)

9° Se escribe después del 5 otra cifra más 4^c 8^d 5^u 3) preguntando á los niños el valor de las monedas indicadas por esa cifra: llamando su atención sobre que las primeras de la izquierda son de 100, las que siguen de 10 y las que siguen de 1, encontrarán que el tres representa monedas de un valor 10 veces más pequeño que un peso, llamadas ordinariamente DECIMOS y precisamente el nombre de DECIMAS les da el maestro.

10° Lectura de la cantidad, cifra por cifra (4 cen., 8 dec., 5 pesos y 3 décimas.)

11° Comparación de la décima con la unidad, reducción de unidades á décimas y viceversa, comparación de la decena con la décima, reducciones, comparación con la centena, etc.

12 Para dar idea de las centésimas, se agrega una nueva cifra á la cantidad, (4^c 8^d 5^u 3 4) y se procede como en el No. 9, preguntando el valor de cada una de las nuevas monedas que será diez veces menor que el de la décima, y con relación al peso cien veces menor.

Repitiendo que la moneda 10 veces menor que el peso se llama décima, por analogía llamarán cienésima á la otra, dando después el maestro el término propio. Se lee la cantidad después, cifra por cifra y se hacen en seguida las comparaciones y reducciones indicadas antes.

Lo mismo se procederá para dar la idea y nombre de las milésimas y diezmilésimas.

Tal vez extrañará á muchos maestros que tratándose de un orden de ideas completamente nuevo para los niños, al tratar de las decimales, no haya hecho uso desde luego del procedimiento intuitivo; pero me he fijado en que la numeración decimal, no es en el fondo más que la continuación de la de los enteros, rigiéndose exactamente por las mismas convenciones y principios.

Siendo esto así, nada más natural que relacionarlas y dar á los niños la idea de las decimales, sacada de los conocimientos que sobre numeración hayan obtenido, introduciendo la intuición á última hora, en el ejempl o en que ya se va á dar nombre á las unidades, como se hizo en el No. 9.

Escritura de decimales.

1 ° Escritura de las siguientes cantidades: 2536, 2056, 2006 y 2000.

2 ° Lectura de la primera cantidad, cifra por cifra, llamando la atención sobre el lugar que ocupa cada especie de unidades.

3 ° Lectura de las otras cantidades, cifra por cifra, llamando la atención sobre qué especies faltan y qué hay en su lugar, para recordar la necesidad y uso de los ceros.

4 ° El maestro escribe una cantidad decimal (235'124) y que los niños la lean, cifra por cifra, llamándoles la atención sobre el lugar que ocupan después de los enteros (de la coma,) las décimas, centésimas y milésimas.

Desde al escribir la cantidad, el maestro dice á los niños hasta donde llegan los enteros y que los va á separar por medio de una coma, la cual,—para que no se confunda con otras que se ponen en las cantidades—conviene colocar en la parte superior.

5 ° Que los niños lean cantidades que el maestro escriba: 28'4—35'58—14'134—0'007—56'004—5'05.

I. Que lean los enteros.

II. Las decimales, cifra por cifra.

III. Reducción á la última especie.

IV. Lectura correcta y usual de la cantidad.

6 ° Que los niños escriban las siguientes cantidades:

—35'3—34'25—43'128—16'05—52'008—67'024—0'05, etc., llamando la atención en los casos en que escriban mal, sobre el lugar que deben ocupar las diversas especies de unidades decimales, para llenar con ceros los lugares intermedios donde falta alguna especie.

7 ° Lectura de los décimas, centésimas, etc., que haya POR TODO en una cantidad decimal: (456'384)

I. Lectura de los enteros (456.)

II. Reducción á décimas (4560.)

Si los niños no pueden reducir mentalmente se hará que lo efectúen en forma de problema:

1 vale 10 décimas.

456 ,, ?

se razona, y se hacen las operaciones según lo acostumbrado.

III Adición de las décimas (4563 décimas) haciendo ver que resulta lo mismo que leer seguido hasta las décimas.

Lo mismo se procederá para leer las centésimas y milésimas, haciendo ver en todos los casos que resulte lo mismo que LEER SEGUIDO HASTA LA CIFRA CORRESPONDIENTE A LAS UNIDADES de que se trate.

ENSEÑANZA
de los Quebrados Comunes
en el 4° año Escolar.

Nos proponemos escribir unos breves apuntes sobre la enseñanza de los quebrados comunes en el 4° año escolar, y conviene ante todo decir algo acerca de su importancia y de porqué subsiste en nuestros programas la referida enseñanza.

Hoy que se ha adoptado definitivamente el sistema decimal de pesas y medidas, y que en la práctica la mayor parte de los problemas se resuelven por decimales, parece casi un anacronismo que los quebrados comunes figuren en la asignatura de aritmética de nuestras escuelas.

Sin embargo, es necesario fijar nuestra atención en que las decimales vienen siendo una aplicación de los quebrados al mismo tiempo que de la numeración, y es fuerza estudiar primero éstos, si se quiere que los niños entiendan bien aquellas.

Por otra parte, es muy común que en las operaciones comerciales figuren en los precios de las mercancías los centavos y fracciones comunes de centavo, y mal podrían servirse los niños de los conocimientos aritméticos adquiridos en la escuela, si no tuvieran idea de estas fracciones y del modo de operar con ellas.

No podemos olvidarnos de lo que D. Carlos A. Carrillo decía sobre este punto, á saber: que los medios, tercios, cuartos, etc., están mucho más al alcance de la inteligencia infantil y se han fijado primero en ellos, que en las décimas y centésimas que, podríamos decir, son una aplicación más artifisiosa que natural.

Agreguemos á esto que la enseñanza de los quebrados comunes tiene una influencia muy notable en el desarrollo de las facultades intelectuales del niño, que se presta de una manera admirable para hacer intuitiva la enseñanza de la aritmética, que afirma los conocimientos que el niño tiene sobre la numeración y operaciones de enterados, dando variedad á los ejercicios, y que robustece su poder de abstracción; y tendremos completamente justificada la subsistencia de esta parte de la aritmética en el programa de la escuela elemental.

La enseñanza de los quebrados tiene una gran influencia educativa y se presta muy bien para el empleo de la intuición, porque los niños observan de una manera experimental el valor relativo de las diferentes partes que se hacen del entero: medios, cuartos, octavos, etc., comparándolas con ellas á la vista y apreciando el valor por el tamaño; porque todas las propiedades de los quebrados y todas las operaciones que con ellos se pueden hacer, les son demostradas haciendo uso de la forma socrática, de manera que les parece haberlas descubierto casi sin el auxilio del maestro, y se acostumbran de esa manera á razonar metódicamente, sin pagarse de las palabras, sino de la comparación matemática.

Adquieren muy facilmente la idea de la proporcionalidad inversa en las cantidades, porque intuitivamente aprenden que mientras aumente el número de partes disminuye el tamaño y por tanto el valor de ellas. Se afirman los conocimientos que tienen los niños sobre numeración y sobre el cálculo, porque al encontrar, por ejemplo, los cuartos, octavos, veinte avos, etc., que tiene un medio, no hacen más que aplicar lo que saben acerca del valor relativo del 4, el 8 y el 20 comparados con el 2.

Cuando encuentren que los tercios y cuartos para ser sumados necesitan reducirse á doceavos, encuentran sin quererlo el menor múltiplo de esos números; cuando reducen quebrados de una especie á otra se ejercitan en la multiplicación y en la división, equivaliendo estos ejércicios mentales á los que se hacen con los enteros; pero introduciendo la novedad y la variedad que tanta influencia tienen en la enseñanza.

Se robustece el poder de abstracción del niño porque además de tener en cuenta la especie á que la cantidad pertenece, aquí debe fijarse en la clase de partes de que se trata para poder ejecutar las operaciones que hay que hacer.

Por último, la enseñanza de los quebrados es indispensable porque, aún haciendo uso de las decimales, indicándose siempre las operaciones que deben ejecutarse en un problema, en forma de quebrado, precisa este estudio para saber el por qué de lo que se hace.

Todo ésto que indicamos aquí de una manera general, podrá irse viendo punto por punto en lo que diremos después, acerca de la manera de enseñar los quebrados, y nos permitiremos entónces, para mayor claridad, volver á llamar la atención sobre ello.

La enseñanza de los quebrados comunes puede dividirse en dos partes: la primera comprende la idea de las diferentes fracciones que pueden hacerse de un entero y cálculo mental con ellas, y la segunda, la escritura de los quebrados y el cálculo escrito-

Para el desarrollo de las lecciones correspondientes á la primera parte, puede seguirse el orden siguiente:

1° División del objeto en partes iguales.

Para esto deben preferirse aquellos objetos que representan propiamente la unidad, como una fruta, un metro, un pizarrín entero, una barra de gis, y en general los que tienen un tamaño más ó menos determinado; pues hacerlo con rayas puede, en el principio, dar orígen á confusión de parte de los niños, toda vez que observarían que á veces la mitad ó la tercera parte de una raya, pueden ser mayores que una raya entera.

El objeto se dividirá en las partes que sea necesario según sea la unidad fraccionaria de que se quiere dar idea á los niños. El orden que en la práctica parece más apropiado en este asunto, es dar la idea de medios, cuartos, octavos, tercios, sextos, novenos, quintos, décimos, séptimos, onceavos, doceavos, etc., deteniéndose mucho más en los primeros, y tocando con menor detenimiento lo que se refiere á los onceavos, doceavos, etc.

2 ° Preguntar á los niños el número de partes que se han hecho y pedirles el nombre de cada uno de ellas si pueden darlo, y si no, lo dirá el maestro haciendo que ellos lo repitan.

3 ° Dividir en el mismo número de partes otros objetos, preguntando otra vez cuántas se han hecho y como se llaman.

4 ° Recapitulación acerca de lo dicho sobre cada uno de los objetos que se han fraccionado, para llegar á la conclusión respecto del valor del entero, en partes de las que se han hecho; v, g.: se preguntará cuántas mitades salieron de una manzana, de un gis, de un metro, de un pliego de papel, del agua de un vaso, etc., hasta llegar á la conclusión de que todo entero tiene dos mitades. Lo mismo se haría cuando se tratara de cuatro ú otras partes.

5 ° Idea de la fracción con respecto á una cantidad mayor que la unidad.

Con objeto de hacer que los niños tengan la idea de lo que es, no sólo la mitad de un entero; sino la mitad en general, se puede hacer que dividan en dos partes iguales una pila de 10 pizarras, 20 libros, 8 centavos, un grupo de 12 niños, etc., y digan cual es la mitad de 10, 20, 8, 12, etc.

6 ° Idea de la fracción con respecto á otra fracción.

Este punto que no tiene aplicación cuando se trara de las mitades, la tiene de mucha importancia al tratar de las demás partes. Al hablarse de los cuartos por ejemplo; se presenta á los niños la mitad de una manzana y al lado de ella un cuarto, de la misma fruta; y preguntando luego cuantos cuartos salen de la mitad, puede llevarlos á la conclusión de que "un cuarto es la mitad de la mitad.

Cuando ya se ha llegado á los octavos, doceavos, etc., este punto tiene muchísima importancia, porque á la vez que se afirma la idea que los niños tienen de las fracciones, se van iniciando en la reducción á un mismo denominador y en la simplificación de los quebrados de una manera que podríamos llamar experimental.

7 ° Reducción de enteros y mixtos á quebrados.

Es conveniente en esto que al principio tengan los niños á la vista los objetos, á fin de que casi materialmente hagan la reducción de las manzanas, pliegos de papel ó lo que sea á mitades, cuartos, etc.

8 ° Reducción de quebrados á enteros.

El maestro pone á la vista de los niños muchos cuarterones de papel, por ejemplo, y pregunta cuántos pliegos son; hace lo mismo con otros objetos y por último propone cuestiones sin los objetos á la vista.

9 ° Cálculo mental con los quebrados.

El maestro debe procurar que en estos problemas se trate de las fracciones cuya idea tiene el niño con más claridad, y procurará graduar los ejercicios, de manera que al principio se trate de quebrados de la misma especie, luego de especies diferentes, pero que sean reductibles fácilmente de una á la otra, y por último, de especies que sólo puedan reducirse á una tercera.

Por vía de ejemplo indicaremos algunos problemas de los que pueden proponerse á los niños, para ejercitarles en el cálculo con quebrados.

Sumar.—Un retazo de tela tiene $4\frac{7}{8}$ metros y otro $5\frac{1}{2}$ ¿cuánto tienen juntos?

Una sala tiene $10\frac{3}{4}$ metros de largo y otra $8\frac{1}{2}$ ¿cuánto tienen entre las dos?

La distancia recorrida por un viajero en un día fué de $9\frac{5}{8}$ kilómetros y al siguiente de $7\frac{1}{4}$ ¿qué distancia anduvo en los dos días?

Restar.—A una vasija que tiene 14 litros de agua, se le han sacado $8\frac{2}{3}$ litros ¿cuánto le queda?

A un pedazo de tela que mide $13\frac{3}{4}$ metros, se le han cortado $6\frac{1}{2}$ ¿cuánto sobra?

Multiplicar.—Un metro de listón vale 80 centavos ¿cuanto vale $\frac{1}{4}$ de metro?

Un kilogramo de café cuesta 40 centavos ¿cuánto se pagará por $\frac{5}{8}$ de kilogramo?

Dividir.—La tercera parte de la distancia entre dos pueblos es 20 kilómetros ¿cuál es toda la distancia?

Dos quintas partes de metro de una cinta cuestan 12 centavos ¿cuánto cuesta el metro?

Réstanos sólo agregar que el maestro debe pcoceder muy lentamente en cada uno de estos puntos, y no pasar al siguiente ni introducir ninguna dificultad, hasta que los niños esten seguros de lo anterior. Y no hay que ilusionarse por lo fácil del principio y pasar muy rápidamente por los primeros puntos; pues se llega muy pronto á lo difícil, sin la conveniente preparación. y todo es embrollo, obscuridad y fastidio por no haber tenido paciencia.

En la mayor parte de los casos, los cuatro primeros puntos podrán verse en una lección; pero del quinto en adelante es necesario no apresurarse y hacer sobre cada uno de ellos muchos ejercicios, hasta estar completamente seguros de que los niños han entendido bien. En muchas ocasiones es conveniente pedir á los niños que expliquen cómo han encontrado el resultado de la cuestión, para que por sí mismos vayan formando las reglas; pero siempre después de que se hayan obtenido de ellos contestaciones exactas y prontas.

Por último; debe huirse en los problemas que se pongan de dar cantidades muy grandes, en que la operación sea para los niños difícil de ejecutar mentalmente; pues aquí se trata de hacerlos adquirir ideas claras y ejercitarlos en discurrir, y para ello basta que encuentren la manera de razonar dejando lo demás para el cálculo escrito.

Escritura de los quebrados.

Así como la idea de cada una de las diversas partes que pueden hacerse de un entero, sirve de base para el cálculo mental con quebrados, asímismo la escritura de ellos debe ser el punto de partida para pasar el cálculo escrito.

Repetiremos aquí lo que muy someramente dijimos sobre este asunto al tratar de la enseñanza de la regla de tres con enteros para al tercer año.

Para enseñar de una manera al mismo tiempo interesante y racional á los niños la escritura de los quebrados, nos parece que deben hacerse los siguientes ejercicios:

1 ○ "El maestro da el número de partes en que se ha dividido el entero y pregunta á los alumnos el nombre de ellas;" v.g. el maestro dice: hemos hecho de una manzana dos, tres, cinco, diez, etc. partes ¿qué nombre tendrán? Los alumnos indudablemente contestarán (puesto que ya antes han adquirido los conocimientos necesarios para hacerlo así) que se llaman medios en el primer caso, tercios en el segundo, etc.

2 ○ "El maestro dice el nombre de las partes y pide á los alumnos que ellos digan en cuantas debe haberse dividido el entero;" v.g., para que las partes se llamen cuartos, quintos, veinticuatro avos ¿cuántas partes habremos hecho del entero?

Los alumnos seguramente contestarán que en el primer caso es necesario haber hecho cuatro partes del entero, en el segundo cinco, etc.

3 ○ "El maestro dicta á los niños cantidades con enteros para que las escriban como están habituados á hacerlo" v.g. 3 metros, 15 pesos, 12 sillas.

Bien puede darse el caso que el alumno que vaya á escribir al pizarrón, solamente escriba los números 3, 15 y 12; pero el maestro llamará la atención sobre que allí dice tres y no tres metros etc. con lo que no faltarán niños que indiquen la conveniencia de que se agregue á continuación del tres el nombre de las cosas que el número representa ó cuando menos alguna letra inicial que nos recuerde que objetos son en cada caso.

4 ○ "El maestro dicta algunos números quebrados para que los niños los escriban siguiendo las mismas reglas que para los enteros;" v.g. cuatro quintos de metro, seis octavos de peso, ocho cientoveintitresavos de kilogramo: los niños se verán obligados á escribir estos números con cifras las partes y con letras el nombre de ellas y la especie; luego el maestro pregunta cuantas partes deben hacerse del entero para que se llamen quintos; los niños contestarán que cinco, y él puede entónces preguntar qué número puede servir para acordarnos que se llaman así. Hará las mismas observaciones respecto de los octavos y los cientoveintitres avos para que los niños se fijen en que escribiendo 8 y 123, podemos recordar el nombre de tales partes y luego llamará la atención sobre el ahorro de tiempo y trabajo al escribir con números en vez de letras y la mayor facilidad también para leer. Puede luego indicar que se escribe el número que expresa el nombre de las partes debajo del otro y separado con una raya horizontal.

5 ○ "Ejercicios de escritura de quebrados aplicando lo descubierto en el número anterior."

6 ○ "Nombre de los términos del quebrado."

En los mismos que los niños hayan escrito en el ejercicio anterior, el maestro preguntará: 1 ○ cuantas partes se han escrito y 2 ○ como se llaman esas partes; v.g. si se tiene escrito $\frac{12}{26}$ el maestro llamará la atención sobre que hemos escrito 12 partes, y que esas partes se llaman veintiseisavos, preguntando luego que número expresa el de partes que tenemos y cual el nombre de esas partes, hasta qua los niños puedan descubrir que "siempre el número de arriba expresa el (número) de partes y el de abajo cómo se llaman ó denominan esas partes, dando luego los nombres de numerador y denominador á los términos del quebrado y haciendo los ejercicios correspondientes para fijar estas palabras y su significado en la mente de los niños.''

Suma de Quebrados.

Ejercitados convenientemente los alumnos en la escritura de los quebrados, y principalmente en el cálculo mental con ellos, que deberá continuarse paralelamente con el escrito, puede pasarse á este último, procurando siempre tomar como punto de partida algo de lo ya conocido por los niños.

Así pues, para enseñar á los niños la suma de los quebrados, por escrito, convendrá sujetarse al órden siguiente:

1° ''Proponer un problema mental con quebrados de la misma especie.'' Como en este caso no se trata más que de tomar, como si dijéramos, base para razonar, puede proponerse á los niños un problema muy sencillo que todos sin excepción resolverán, v. g. Un retazo de tela tiene $\frac{3}{8}$ de metro y otro $\frac{4}{8}$ ¿cuánto tienen entre los dos?

Los niños contestarán sin ninguna vacilación que $\frac{7}{8}$.

2° ''Escritura del mismo problema.'' El maestro preguntará á los niños que operación fué la que ejecutaron y con que clase de números, para que se fijen en que han ''sumado quebrados''; y hará que uno de los niños escriba la operación hecha en esta forma: $\frac{3}{8}+\frac{4}{8}=\frac{7}{8}$.

3° ''Manera como se encontró la solución.'', El maestro llamará la atención de los niños acerca de la operación que mentalmente hicieron para encontrar la solución, hasta que ellos observen que sumaron el tres y el cuatro: preguntará luego qué representan éstos dos números en los quebrados, para que los niños se fijen en que son los numeradores, y los invitará á formular la regla de que ''para sumar quebrados se suman los numeradores.''

4° ''Proponer'' (para resolver por escrito desde el principio) ''un problema con quebrados de diferentes especies; pero que sean fácilmente reductibles á una de ellas''

El maestro propone un problema con la condición ya dicha, v. g., á una vasija le caben $\frac{3}{4}$ de litro de agua y á otra $\frac{5}{8}$ de litro ¿cuánto les cabe á las dos?

Se invita á los niños á que lo resuelvan, aplicando la regla anterior de ''sumar los numeradores'', y muchos lo harán de pronto así; pero al decir la solución vacilarán, pues no hallarán que decir, si 8 cuartos ú octavos, y hasta puede darse el caso que algunos traten de sumar los denominadores y pretendan que lo obtenido son 8 doceavos. Con problemas con enteros les hará ver el maestro que no se pueden sumar nueces con pesos etc., que haciéndolo, la suma no puede ser ni toda nueces, ni toda pesos, puesto que es imposible que unas se conviertan en otras al juntarse. Así pueden los niños inferir que al juntar los 3 cuartos con los 5 octavos, no es posible que, por ese sólo hecho, se conviertan los primeros en octavos, ni los segundos en cuartos, ni unos y otros en doceavos; y que por tanto, ''no se pueden sumar los quebrados propuestos.''

Llamando luego la atención sobre las fracciones del primer problema, se preguntará porqué en aquel caso la operación resultó tan fácil; los niños dirán que porqué se trataba de puros octavos, y luego se les sugerirá la idea de que si en el 2° problema se logra que todos sean octavos también resultará muy fácil. Se hace que ellos mismos encuentren cuantos octavos hay en los ¾ cuartos, que sustituyan este quebrado y ejecuten la suma, llegando de esa manera á la regla de que, "para sumar quebrados, se hace que tengan el mismo denominador y luego se suman los numeradores.

5° "Proponer un problema en que los quebrados no sean reductibles sino á una especie diferente de la de cada uno de ellos."

El maestro pondrá á los niños un problema como el siguiente: un tejedor ha hecho en un día ¾ de pieza de una tela y al siguiente día ⅔ ¿cuánto ha hecho en los dos días?

Los niños verán que se necesita sumar esos dos quebrados, pero que antes es preciso hacer que sean de la misma especie, y el maestro les llamará la atención sobre què ni los tercios se pueden reducir á cuartos ni éstos á tércios, y que, por lo tanto, hay que buscar una especie de quebrados á que se puedan reducir unos y otros.

Hará que los niños investiguen guiados por él á que puedan reducirse los cuartos; para ello traza en el pizarrón una raya dividida en cuartos — | — | — | — y luego en la parte inferior, hace dos partes de cada cuarto, y preguntando á los niños, hace que observen que las nuevas partes son octavos.

Luego en la misma raya hace tres partes de cada cuarto,

son doceavos, luego cuatro etc., apuntando en el pizarrón los números 8, 12, 16, 20 para que los niños recuerden que los cuartos pueden reducirse á octavos, doceavos, dieciseisavos, etc.

Del mismo modo y apuntando la lista de números correspondientes, hace que se fijen en que los tercios se pueden reducir á sextos, novenos, doceavos, quinceavos, etc., para que vean que el número 12 es el único que se encuentra en ambas listas.

Con esto puede ya hacerse la reducción, procurando que los niños mismos, encuentren que ¼ tiene $\frac{3}{12}$ y los ¾ tienen $\frac{9}{12}$ que ⅓ tiene $\frac{4}{12}$ y los ⅔ equivalen á $\frac{8}{12}$ efectuando después la suma según la regla ya aprendida.

6° "Proponer poblemas en que entren tres diferentes especies de fracciones."

Si suponemos que en el problema propuesto haya que sumar ½, ⅔ y $\frac{3}{5}$, se formarán las listas correspondientes á cada quebrado: los medios pueden reducirse á 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32 avos etc., los tercios 6, 9, 12, 15 avos etc., los quintos 10, 15, 20, 25, 30, 35, avos etc.

Los niños verán luego que la especie á que pueden reducirse los tres quebrados, son los treintavos, se hará la reducción y luego la suma.

Esto parece muy largo y muy entretenido; pero téngase en cuenta que lo proponemos solamente para el principio y como el único medio de hacer que los niños realicen, cuando se les enseña, la mayor cantidad posible de trabajo, reservándose el maestro la dirección nada más, que en esta materia es en rigor todo lo que le corresponde.

Así se familiarizan los niños con el valor relativo de las diversas partes del entero, y hasta pueden comprobar ellos mismos si aciertan ó no haciendo con una raya lo que han visto que ejecuta el maestro.

Por otra parte, calculando de esta manera, los niños pueden resolver fácilmente los ejercicios abstractos que sobre sumas de quebrados se les pongan, y el maestro podrá pronto prescindir de esta manera de ejecutar las sumas, pues que los niños estarán muy presto en aptitud de encontrar mentalmente la especie á que conviene hacer la reducción; pero en todo caso ésto no puede ser al principio.

Además es conveniente hacer la reducción en los primeros problemas, como indicamos al principio, porque á parte de ser el modo más sencillo, con ser largo se presta para que cuando los niños aprendan la reducción á un mismo denominador conforme á la regla que el texto trae, comprendan y aprecien mejor sus ventajas.

Resta solo advertir que del 2° ejercicio en adelante conviene hacer varios problemas, antes de pasar el número siguiente para que los niños vayan sobre seguro.

Análogamente puede enseñarse á los niños la resta de quebrados, procurando lo mismo que en la suma, graduar las dificultades y que "los niños vayan infiriendo por partes la regla que se les quiere dar á conocer.

Resta de quebrados.

Dijimos ya que la resta de los quebrados puede enseñarse de un modo análogo á la suma, y por lo tanto, sólo indicaremos aquí el órden que debe seguirse:

1° "Proponer un problema mental con quebrados de la misma especie."

2° Escritura del mismo problema.

3° Manera como se encontró la solución para inferir la regla en parte, como se hizo al tratar de la suma."

4° "Proponer (para resolver por escrito) un problema con quebrados de diferentes especies; pero que sean fácilmente reductibles á una de ellas" para completar la inferencia de la regla.

5° "Proponer un problema en que los quebrados no sean reductibles, sino á una especie diferente de la de cada uno de ellos."

Como este plan y los correspondientes ejercicios son en todo análogos á los que se hicieron en la suma, conviene en cada una de las dificultades que los niños encuentren, llamarles la atención sobre la manera cómo procedieron antes, para que por analogía descubran lo que debe hacerse, sirviéndose de ellas no sólo para recordar y afirmar lo aprendido anteriormente; sino para poner en práctica el principio de "ir de lo conocido á lo desconocido."

Exactamente el mismo orden que en la suma de fracciones, puede seguirse tratándose de la misma operación con los números mixtos:

Así se familiarizan los niños con el valor relativo de las diversas partes del entero, y hasta pueden comprobar ellos mismos si aciertan ó no haciendo con una raya lo que han visto que ejecuta el maestro.

Por otra parte, calculando de esta manera, los niños pueden resolver fácilmente los ejercicios abstractos que sobre sumas de quebrados se les pongan, y el maestro podrá pronto prescindir de esta manera de ejecutar las sumas, pues que los niños estarán muy presto en aptitud de encontrar mentalmente la especie á que conviene hacer la reducción; pero en todo caso ésto no puede ser al principio.

Además es conveniente hacer la reducción en los primeros problemas, como indicamos al principio, porque á parte de ser el modo más sencillo, con ser largo se presta para que cuando los niños aprendan la reducción á un mismo denominador conforme á la regla que el texto trae, comprendan y aprecien mejor sus ventajas.

Resta solo advertir que del 2° ejercicio en adelante conviene hacer varios problemas, antes de pasar el número siguiente para que los niños vayan sobre seguro.

Análogamente puede enseñarse á los niños la resta de quebrados, procurando lo mismo que en la suma, graduar las dificultades y que "los niños vayan infiriendo por partes la regla que se les quiere dar á conocer.

Resta de quebrados.

Dijimos ya que la resta de los quebrados puede enseñarse de un modo análogo á la suma, y por lo tanto, sólo indicaremos aquí el órden que debe seguirse:

1° "Proponer un problema mental con quebrados de la misma especie."

2° Escritura del mismo problema.

3° Manera como se encontró la solución para inferir la regla en parte, como se hizo al tratar de la suma."

4° "Proponer (para resolver por escrito) un problema con quebrados de diferentes especies; pero que sean fácilmente reductibles á una de ellas" para completar la inferencia de la regla.

5° "Proponer un problema en que los quebrados no sean reductibles, sino á una especie diferente de la de cada uno de ellos."

Como este plan y los correspondientes ejercicios son en todo análogos á los que se hicieron en la suma, conviene en cada una de las dificultades que los niños encuentren, llamarles la atención sobre la manera cómo procedieron antes, para que por analogía descubran lo que debe hacerse, sirviéndose de ellas no sólo para recordar y afirmar lo aprendido anteriormente; sino para poner en práctica el principio de "ir de lo conocido á lo desconocido."

Exactamente el mismo orden que en la suma de fracciones, puede seguirse tratándose de la misma operación con los números mixtos:

1 ° "Problema mental, explicando los niños la manera cómo encontraron la solución."

2 ° "El mismo problema por escrito, aplicando la regla y enunciándola después.

Supongamos que se propone á los niños para resolver mentalmente un problema como este: ¿cuánto miden juntos dos retazos de tela, de las cuales uno tiene $4\frac{3}{5}$ metros y el otro $5\frac{4}{5}$?

Como los niños están convenientemente ejercitados en el cálculo mental con quebrados, fácilmente hallarán la solución de que los retazos miden 10 metros y $\frac{2}{5}$; y el maestro los invitará á que expresen la manera como encontrarón la solución, haciendo que se fijen en que sumaron el 4 y el 5 (los enteros) y luego los $\frac{3}{5}$ y $\frac{4}{5}$ (los quebrados) para reunir después las dos sumas.

3 ° "Problemas en que los quebrados de los mixtos sean de diferente especie."

4 ° "Problemas en que entren tres ó más sumandos."

Puede procederse de la misma manera en la resta de números mixtos, teniendo sin embargo cuidado de graduar los problemas del modo siguiente:

1 ° "Que el quebrado del minuendo sea mayor."

2 ° "Que sea menor el quebrado del minuendo."

Para que los niños descubran como se hace para poder efectuar la operación en este caso, se les llama la atención sobre el artificio de que nos valemos en los enteros, de pedir una unidad de la especie superior inmediata; y conviene que hagan un problema de enteros con esta condición, para preguntar luego cual es la especie mayor, inmediata al quebrado, en el problema de mixtos, y hacer que descompongan en quebrado una unidad.

3 ° "Que no haya quebrado en el minuendo."

Aquí se les puede hacer notar, que en el caso anterior fué necesario descomponer una unidad del minuendo porque el quebrado era menor que su correspondiente del sustraendo, y que no habiendo quebrado, con mucha mayor razón deberá hacerse la descomposición referida.

Reducción á un mismo denominador.

Principios en que se funda.

(A)

1 ° Se dicta un quebrado por ejemplo $\frac{3}{5}$ y se dice á los niños que multipliquen el numerador de ese quebrado por 4 en esta forma $\frac{3}{5}\times 4=\frac{12}{5}$

2 ° Se llama la atención de los niños sobre el resultado de la operación anterior, preguntando si el quebrado que resultó es mayor ó menor que el que se dictó. Los niños dirán que es mayor y entónces se hará que se fijen en el "número de veces" que lo es.

3 ° Se dictan otros quebrados por ejemplo: ⅔ y $\frac{5}{6}$ y que multipliquen los numeradores por 6 en el primero, y por 3 en el segundo, llamando la atención de los niños al fin de cada operación, sobre el cambio de valor que sufrió el quebrado, como en el número 2. °

Después de hechas las tres operaciones anteriores (que se dejan escritas en el pizarrón), se hace que los niños se fijen en que tanto en la primera como en las otras dos, se multiplicó el numerador del quebrado y este se hizo mayor.

5° Se preguntará en seguida por cuanto se multiplicó el numerador en el primer quebrado y cuántas veces mayor se hizo, las mismas reflexiones se les hacen respecto de las otras dos operaciones, para llevar á los niños á estas dos conclusiones:

I. Cuando se multiplica el numerador de un quebrado, éste se hace mayor, (se infiere después del segundo punto y se repite en este lugar.)

II. Si se multiplica por 4, se hace 4 veces mayor, si por 6, seis veces, etc., según el número por que se multiplique.

6° Dar á los niños un quebrado cualquiera para que lo hagan cierto número de veces mayor, ejemplo: $\frac{4}{5}$ hecho 12 veces mayor $=\frac{48}{5}$

Después de varios ejercicios como el anterior los niños pueden llegar á estas otras formas de la primera y segunda conclusiones: Para hacer cierto número de veces mayor un quebrado se multiplica el numerador.

Si se quiere hacer 12 veces mayor, se multiplica por 12, etc.

8° Problemas en que se aplique lo anterior: 1 litro de trigo pesa 1 kilo y $\frac{1}{5}$ ¿cuánto pesan 8 litros? $=\frac{6\times 8}{5}=\frac{48}{5}$ $=9\frac{3}{5}$ kilos.

(*B.*)

1° Se dicta un quebrado, por ejemplo: $\frac{2}{3}$ y se dice á los niños que multipliquen el denominador por 4 en esta forma $\frac{2}{3\times 4}=\frac{2}{12}$.

2° Se llama la atención de los niños sobre el resultado de la operación anterior, preguntado si el quebrado que resultó es mayor ó menor que el que se dictó, para lo cual basta hacerlos que se fijen en el valor de los doceavos y en el de los tercios. Los niños dirán que es menor, y fijándose en los doceavos que salen de un tercio, se hará que observen "cuantas veces" menor que el $\frac{2}{3}$ es el $\frac{2}{12}$.

3° Se dictan otros quebrados, v. g., $\frac{3}{4}$ y $\frac{1}{2}$ y que los niños multipliquen los denominadores, en el primero por 5 y en el otro por 8, llamando su atención al fin de cada operación sobre si el quebrado que resulta es mayor ó menor y cuántas veces lo es, comparado con el que se dictó. Para ello no hay más que comparar los veinteavos y cuartos y los dieciseisavos y medios; los niños encontrarán fácilmente la relación.

4° Dejando escritas las tres operaciones anteriores, se hace que los niños se fijen en que en los tres casos se multiplicó el denominador del quebrado y éste se hizo menor.

5° Preguntando en seguida por cuánto se multiplicó en cada caso y cuántas veces menor se hizo el quebrado, los niños llegan á estas conclusiones.

I. Siempre que se multiplica el denominador de un quebrado éste se hace menor.

II. Si se multiplica por 4 se hace 4 veces menor, si por 8, 8 veces etc., según el número por que se multiplique.

6° Dar á los niños un quebrado cualquiera para que lo hagan cierto número de veces menor, por ejemplo $\frac{3}{8}$ hecho 5 veces menor, $\frac{3}{8 \times 5}\ \frac{3}{40}$

Después de varios ejercicios como el anterior los niños pueden llegar á estas otras dos formas de las conclusiones anteriores: Para hacer cierto número de veces menor un quebrado se multiplica el denominador.

Si se quiere hacer 5 veces menor se multiplica por 5 etc.

7° Problemas en que se aplique lo anterior: 4 metros de manta importan $\frac{3}{5}$ de peso ¿cuánto vale 1 metro? $\frac{3}{5 \times 4}=\frac{3}{20}$ de peso.

(C.)

1° Se dicta un quebrado, v.g. $\frac{5}{7}$ y se hace que los niños multipliquen por 3 el numerador y luego el denominador en esta forma $\frac{5 \times 3}{7 \times 3}=\frac{15}{21}$

2° Se llama la atención de los niños sobre el resultado de la operación anterior, para que observen que, por haber multiplicado el numerador por 3, el quebrado debe haberse hecho 3 veces mayor, y por haber multiplicado el denominador por 3 debe haberse hecho 3 veces menor y que si una cosa se triplica primero y se parte luego por 3 queda como al principio: el quebrado no cambia de valor.

Se dictan luego otros quebrados, se multiplican sus dos términos por un mismo número y se hacen las mismas reflexiones para que vean que en los nuevos casos "los quebrados no han cambiado de valor."

4° Recapitulando sobre lo hecho, ven los niños que en el primer quebrado se multiplican el numerador y denominador por un mismo número y el quebrado no cambia de valor; que en los otros casos sucedió lo mismo y llegan á esta conclusión: Cuando se multiplican los dos terminos de un quebrado por un mismo número, el quebrado no cambia de valor.

Para que los niños infieran, qué le pasa á un quebrado cuando se divide el numerador, qué cuando se divide el denominador y qué cuando se dividen los términos por un mismo número, se procederá de modo análogo á como se procedió en los incisos A. B. y C. respectivamente.

Reducción á un mismo denominador.

1° Se dictan como para sumar tres quebrados, ejemplo: $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}$. Los niños probablemente no encontrarán que pueden reducirse á sesenta avos, y el maestro propondrá que den otra forma al primer quebrado, multiplicando sus dos términos por 4 y por 5 así:

$$\begin{array}{l} \underline{2} \times 4 = 8 \times 5 = \underline{40} \\ 3 \times 4 = 12 \times 5 = 60 \end{array}$$

Se dará otra forma al segundo quebrado así:

$$\begin{array}{l} \underline{3} \times 3 = 9 \times 5 = \underline{45} \\ 4 \times 3 = 12 \times 5 = 60 \end{array}$$

Al tercero así:

$$\begin{array}{l} \underline{4} \times 3 = 12 \times 4 = \underline{48} \\ 5 \times 3 = 15 \times 4 = 60 \end{array}$$

2° Se llamará la atención de los niños sobre que ninguno de los quebrados cambió de valor, porque en todos "se multiplican las dos términos por los mismos números", pero en cambio quedarón los tres con el mismo denominador.

3° Luego se hará que se fijen en los números por los que se multiplicaron los dos términos del primer quebrado, (4 y 5) para que vean que son precisamente los denominadores de los otros; que en el otro pasa lo mismo y en el otro también. De ahí infieren que: "Para reducir los quebrados á un mismo denominador se muttiplican los dos términos de cada quebrado por los denominadores de los otros."

Se llama la atención además sobre la economía de tiempo que se realiza, procediendo de este modo y no formando listas de denominadores como estaban acostumbrados á hacerlo.

Multiplicación de quebrados.

1° Problemas mentales: Se dictará á los niños un problema de fácil solución, v.g.; valiendo 60 centavos el metro de listón ¿cuánto vale $\frac{1}{4}$ de metro? $\frac{1}{2}$? $\frac{1}{5}$? $\frac{1}{8}$? $\frac{1}{12}$? etc. Semejantes al anterior se propondrán otros hasta que los niños no encuentren dificultad para encontrar el valor de cualquiera unidad fraccionaria.

2° Resolver mentalmente problemas como éste: á 24 centavos el kilo de papas ¿cuánto valen $\frac{3}{4}$ de kilo? $\frac{2}{3}$? $\frac{5}{8}$? $\frac{5}{6}$? $\frac{7}{12}$?

Después de cada solución se llamará la atención de los niños sobre cómo hicieron para hallarla, á fin de que se fijen en que buscaron el valor de $\frac{1}{4}$, luego el de $\frac{3}{4}$, el de $\frac{1}{3}$, luego el de $\frac{2}{3}$, el de $\frac{1}{8}$, luego el de $\frac{5}{8}$. etc.

Si en los primeros casos el niño da la solución y no puede explicar la manera como la halló, el maestro esperará que alguno en las otras explique el procedimiento, pero una vez conseguido esto con un alumno, como no puede menos de suceder para los tres ó cuatro casos que se propongan, una vez conseguido, repito, se llamará la atención de los otros niños sobre la explicación dada, se pedirá que alguien la vuelva á decir, y se exigirá en todos los demás problemas mentales de esta clase que se propongan después.

3° Conviene que el maestro pregunte después por vía de recapitulación, cómo hicieron para hallar el valor de $\frac{3}{4}$ de kilo, el de $\frac{2}{3}$ $\frac{5}{8}$ $\frac{5}{6}$ $\frac{7}{12}$ etc., para que los niños repitan, que se buscó primero lo de $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{8}$, etc.

4° Problemas escritos: Se dictará uno de los problemas anteriores para resolverlo por escrito, por ejemplo: valiendo 24 centavos el kilo de papas ¿cuánto valen $\frac{5}{8}$ de kilo?

Conforme á lo que ya tienen aprendido los niños, arreglarán los datos en esta forma:

1 kilo vale 24 cents.
$\frac{5}{8}$,, ?

El maestro preguntará luego como hicieron antes para hallar el valor de $\frac{5}{8}$, los niños contestarán que buscando el de ⅛ y los hará que formulen el siguiente razonamiento:--si un kilo vale 24 centavos un octavo valdrá una cantidad 8 veces menor $\frac{24}{8}$ Preguntará que hicieron después, ellos dirán que buscaron el valor de los ⅝ y continuarán razonando en esta forma: si ⅛ vale $\frac{24}{8}$ de centavo, los ⅝ valdrán una cantidad de dinero 5 veces mayor $\frac{24\times5}{8}=\frac{120}{8}=15$ centavos, que coincide como es natural con lo que hallaron mentalmente.

Se resolverán del mismo modo otros problemas en los cuales se busque el valor de $\frac{3}{4}$ $\frac{5}{6}$ $\frac{8}{9}$ $\frac{7}{12}$ etc., llamando la atención al fin de cada problema sobre el orden seguido, á saber: 1° lo correspondiente á ¼ y luego lo correspondiente á ¾, á $\frac{1}{6}$ y $\frac{5}{6}$, $\frac{1}{8}$ y $\frac{8}{9}$, $\frac{1}{12}$ y $\frac{7}{12}$

Observación: Puede suceder que en el 2° razonamiento, cuando sabiendo que el valor de ¼ se busca el de ¾, los niños por ver el 4 [denominador] digan que ¾ valen una cantidad 4 veces mayor que la correspondiente á ¼. En ese caso el maestro les hace recordar que el 4 indica el nombre de las partes nada más, y que si "una" parte cualquiera vale cierta cantidad "tres" partes ¿cuánto valdrán? los niños contestarán que una cantidad triple, saldrán de su error y se acostumbrarán á hacer la comparación de las cantidades fijándose en los "numeradores" que son los que deben tomarse como punto de comparación, pues los denominadores no indican más que el nomde las partes, y son innecesarios para los razonamientos, siempre que se trate de quebrados que tengan el mismo.

5° Problemas en que el multiplicador sea mixto: A 75 centavos el metro de dril ¿cuánto valen $4\frac{3}{5}$ metro.

Se propondrá á los niños que arreglen los datos y quedarán dispuestos en esta forma.

1 metro vale 75 centavos.
$4\frac{3}{5}$,, ,, ? ,,

Luego se les invitará á que razonen el problema. Puede suceder que algunos propongan hallar el valor de los 4 metros primero y el de los $\frac{3}{5}$ después: en este caso resultan dos problemas semejantes á otros que los niños han hecho ya; el primero, de enteros.

1 metro vale 75 centavos.
4 ,, ,, ? ,,

y el segundo de quebrados

1 metro vale 75 centavos.
$\frac{3}{5}$,, ,, ? ,,

Pero con el fin de que conozcan el otro procedimiento, se les propondrá que busquen de una vez los dos valores juntos. Entónces sucederá que al razonar los niños se confundirán, pues unos tratarán de hallar el valor de todo y dirán que ello vale una cantidad 4 veces mayor que 75, y otros buscarán el valor de $\frac{1}{5}$; pero después razonarán sobre el de $\frac{3}{5}$

Se llamará su atención sobre que ni en uno ni en otro caso se llega al valor de todo; sino al de 4 metros ó al de $\frac{3}{5}$ y que no es eso en lo que se busca.

A continuación el maestro borrará del arreglo primero de los datos, el $\frac{3}{5}$: el problema quedará así:

1 metro vale 75 cantavos.
4 ,, ,, ? ,,

y llamará la atención de los niños sobre que en esa forma, fácilmente lo pueden resolver.

Después escribirá el $\frac{3}{5}$ y borrará el 4, el problema quedará así:

1 metro vale 75 centavos.
$\frac{3}{5}$,, ,, ? ,,

y llamará su atención sobre que también en esa forma lo pueden resolver fácilmente.

Recapitulando los niños dirán que si fuearn puros metros ó puros quintos lo resolverían; les hará que vean que no pueden ser puros metros porque de $\frac{3}{5}$ no sale un metro y les preguntará si no se puede hacer "todo quintos." Contestarán que sí, harán la reducción y el problema quedará así:

1 metro vale 75 centavos.
$\frac{23}{5}$,, ,, ? ,,

Buscarán lo de un quinto, luego lo de $\frac{23}{5}$, el problema quedará resuelto; se llamará después su atención sobre que antes de razonar redujeron los enteros á quebrabrados y se hará que lo repitan.

6° Problemas en que haya mixtos en el multiplicando y multiplicador.

Un hombre gana $2\frac{3}{5}$ pesos al dia ¿cuánto gana en $12\frac{2}{3}$ días?

Se arregla:

En 1 día gana $2\frac{3}{5}$ pesos.
,, $12\frac{2}{3}$,, ? ,,

Por analogía descubren que hay que reducir á quintos arriba, como que hay que reducir á tercios abajo.

7° Resolución de problemas tomando los datos de diferentes casos de la vida práctica.

División de quebrados.

1° Problemas mentales: Se dictará á los niños un problema de fácil solución; ejemplo, valiendo $\frac{1}{4}$ de metro de tela 8 centavos ¿cuánto vale el metro?

Valiendo $\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{7}$ de metro de cinta 5 centavos, ¿á cómo sale el metro?

Semejante á los anteriores se pondrán otros problemas en que "partiendo del valor de cualquier unidad fraccionaria se vaya al del entero,

2° Resolver mentalmente problemas como este: $\frac{2}{3}$ de metro de linón nos han costado 30 centavos ¿á cómo sale el metro?

Valiendo $\frac{4}{5}, \frac{3}{4}, \frac{5}{8}, \frac{6}{7}$ de metro de una tela 60 centavos ¿á cómo sale el metro en cada caso?

Después de cada solución se llamará la atención de los niños sobre la manera como la hallaron á fin de que ob-

A continuación el maestro borrará del arreglo primero de los datos, el $\frac{3}{5}$: el problema quedará así:

1 metro vale 75 cantavos.
4 ,, ,, ? ,,

y llamará la atención de los niños sobre que en esa forma, fácilmente lo pueden resolver.

Después escribirá el $\frac{3}{5}$ y borrará el 4, el problema quedará así:

1 metro vale 75 centavos.
$\frac{3}{5}$,, ,, ? ,,

y llamará su atención sobre que también en esa forma lo pueden resolver fácilmente.

Recapitulando los niños dirán que si fuearn puros metros ó puros quintos lo resolverían; les hará que vean que no pueden ser puros metros porque de $\frac{3}{5}$ no sale un metro y les preguntará si no se puede hacer "todo quintos." Contestarán que sí, harán la reducción y el problema quedará así:

1 metro vale 75 centavos.
$\frac{23}{5}$,, ,, ? ,,

Buscarán lo de un quinto, luego lo de $\frac{23}{5}$, el problema quedará resuelto; se llamará después su atención sobre que antes de razonar redujeron los enteros á quebrabrados y se hará que lo repitan.

6° Problemas en que haya mixtos en el multiplicando y multiplicador.

Un hombre gana $2\frac{3}{5}$ pesos al dia ¿cuánto gana en $12\frac{2}{3}$ días?

Se arregla:

En 1 día gana $2\frac{3}{5}$ pesos.
,, $12\frac{2}{3}$,, ? ,,

Por analogía descubren que hay que reducir á quintos arriba, como que hay que reducir á tercios abajo.

7° Resolución de problemas tomando los datos de diferentes casos de la vida práctica.

División de quebrados.

1° Problemas mentales: Se dictará á los niños un problema de fácil solución; ejemplo, valiendo $\frac{1}{4}$ de metro de tela 8 centavos ¿cuánto vale el metro?

Valiendo $\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{7}$ de metro de cinta 5 centavos, ¿á cómo sale el metro?

Semejante á los anteriores se pondrán otros problemas en que "partiendo del valor de cualquier unidad fraccionaria se vaya al del entero,

2° Resolver mentalmente problemas como este: $\frac{2}{3}$ de metro de linón nos han costado 30 centavos ¿á cómo sale el metro?

Valiendo $\frac{4}{5}, \frac{3}{4}, \frac{5}{8}, \frac{6}{7}$ de metro de una tela 60 centavos ¿á cómo sale el metro en cada caso?

Después de cada solución se llamará la atención de los niños sobre la manera como la hallaron á fin de que obserben que buscaron primero el valor de $\frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{7}$ etc. y después el del metro entero.

En el primer problema tal vez no habrá ningún niño capaz de explicar como procedió; pero después de varios casos no faltará alguno que encuentre la explicación, que se hará repetir por los demás y se exigirá en todos los demás problemas.

3° Recapitulación sobre la manera cómo procedieron en cada uno de los casos del punto anterior, á fin de que los niños repitan que buscaron el valor de ⅓ y luego el del entero, el de $\frac{1}{5}$ y luego el del entero, etc.

4° Problemas escritos: Se dictará uno de los anteriores para resolverlo por escrito, por ejemplo: ⅔ de metro de linón cuestan 30 centavos ¿á cómo sale el metro?

Arreglo de datos:

⅔ de metro valen 30 centavos.
1 ,, ,, ? ,,

Se pregunta cómo hicieron antes para hallar el valor del metro (buscando el de ⅓ y luego el de todo) y que razonen los niños de modo semejante al que se indicó en el número 4 de la multiplicación.

Del mismo modo se resolverán otros problemas en que partiendo del valor $\frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}$, etc., se vaya al del entero, llamando, al fin de cada problema, la atención de los niños sobre el orden que siguieron al razonar, á saber: 1° lo correspondiente á $\frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}$, y luego lo correspondiente al entero.

Conviene además que al lado de uno de estos problemas,

hagan uno de sus semejantes de multiplicar para que vean que sólo se ha invertido el orden:

Multiplicación.	División:
1 metro vale 60 centavos.	$\frac{3}{4}$ metro vale 45 centavos.
$\frac{1}{4}$,, ,, $\frac{60}{4}$,,	$\frac{1}{4}$,, ,, $\frac{45}{3}$,,
$\frac{3}{4}$,, ,, $\frac{60 \times 3}{4}$	1 ,, ,, $\frac{45 \times 4}{3}$.
Se parte de 1 y se va á $\frac{3}{4}$	Se parte de — $\frac{3}{4}$ y se va 1

En los dos se pasa antes por el valor de ¼.

5° Problemas en que haya mixtos en la cantidad superior de la especie del 1, (divisor): ¿A cómo vale el litro de leche, costando $4\frac{3}{5}$ litros 69 centavos?

Arreglo:—

$4\frac{3}{5}$ litro vlaen 69 centavos.
1 ,, ,, ? ,,

Se hacen las mismas reflexiones y preguntas que se indicaron en los problemas de multiplicar mixtos, para que los niños vean que si fueran los de arriba puros litros, se podría hallar fácilmente el valor de 1 y si fueran puros quintos, también, (buscando lo de $\frac{1}{5}$ y luego lo del litro) para que descubran que se debe hacer la reducción. Una vez hecha, se pasa á razonar como se indicó anteriormente y si los niños yerran al hacer las comparaciones, se procede como se dijo ya al tratar del cuarto punto (observación) de la multiplicación.

6° Problemas en que haya mixtos en las dos cantidades superiores (dividendo y divisor.)

Costando $2\frac{3}{4}$ metros de un género \$ $12\frac{4}{5}$ á cómo vale el metro?

Arreglo: $2\frac{3}{4}$ m. valen \$ $12\frac{4}{5}$
1 ,, ?

Reducción: $\frac{11}{4}$ m. valen \$ $\frac{64}{5}$
1 ,, ,, ?

Razonamiento: si $\frac{11}{4}$,, ,, \$ $\frac{64}{5}$
$\frac{1}{4}$,, ,, $\frac{64}{5 \times 11}$
1 ó $\frac{4}{4}$,, $\frac{64 \times 4}{5 \times 11}$

7° Resolución de problemas, tomando los datos de diferentes casos de la vida práctica.

Regla de tres con quebrados.

1° Problema: Un individuo ha comprado $4\frac{3}{4}$ de paño en 30 pesos; después se la ofrece comprar $2\frac{1}{3}$ de paño de la misma clase ¿cuánto debe pagar?

2° Arreglo de los datos:

$4\frac{3}{4}$ metro valen 30 pesos.
$2\frac{1}{3}$,, ,, ? ,,

3° Reducción:

$\frac{19}{4}$ metro valen 30 pesos.
$\frac{7}{3}$,, ,, ? ,,

4° Razonamiento: Cómo los niños están, para cuan llegan á la regla de tres, bastante ejercitados en el razomiento, por conclusiones, fácilmente descubren que del valor de $\frac{19}{4}$ pueden pasar al de $\frac{1}{4}$ y de éste al de varios cuartos; pero no al de tercios.

Con ésto, ellos descubren que si fueran cuartos los de abajo, el razonamiento sería fácil, pues se buscaría la de "uno" y luego lo de "siete."

También ven que si los de arriba fueran tercios no encontrarían dificultad en el razonamiento. El maestro puede hacer que formulen el razonamiento que harían en cada suposición, poniendo primero puros cuartos y luego puros tercios:

$\frac{19}{4}$ m. valen \$ 30 — $\frac{19}{3}$ m. valen \$30
$\frac{7}{4}$,, ,, ? — $\frac{7}{3}$,, ,, ?

5° Después de haber llamado la atención de los niños sobre lo fácil que resulta razonar siendo puros cuartos ó puros tercios, y de haberlos hecho formular los razonamientos, se vuelve al 1er. problema para que se fijen en que los de arriba son cuartos y los de abajo tercios, y que propongan lo que debe hacerse para poder razonar.

En vista de que los tercios no son reductibles á cuartos ni éstos á tercios, es casi segnro que los niños acordándose de lo que han hecho en la suma, dirán que se deben reducir á doceavos.

El problema quedará así:

$\frac{57}{12}$ m. valen \$ 30
$\frac{28}{12}$,, ,, ?

y se razonaría buscando el valor de un doceavo ($\frac{30}{57}$) y luego el de 28 que sería $\frac{30 \times 28}{57}$

6° Repetición del problema y aplicación del procedimiento á otros semejantes.

7° Una vez que los niños estén ya diestros en resolver los problemas de regla de tres, por el procedimiento anterior de reducir los antecedentes á un mismo denominador, puede dárseles á conocer la otra manera de proceder.

I. Problema: Un individuo trabajó $2\frac{3}{5}$ días, y saca de raya 273 centavos; después trabajó $4\frac{2}{3}$ días, ¿cuánto se le debe pagar?

II. Arreglo; en $2\frac{3}{5}$ d. gana 273 cents.
,, $4\frac{2}{3}$,, ?

III. Reducción de los enteros:

en $\frac{13}{5}$ d. gana 273 cents.
,, $\frac{14}{3}$,, ,, ?

IV. Los niños propondrán en seguida reducir á quinceavos, y el maestro les dirá que en esta vez desea que hallen la solución del problema sin necesidad de hacer TAL REDUCCION. Los niños dirán probablemente que no es posible para ellos.

V. El maestro dictará este problema: ¿Cuánto gana al día un individuo que en $2\frac{3}{5}$ días gana 273 centavos?

Los niños lo arreglarán y razonarán perfectamente por ser esta un problema de los ya conocidos:

en $2\frac{3}{5}$ días gana 273 centavos,
,, 1 ,, ,, ?

Reduciendo en $\frac{13}{5}$ gana 273
en 1 día ?

Razonando: en $\frac{13}{5}$ gana 273
,, $\frac{1}{5}$,, $\frac{273}{13}$
en 1 día $\frac{273 \times 5}{13} = \frac{1365}{13}$

VI. El maestro dictará:

¿Cuántó gana en $4\frac{2}{3}$ días un individuo que gana al día $\frac{1365}{13}$ de centavo?

Como también éste es un problema de los ya conocidos para los niños, no vacilarán en arreglarlo así:

en 1 día gana $\frac{1365}{3}$ cents.
en $4\frac{2}{3}$?

Redneiendo en 1 día gana $\frac{1365}{13}$ cents.
en $\frac{14}{3}$,, ?

Razonando: si en 1 día gana $\frac{1365}{13}$
en $\frac{1}{3}$ de día gana $\frac{1365}{13 \times 3}$
y en $\frac{14}{3}$,, ,, $\frac{1365 \times 14}{13 \times 3}$

Llamando luego la atención de los niños, sobre que al principio de estos problemas se sabía lo que ganaba en

$2\frac{3}{5}$ días y al último se supo lo que ganaba en $4\frac{2}{3}$ días, ven que el problema se pudo resolver sin necesidad de reducir á quinceavos, BUSCANDO PRIMERO LO CORRESPONDIENTE A UN DIA: es decir haciendo de él, dos problemas como los que ya conocían

Esto no viene siendo más que lo mismo que se indicó al tratar de la regla de tres con enteros: El niño ve que se necesita tomar el 1 como punto de comparación, por que la unidad se puede comparar fácilmente con cualquiera clase de quebrados (cuartos, quintos, tercios, etc.) y éstos no todos son fácilmente comparables entre sí.

8° Problemas aplicando el nuevo procedimiento.

Propiedades de las decimales.

1°— 4'5 varas es igual á $4\frac{1}{2}$ varas.
4'50 ,, ,, ,, ,, $4\frac{1}{2}$,,
4'500 ,, ,, ,, ,, $4\frac{1}{2}$,,

Se hace que los niños lean la primera cantidad de décimas [4 varas, 5 décimas] y preguntando las décimas que tiene la vara, los niños ven que es igual á 4 varas y media. Se hace lo mismo con las otras para que vean que sigue siendo igual á 4 varas y media.

2° Se dictan otras cantidades decimales, v. g, 4'3 varas y preguntando á los niños las centésimas que tiene la décima, descubren que se puede escribir la misma cantidad en esta forma: 4'30 varas, [4 varas, treinta centésimas.] Del mismo modo descubren que 4'3 equivale á 4'300, etc.

Las decimales no cambian de valor cuando se les agregan ceros.

3° 8'4 varas, reducido á décimas=84 décimas de vara, corriendo la coma á la derecha=84 varas, la vara es 10 veces mayor que la décima, la cantidad se hizo diez veces mayor; 4'25 de vara, reducido á centésimas=425 centésimas de vara.

Corriendo la coma dos lugares=425 varas, la vara es cien veces mayor que la centésima, la cantidad se hizo cien veces mayor.

Ejemplos con milésimas, etc,

Las decimales aumentan de valor corriendo la coma á la derecha. Si se corre un lugar la cantidad se hace diez veces mayor, si dos, cien veces, etc.

4° 235'3 varas, reducido á décimas=2353 décimas de vara.

Corriendo la coma un lugar á la izquierda es igual á 23'53=2,353 centésimas. La centésima es diez veces menor que la décima, la cantidad se hizo diez veces menor.

Corriéndola dos lugares es igual á 2'353=2,353 milésimos de vara. La milésima es cien veces menor que la décima, la cantidad se hizo cien veces menor.

Las decimales disminuyen de valor cuando se corre la coma á la izquierda. Si se corre un lugar la cantidad se hace diez veces menor, si dos, cien veces menor, etc.

Cálculo con decimales.

SUMA.

1° Se dicta un problema v. g. Un sastre tiene tres piezas de paño; una tiene 28'75 metros, otra 37'4 metros y la otra 48'984 metros. ¿Cuánto tienen entre los tres?

Con un problema semejante de enteros se hace que los niños descubran que el anterior es de sumar.

Se pregunta luego en que forma se colocan las cantidades para sumar [unas debajo de otras] y qué colocación se da á cada cifra en particular, para que los niños recuerden que han de quedar las unidades debajo de las unidades, etc., y llamando su atención sobre cual es la cifra de las unidades en cada una de las cantidades decimales, se les invita á que las coloquen para sumar, de manera que se correspondan las unidades de todas ellas.

Las cantidades quedarán así:

$$\begin{array}{r} 28'75 \\ +37'4 \\ +48'984 \end{array}$$

2° Resolución: Se invita á los niños á que empiecen á ejecutar la operación y si vacilan por que ven que el 4 de la última cantidad y el 5 de la superior quedan adelantados hacía la derecha, se les llama la atención sobre las cifras de las décimas y centésimas para que observen que quedan en línea, y aún se les puede hacer que cubran con ceros los lugares desocupados y ejecuten la operación.

Después se les hace que se fijen en que podían no haber

escrito los ceros y sumar las cifras de cada columna, donde hubiere, sin alterar por eso la suma.

Al hacer la operación se procurará que den el nombre de las unidades que van sumando (milésimas, centésimas ó décimas) y digan lo que se escribe y lo que se deja pendiente para la columna que sigue y cuando lleguen á los enteros que escriban la coma para separarlos de las decimales.

3° Se llamará la atención de los niños sobre la manera de sumar las decimales y la de sumar enteros para que enuncien la regla más ó menos en esta forma.

Las decimales se suman como los enteros, teniendo cuidado de poner la coma en el lugar de las unidades.

RESTA.

1° Problema con igual número de decimales en el minuendo y el sustraendo.

Por analogía con la suma, los niños colocan una debajo de otra las cantidades, y ejecutan la operación dando los nombres de las unidades que cada cifra representa, y colocando la coma en su lugar.

2° Analogía que este presenta con la resta de enteros.

3° Problemas en que haya más decimales en el sustraendo que en el minuendo; ejemplo:

$$\begin{array}{r} 286'325 \\ -32'4 \end{array}$$

Los niños ven que debajo de las milésimas y centésimas, no hay nada que quitar y ejecutan con facilidad la resta.

4° Problemas en que haya más decimales en el minuendo que en el sustraendo. Ejemplo:

$$\begin{array}{r} 35'4 \\ -12'286 \end{array}$$

Se llama la atención de los niños sobre que arriba no hay milésimas, ni centésimas de donde quitar, que es como si dijéramos cero centésimas, cero milésimas; y como las decimales no cambian de valor al agregar ceros, se pueden poner dos al lado de las cinco décimas, quedando la operación así:

$$\begin{array}{r} 35'400 \\ -12'286 \\ =23'114 \end{array}$$

procediendo luego como en los enteros y colocando la coma en su lugar.

5° Analogía que en todos los casos presentan las decimales con los enteros.

Multiplicación.

1° Problema: Valiendo el metro de casimir \$5.75 cents. ¿cuánto valen 7'4 metros?

2° Arreglo: 1 m. vale 575 cents.
7'4 ,, ?

3° Razonamiento: Los niños no encontrarán por sí la manera de razonar; pero el maestro dictará para que lo arreglen en otra parte del pizarrón un problema de quebrados v. g. Valiendo 575 centavos el metro de casimir, ¿cuánto valen 6¾ metro?

Pide á los niños que arreglen este problema en frente del otro. Quedará así:

1 m. vale 575	1 m. vale 475
3¾ ,, ?	7'4 ,, ?

Preguntará después: ¿qué hacen primero en el de quebrados? [reducir á cuartos] ¿qué harán en el otro? [reducir á decimas, son 74] qué hacen después de reducir á cuartos en el de quebrados? [buscar el valor de ¼] en el otro? (buscar el valor de una décima) ¿qué hacen por fin en el de quebrados? [buscar el valor de $\frac{15}{4}$] en el otro? [buscar el valor de 74 décimas]

Con esto ya podrán razonar el problema de decimales así:

1 m: vale 575

1 décima $\frac{575}{10}$

74 décimas $\frac{575 \times 74}{10}$

DIVIDIR.

1° Problema: En 7'15 horas ha arrojado una fuente 2,850 litros de agua ¿cuánto arroja por hora?

Arreglo: en 7'15 horas arroja 2,850 litros
en 1 ,, ?

Razonamiento: Es muy probable que los niños digan desde luego, que hay que reducir las horas á centésimas y luego buscar lo de una centésima para hallar en seguida lo de una hora, por analogía con los problemas hechos antes; pero si no sucediere así, se propone un problema de quebrados semejante, y que los niños lo arreglen frente al de decimales, v. g., en 4⅔ horas ha arrojado una fuente 1440 litros de agua ¿cuánto arroja por hora? Quedarán ambos así:

en 4⅔ h. arroja 1450 lit. en 7'15 h. arroja 2850 lit.
en 1 ,, ? en 1 ,, ?

2° Procediendo luego por comparación como se hizo al tratar de los problemas de multiplicar decimales, verán los niños; que así como en el de quebrados se reduce á tercios, se busca lo de un tercio y luego lo de una hora que tiene tres tercios; en el de decimales, se reduce á centésimas, se busca lo de una centésima y luego lo de la hora que tiene 100 centésimas.

Con ello podrán los niños razonar en esta forma:

en 715 centésimas de hora arroja 2850 litros

en 1 ,, ,, ,, $\frac{2850}{715}$,,

en 1 hora ó cien centésimas $\frac{2,850 \times 100}{715}$

3° Repetición del problema y resolución de otros semejantes

Regla de tres con decimales.

1° Problema: ¿Cuánto recorre en 2'35 horas un viajero que en 5'4 horas ha andado 27 kilómetros?

Arreglo; en 5'4 horas anda 27 kilómetros
en 2'35 ?

Razonamiento: Los niños propondrán hacer la reducción á puras decimales en ambas partes; el maestro llamará su atención sobre que no obstante eso, arriba tenemos décimas y abajo centésimas y necesitamos igual especie arriba y abajo para razonar: Ellos propondrán entónces hacer todo centésimas y el problema quedará así:

en 540 centésimas de hora anda 27 kilómetros
en 235 ,, ,, ,, ,, ?

y razonarán buscando lo de una centésima,

$\frac{27}{540}$ y luego lo de 235 $\frac{27 \times 235}{540}$

Si sucediere que al indicar las operaciones los niños pusieren la coma, se les hará notar que no han dicho 5'40 centésimas, al buscar el camino recorrido en una centésima de hora, sino una cantidad 540 veces menor que 27 y por tanto no deben dividir por 5'40 sino 540. Lo mismo se hará en el siguiente razonamiento, si pusieren coma en el 235.

Aquí también se les puede hacer ver la analogía que esto presente con los quebrados; pues en aquellos nos fijamos en los numeradores al razonar y consideramos los denominadores como palabra (nombre de las partes) y aqui nos fijamos también en el número de partes y la coma solo sirve para saber como se llaman (denominador.)

Es decir, hay que llamar la atención de los niños sobre la relación que es un número entero, á parte de la cantidad que es decimal, para que vean que del mismo modo que "si 235 varas valen cierta cantidad UNA vale otra cantidad 235 veces menor" si 2'35 DOSCIENTAS TREINTA Y CINCO centésimas valen cierta cantidad, UNA vale otra cantidad 235 (no 2'35) veces menor.

Continuación de las decimales.

Después de resolver varios problemas como los anteriores, puede llamarse la atención de los niños sobre que hasta el momento, en los de sumar y restar decimales se ha procedido como con los enteros, y en los otros como con los quebrados; pero que aún en estos últimos puede procederse con las decimales como si fueran enteros y que ESO PRECISAMENTE (el procederse como en los enteros) constituye la ventaja de la enseñanza y uso de las decimales.

Se propondrá en seguida un problema v. g. Valiendo 4'50 pesos el metro de paño ¿cuánto valen 6'3 metros?

Arreglo: 1 m. vale 4'50
6'3 ,, ?

Se preguntará á los niños cómo razonarían si fueran sólo 6 metros:

1 m. vale 4'50
6 valen una cantidad 6 veces mayor que 4'50=4'50×6=27'00.

El maestro les dirá en seguida que así como siendo 6 metros, el valor es 6 veces mayor que 4'50, siendo 6 metros 3 décimas, el valos es 6 veces 3 décimos, mayor que 4'50, es decir: 4'50
×6'3

Hará que luego se fijen los niños en que van á multiplicar 4'50×6'3 y que esa es la dificultad por que nunca lo han hecho.

En seguida con varios ejemplos con enteros, les hace ver que al multiplicar por 6, 7, 10, 15, 18, etc., una cantidad no hacemos más que tomar 6, veces, 7 veces, 10, 15 y 18 veces, la cantidad dicha.

Luego fijándose en el problema escrito al principio, les hará ver que quiere decir TOMAR 6 VECES el 4'50 y 3 décimos más, y que ello es lo mismo que tomar 63 décimas partes del 4'50 [pues 63 décimas es igual á 6'3.]

Hará que recuerden cómo se tomó la décima parte de una cantidad (hacerla diez veces menor] y correrá la coma un lugar á la izquierda de [0'450] y luego tomando eso 63 veces. resultará

$$\begin{array}{r} 0'450 \\ \times 63 \\ \hline 1'350 \\ 2700 \\ \hline 28'350 \end{array}$$

Colocando la coma donde corresponde según la cantidad superior, pues siendo milésimas la cantidad que se repite 63 veces, milésimas será el producto.

Ejecutando varios problemas como éste, con centésimas luego en el multiplicador y haciendo que los niños corran antes la coma en el multiplicando para proceder como en los enteros después, facilmente infieren la regla [correr arriba la coma tantos lugares como decimales haya abajo y multiplicar como si el multiplicador fuera entero].

Después contando las cifras decimales del multiplicando, las del multiplicador y las del producto, pueden ver que hay en éste tantas como hay en uno, más las del otro y se les acostumbra entónces á que ejecuten la operación y corten después las decimales, infiriendo la forma usual de la regla: se multiplica como si fueran enteros y se cortan en el producto tantas cifras decimales, como haya en ambos factores.

Dividir decimales.

1° Se dictan á los niños algunas divisiones con números pequeños, para que observen lo que pasa al cociente cuando se altera el valor de los otros términos:

A— **Dividendo.** **Divisor.**

40 ÷ | 5
8 cociente.

multiplicando el dividendo por 2 = 8,0 | 5
30 16 Dos veces
00
mayor que 8.

Multiplicando por 3 el dividendo = 12,0 | 5
20 24 Tres veces
00
mayor que 8.

Con varios ejemplos los niños infieren que cuando se multiplica el dividendo el cociente se hace mayor, tantas veces como se hizo aquel.

B.— 40 | 5
8

Multiplicando el divisor por 2 = 40 | 10
4 Dos veces
menor.

Continuando los ejemplos, los niños infieren que cuando se multiplica el divisor, el cociente se hace menor tantas veces como aquel que se hizo mayor.

C.— 40 | 5
8

Multiplicando los dos términos por 2=80 | 10
8
igual cociente.

Dultiplicando por 3, por 4, por 5 igual.

á 120 | 15 160 | 20 200 | 25
000 8 000 8 000 8 el cociente es igual en todos los casos.

Los niños infieren que cuando se multiplican los dos términos de una división por un mismo número el cociente no se altera.

Observación: Como los niños saben también que una división se puede indicar en forma de quebrado cuyo numerador sea el dividendo y denominador el divisor, se les puede también llamar la atención sobre que ésto es lo mismo que multiplicar los dos términos del quebrado por un mismo número [el quebrado no cambia de valor].

2° Se dicta un problema de dividir decimales: Con $46 se han comprado 6'75 metros de tela ¿á cómo sale el metro?

Arreglo: 6'75 m. valen 46 pesos.
1 ,, ,, ? ,,

Razonamiento: Por analogía con la multiplicación se hará observar á los niños que así como siendo 6 metros dirían que el metro vale una cantidad 6 veces menor que 46 pesos, siendo 6'75 deberán decir 6 veces y 75 centécimas menor que 46 pesos, es decir: 46 | 6,75

Ejecución: Se hará que los niños lean la operación indicada (46 dividido entre 6'75) y se fijen en que el dividendo es entero y el divisor decimal.

Que reduzcan el entero á la especie decimal
46'00 | 6'75

Fundándose en los principios anteriormente dados á conocer, se les pregunta que alteración sufre cada cantidad borrando la coma (las céntésimas se convierten en enteros) y como ellos dirán que se han hecho cien veces mayores ambas, el cociente es lo que debía ser.

Se ejecuta la operación luego como enteros.

Regla de tres.

Los niños han resuelto ya problemas de regla de tres con decimales, reduciendo á la especie de la unidad inferior; pero como en estos otros casos han procedido con las decimales como con los enteros, conviene que resuelvan algunos problemas razonando de la última manera:

Por ejemplo: Un tejedor ha tardado 15 días para tejer 8'75 metros de tela ¿cuánto tardaría en tejer 5' 4metros?

Arreglo:— Para 8'75 m. tarda 15 días.
,, 5'4 ?

Razonamiento: Por analogía con la regla de tres con enteros los niños descubrirán que no son comparables (exactamente) entre sí las dos cantidades y que antes hay que buscar los días que tardó para "un metro." Razonarán pues en esta forma:

Para 8'75 m. tarda 15 dias.

,, 1 $\frac{15}{8'75}$

,, 5'4 $\frac{15 \times 5'4}{8'75}$

Ejecutarán la multiplicación y división aplicando lo aprehendido antes, y verán con esto que en todas las operaciones de decimales se puede proceder como con los enteros; aunque en algunas de ellas se puede también proceder de manera igual que con los quebrados.