3° Hacer objetivamente una división de una cantidad en que las cifras no den cociente exacto. Ejemplo:

$736 \div 2 =$

Se representa la cantidad con 7 tablas, 3 reglas y 6 cubos. Se empieza por repartir las tablas y se ve que alcanzan á cada uno 3 y sobra una tabla, se cambia por reglas y se tienen [10 y 3] 13 reglas, alcanzan cada uno 6 y sobra una regla, se cambia por cubos y se tienen [10 y 6] 16; alcanza cada uno 8. Igual á 368.

No debe olvidarse que cada cuestión debe resultar de un problema.

Para complemento de estas indicaciones sobre la División, véase lo que sobre ésto se dice al tratar del 3er. año.

Razonamiento por conclusiones en el 2° año escolar.

El niño adquiere la idea del número en los objetos, y así nos lo recuerdan constantemente los ábacos que vemos en la escuela, y las indicaciones que hacen á cada paso los mejores pedagogos en artículos y libros, recomendando siempre que los primeros ejercicios aritméticos que se hagan con los niños sean lo más concreto posible, que al principio se ejecuten materialmente las operaciones, con canicas, palitos, monedas, puntos, cruces y rayas, etc.

Avanzando aún más en este sentido, nos parece que, si la idea del número se adquiere en los objetos, la idea de la relación que hay entre las cantidades debe adquirirse también en la forma, pues nada es tan á propósito

como el tamaño de los objetos y la distancia á que se encuentran para que los niños adquieran con exactitud el significado de la expresión de "ser una cosa ó cantidad, tantas veces mayor ó menor que otra."

Ahora bien, en esta comparación que se establece entre las cantidades se funda la resolución razonada de los problemas que se proponen á los niños, v. g.................. 3 metros de una tela valen 45 centavos, 15 metros de la misma valdrán?......................

Los niños dirigidos por el maestro se fijan:

1° En que la cantidad de tela cuyo valor se busca es mayor que la de arriba y por tanto el importe será una cantidad mayor que 45 centavos.

2° Que la cantidad de tela es 5 veces mayor que la otra y su importe deberá serlo también$=45\times5=225$.

Lo mismo exactamente se razonará si sabiendo el valor de un metro, se busca el de 15; sólo que en este caso los niños encuentran muy fácilmente la relación pues "toda cantidad es tantas veces mayor que la unidad, como unidades tiene."

De esto podemos inferir, que el razonamiento que los niños hacen para resolver los problemas en que se procede por CONCLUSIONES, se funda en la proporcionalidad de las cantidades y en la investigación de la releción que existe entre ellas.

Es cierto que muy bien pueden resolverse los problemas de multiplicar en esta forma, v. g., si un metro de género vale 15 centavos, 9 metros valdrán 9 veces 15 centavos ó $15\times9=135$; y las de dividir en esta otra: Si 8 metros cuestan 96 centavos, 1 metro costará la octava parte de 96 igual á $96 \div 8 = 12$ centavos.

Esta manera de razonar, es muy sencilla y muy puesta al alcance de los niños; pero presenta varios inconvenientes que la otra no tiene:

1 ° Por ser tan sencilla precisamente, educa poco, ó nada para hablar con más propiedad, y acostumbrándose los niños desde el principio á decir 8 veces ésto, si el número mayor está abajo, tantas veces menos si el mayor está arriba, se convierte el razonamiento en un MECANISMO puro y rutinario, pues ni se tiene en cuenta la proporcionolidad de las cantidades para indagar si la que se busca ha de ser mayor ó menor que su semejante, ni se hace la comparación entre ellas para saber cuántas veces ha de serlo.

Este inconveniente se pone bien de manifiesto cuando los niños empiezan á resolver problemas de quebrados en el cuarto año; pues siguiendo la costumbre de no comparar, no tienen empacho en decir "si $\frac{28}{5}$ de vara de una tela valen 135 centavos, un quinto vale 5 veces menos."

Este mismo hábito de no establecer la comparación á que nos referimos, hace también que los niños se desentiendan de la especie que representa cada cantidad y no vean la necesidad de que sean de la misma, para poder razonar con ellas; así que, lo mismo que dicen que si 5 libras de arroz valen 40 centavos, una libra vale 5 veces menos, lo mismo dirán "si 5 libras valen 40 centavos, 1 arroba vale 5 veces menos, lo que indica que han aprendido una RUTINA; pero no un razonamiento."

2 ° Resulta deficiente, pues el niño no puede comprender de un modo claro su aplicación á todos los casos que comprende la multiplicación v. g. 10 obreros tardan 15 días en hacer un trabajo, uno cuánto tardará?

Como no se fijan en la proporcionalidad, contestan siguiendo el hábito adquirido "un hombre tarda diez veces menos" exactamente como una vara de cualquiera cosa vale 10 veces menos que 10 varas.

Tampoco pueden aplicarlo á todos los casos que comprende la división v. g,, á $6 la carga de maíz ¿cuántas se compran con 48 pesos? No hay medio de hacerlos razonar cuando se ofrece un problema así, y solamente por no ser difusos no indicamos aquí las mil vacilaciones de los pobres niños y los mil errores á que van á parar en sus esfuerzos por aplicar á la cuestión, el modo de razonar á que estaban acostumbrados. Indicaremos, sí, la aplicación bien sencilla y natural del otro razonamiento:

"Si valiera 1 peso la carga se comprarían 48 cargas, valiendo 6............se comprará una cantidad de cargas 6 veces menor."

Todo ¿porqué? por que no se llama la atención en la PROPORCIONALIDAD de las cantidades, que es la que determina que clase de relación existe entre ellas, que es la que, sacada de la naturaleza de las cosas, HACE LA LUZ en el problema.

Nada más natural, en efecto, que el que trabaja más días saque más raya (en igualdad de circunstancias por supuesto) nada más natural que mucho café importe más que un poco, que un sólo individuo haga menos trabajo que muchos y tarde más tiempo que ellos para concluir una misma obra.

3° Al no aplicar razonamiento igual á los casos de multiplicar y de dividir, se hacen de estas operaciones dos diferentes, no siendo en realidad sino la misma operación invertida, como son inversas la adición y la sustracción.

Podría decirse que así no se aplica razonamiento diferente á la multiplicación y división como aseguramos; pero aunque en el fondo no sea así, en la forma es lo que sucede, pues que así como en la primera dicen, "8 veces tal cantidad" por que ven el ocho abajo, en la segunda tienden á decir "1 vez tal cantidad" por ver abajo el uno, debiéndose esta confusión como hemos dicho antes á que no se hace la comparación referida, ni se ha llamado la atención de los niños sobre la proporcionalidad de las cantidades.

4° No se presta para que los niños infieran de una manera lógica la necesidad y la conveniencia de la reducción á la unidad cuando llegan á la regla de tres, inconveniente que no presenta el otro razonamiento. Por ultimo, la manera de razonar cuya inconveniencia hemos venido mostrando, no se sigue usando cuando los niños llegan á las aplicaciones de la regla de tres; pues entónces razonan generalmente así: si para producir $6 de interés se necesitan $100 de capital, para producir uno se necesita un capital 6 veces menor ó $\frac{100}{6}$ y para producir 75, otro 75 veces mayor ó $\frac{100 \times 75}{6}$ ect. Muchas veces se acostumbran los niños á decir "6 veces más", 6 veces menos"; pero estas expresiones carecen en realidad de sentido y no se necesita demostrar la conveniencia de sustituirlas por las de "una cantidad 6 veces mayor ó 6 veces menor,, según el caso.

De todo lo dicho se desprende que el razonamiento en el cálculo por conclusiones, debe fundarse en la comparación de las cantidades con que se razona, y que, para que los niños ejecuten ese razonamiento con CONCIENCIA DE ELLO y no por un hábito mecánico, es necesario que sus juicios se base en la comparaciòu que hayan hecho de las cantidades, para descubrir su relación.

¿Cómo se adquiere objetivamente la idea de esa relación y cómo se acostumbran á hallarla? A continuación indicamos los ejercicios que en la práctica nos han servido para llegar con nuestros alumnos á ese resultado:

1° Se muestran á los niños dos reglas, de las cuales una sea de doble longitud que la otra, y se les dirigen algunas preguntas acerca del largo de cada una de ellas y de las líneas que cón ellas puedan trazarse, hasta hacerlos llegar al conocimiento de que una de ellas tiene DOBLE LARGO que la otra, y que con ella se puede trazar de una vez, una línea DOBLE de la que se puede trazar con la otra.

Con dos vasos (medio litro y litro) se les puede hacer observar que á uno de ellos le cabe dos veces lo del otro, el doble, ó una cantidad de agua dos veces mayor.

Dos trozos de gis, dos saquitos con frijol, dos montones de pizarras, libros, etc., dos grupos de niños, dos distancias tomadas de puntos de la población que ellos conozcan, pueden igualmente servir para fijar el concepto de lo que es DOBLE, dando también la expresión de peso, tamaño, cantidad grupo ó distancia DOS VECES MAS GRANDE ó DOS VECES MAYOR. De igual manera y haciendo uso también de reglas, pizarras, etc., se puede dar la idea de lo que significa ser una cosa, TRIPLE, TRES VECES MAS GRANDE, ó TRES VECES MAYOR QUE OTRA, cuádruple, etc.

2° Se trazan en el pizarrón dos líneas que tengan un decímetro de longitud una de ellas y la otra dos,

——— ———1———

llamando luego la atención de los niños sobre el tamaño de ellas, para que observen que la segunda tiene DOBLE tamaño de la primera, es decir, que es DOS VECES más grande o dos veces mayor.

3° Del mismo modo se hace la comparación de la línea pequeña con otras que tengan 2, 3, 4, 5 ó más decímetros de longitud y se les hará observar que son 2, 3, 4, ó 5, veces mayores que la primera, respectivamente.

4° Se trazan en el pizarrón 2 líneas de otras dimensiones, pero que una de ellas sea múltiplo de la otra; y se hará que los niños establezcan comparaciones entre ellas, hasta hacerles ver que, para saber cuantas veces mayor es un línea que la otra, (relación entre dos líneas) se necesita ver cuantas veces cabe la más pequeña en la más grande, y que lo expresen así (tal línea es tantas veces mayor que tal otra, porque ésta cabe tantas veces en la primera)

5° Hacer el mismo ejercicio con cantidades escritas, no con cifras sino con figuras de números, ejemplo: Un niño tiene 8 centavos y otro, 2, ¿cuál de los dos tiene mayor cantidad de dinero? Se representan en el pizarrón los 8 centavos así: oooooooo y los dos de este modo oo para que los niños hagan la comparación y si todavía se les dificulta encontrar la relación, se forman de los 8 centavos grupo de á 2 en esta forma: oo oo oo oo, para que lleguen á descubrir que el primer niño tiene una cantidad de dinero 4 veces mayor que la del segundo.

6° Comparación de cantidades abstractas, por ejemplo, 12 y 4; y una vez que los niños encuentren que 12 es tres veces mayor que 4, preguntar porqué lo aseguran así, para que al principio lo expresen de este modo "12 es 3 veces mayor que 4 porque se necesitan 4 y 4 y otra vez 4 psra llegar á 12" ó por que cabe 3 veces en el 12.

Siempre que los niños se equivoquen al encontrar la relación entre dos cantidades, se les hará que comprueben contando, para que ellos mismos descubran su error v. g., si un niño dice: "8 es 6 veces mayor que 2," se le hará que cuente en la serie del 2 hasta llegar á 8, para que vea que no es 6 sino 4 veces mayor, y luego continúe contando para que vea también que el número 6 veces mayor que 2 no es el 8; sino el 12.

7° Se dará á los niños una cantidad cualquiera para que ellos digan otra que sea cierto número de veces mayor v. g.: una cantidad 5 veces mayor que 4; los niños contestarán 20 y el maestro los invitará á que le digan cómo hicieron para encontrarla. Lo más probable es que los niños contesten que diciendo 4 y 4=8, y 4=12, y 4=16, y 4=20. El maestro dice "4 por 5 veces igual á 20."

Se continuarán poniendo ejemplos hasta que los niños observen que "para hacer mayor una cantidad se multiplica" y que si se quiere hacer 4 veces mayor se multiplica por 4, si 5 por 5 etc." Tanto en este ejercicio como en el anterior, el maestro puede ayudarse, para que los niños hagan la comprobación de sus respuestas, del ábaco, de objetos, de figuras de números y en ocasiones de cifras también.

8 ○ Comparar cantidades con la unidad.

9 ○ Hayar cantidades cierto número de veces mayores que la unidad.

Estos dos ejercicios resultan facilísimos para los niños y precisamente por eso deben dejarse para el último, pues empezando por ellos encuentran la relación por rutina, sin tener idea de lo que es, ni acudir por lo tanto á la comparación de las cantidades.

10 ○ Dar á los niños por medio de ejemplos, idea de la proporcionalidad de las cantidades: v. g. se han puesto dos niños á arreglar un departamento; si se pusieran 4 ¿lo arreglarían más pronto? si se pusiera uno sólo ¿lo arreglaría también más pronto? entre más niños se pusieran á arreglarlo ¿se tardarían más?

Una persona desea hacer la siembra de una labor en 15 días, si quisiera terminarla en 2 días ¿ocuparía menos trabajadores ú ocuparía más? Mientras de más tiempo se disponga ¿se necesitarán más hombres ó menos?

Un comerciante compra un carro de piloncillo y otro compra dos ¿pagará mayor cantidad ó menor? Mientras mayor cantidad de piloncillo compre ¿cómo será la cantidad de dinero que deba pagar?

11 ○ Proponer un problema de multiplicar. "Un niño compró 4 pliegos de papel en 2 centavos ¿cuánto deberá pagar otro niño que necesita 12 pliegos?

Que los niños dispongan el problema en esta forma:

4 pliegos valen 2 centavos
12 ,, ,, ?

El maestro preguntará:

1 ○ Si la cantidad de pliegos que necesita el segundo es mayor ó menor que la del primero.

2 ○ Si la cantidad de dinero que debe pagar será mayor ó menor que 2 centavos que pagó el primero.

3 ○ Cuantas veces mayor es la cantidad de pliegos cuyo valor se desea saber.

4 ○ Cuantas veces mayor ha de ser la cantidad de dinero, ejecutando luego la operación, pues los niños saben ya lo que debe hacerse para hacer mayor una cantidad.

Después de poner varios problemas como el anterior, para que los niños se acostumbren á hacer la comparación que les lleva á la conclusión, se pueden poner problemas en que se sepa el precio de la unidad, siendo también conveniente, para fijar mejor las ideas, preguntar qué cantidad de papel habría sido necesario comprar para que el niño hubiere tenido que pagar una cantidad de dinero 6, 8 ó 10 veces mayor.

12 ○ Proponer problemas inversos v. g.
8 hombres tardan para un trabajo 7 días.
2 ,, ,, ,, el mismo ?
y razonarlos de modo análogo al anterior.

13 ○ Problemas en que el multiplicando sea de varias cifras.