Ejercicios preparatorios para el aprendisaje completo de la DIVISION.

Hace algún tiempo que el Sr. Profesor Isabel R. Olivares, en una conversación en nuestra Escuela Normal, desarrolló la idea de los ejercicios que sirven de tema al presente artículo y que sólo vamos á reproducir aquí.

Cuando ya los niños se han ejercitado bastante en la división de enteros según el procedimiento que indicamos, de escribir el producto del cociente por el divisor y hacer después la resta como ordinariamente se acostumbra, conviene que aprendan á hacer la resta al mismo tiemque están multiplicando.

Esto naturalmente no puede hacerse de un solo salto; sino después de algunos ejercicios que gradualmente llevan á los niños al punto á que se desea conducirlos.

Desde luego nos fijaremos en qua la resta que se hace en la división difiere de la ordinaria en que la comparación se hace de abajo para arriba; y aunque esta no sea para nosotros una gran diferencia, sí lo es para los niños de corta edad.

Por ahí, pues, deberemos empezar la preparación y hacer que los niños hagan algunas restas de ese modo, por ejemplo:

$$\begin{array}{r} 3428 \\ -1615 \\ \hline 1813 \end{array}$$

Ejecución: 5 para 8 faltan 3, 1 para 2, 1, 6 para 4 (no es posible,) para 14, 8 y 1 para 2 (por habérsele quitado al 3 un millar) 1. Ejercitados convenientemente en hacer la resta de este modo se puede pasar á otra de las diferencias que presenta la resta que se hace en las divisiones.

En la resta ordinaria, cada vez que para poderla efectuar se aumenta en diez una de las cifras del minuendo, se tiene el cuidado de quitarle una unidad á la que sigue á la izquierda; pues bien, en la división, en lugar de hacerlo así, se aumenta esa unidad á la que sigue del sustraendo.

Por tanto, conviene hacer que por medio de ejemplos, lo que aquí podríamos llamar experimentalmente, los niños lleguen á descubrir que, cuando se aumenta una misma cantidad al minuendo y al sustraendo la resta no se altera:
8—5=3, aumentando 4, 7, 10 etc. 12—9=3, 15—12=3, 18—15=3.

Sentado este principio y procediendo como en la resta anterior, se ejecutan algunas otras, llamando la atención de los niños en que cuando para efectuar la operación se aumentan diez unidades, decenas ó centenas á la cifra del minuendo, basta para compensar ese aumento con agregarle uno á la cifra siguiente del sustraendo, pues una decena, una centena ó un millar (según el caso) valen lo mismo que lo agregado arriba.

Luego se puede proponer á los niños el que resten de una cantidad el producto de otras dos en que el multiplicador tenga una cifra, (por ser ese el caso que se ofrece en la división) primero escribiendo el producto y después sin escribirlo. Ejemplo $1348-(256\times5)=1348-1280=68$, restando como en los ejemplos anteriores.

Después, puede pedírseles que al tiempo de multiplicar ejecuten la resta, haciendo que razonen sobre poco más ó menos de esta manera: $5\times6=30$ unidades, para 8 no es posible, para 18 ó 28 tampoco, para 38, 8; pero hemos agregado treinta unidades y para compensar debemos agregar abajo TRES DECENAS (van tres,) Se continúa: $5\times5=25$ decenas, y 3 más, son 28, para 4 no es posible, para 14 ó 24, tampoco; para $34=6$; pero hemos agregado arriba 30 decenas, para compensar agregaremos abajo 3 centenas (van 3.) Ahora, $5\times2=10$ centenas y 3 son 13, para 3 no es posible, para $13=0$. Hemos agregado arriba 10 centenas y para compensar agregaremos abajo un millar; quitándolo del único que hay arriba, no sobra nada.

Creemos que de este modo, procediendo el maestro tan lentamente como lo exijan las condiciones de la clase, haciendo en cada caso los ejercicios necesarios para que los niños se adiestren en la ejecución de las operaciones y preguntando el por qué de lo que se hace, para cerciorarse de si han entendido bien, el maestro se ahorrará tiempo y trabajo; pues se evitarán esas que podríamos llamar clases intercalares, que se ofrece dar á cada momento, cuando por haber aprendido mecánicamente el cálculo, los niños pretenden ejecutar las operaciones de un modo tan disparatado, que parece que nunca han oído hablar de ellas.

La regla de tres simple, por reducción á la unidad.

3er. año.

Al pasar los alumnos del 2° al 3er. años escolar, deben, conforme al programa de nuestras escuelas, estar ejercitados convenientemente en la multiplicación y división de enteros, y por tanto la regla de tres que figura en el programa correspondiente al último de los años referidos, no viene á ser sino una combinación de los conocimientos que sobre aritmética tienen ya adquiridos los niños.

Mas para que los alumnos puedan asimilarse bien el conocimiento que van á adquirir, y para que puedan servirse de una manera inteligente y razonada de la regla que se trata de enseñarles, es necesario:

I. Mostrarles la relación que la nueva regla tiene con las anteriores y la necesidad que hay de reducir á la unidad.

Darles sobre otras partes de la asignatura los conceptos necesarios para que puedan aplicar la regla á todos los casos que comprende.

Para lo primero podría empezarse por proponer á los niños un problema como éste: Valiendo 7 docenas de lápices $4.20 ¿á como sale la docena?

Los niños dispondrían los datos en esta forma:

7 docenas valen 420 centavos.

1 ¿Vale ? y razonarían así: si las 7 docenas valen 420 centavos, una valdrá una cantidad de dinero 7 veces menor que 420 centavos, es decir 4.20÷7=60 centavos.

Luego, llamando la atención de los niños sobre los datos del problema, se les haría que se fijaran en que "SABIENDO EL VALOR DE 7 DOCENAS ENCONTRARON EL DE UNA."

A continuación y dejando escrito en el pizarrón el problema anterior, sería conveniente proponer á los niños otro como este: "Valiendo 60 centavos la docena de lápices ¿Cuál será el valor de 18 docenas?

Los datos quedarían dispuestos así:

1 docena vale 60 centavos.

18 ¿Valen?

y el razonamiento de los niños sería, casi sin necesidad de que el maestro se los sugiriera, de este modo: si una docena vale 60 centavos, 18 valdrán una cantidad de dinero 18 veces mayor que 60 centavos, es decir, 60×18=1080 centavos. Luego, haciendo que los niños se fijaran en los datos del problema, se les haría observar que, SABIENDO EL VALOR DE UNA DOCENA DE LAPICES ENCONTRARONEL DE 18 DOCENAS.

Escritos y resueltos en el pizarrón dos problemas como los anteriores, puede considerarse que se han puesto ya laa bases sobre que ha de fundarse el discurso de los niños para descubrir el procedimiento que se les quiere enseñar, y proponerles un problema de regla de tres que, para mayor claridad, puede componerse de los dos resueltos antes y dictarse así: Valiendo 7 docenas de lápices 420 centavos ¿cuál será el imparte de 18 docenas?

Los datos quedarán dispuestos así:

7 docenas valen 420 centavos.

18 ¿valen?

Bien puede suceder, si los niños no tienen regularmente desarrollado el juicio, que al razonar digan que las 18 decenas valen una cantidad 18 veces mayor que 420 centavos; pero al llamarles el maestro la atención sobre que la cantidad de lápices no es 18 veces mayor que la de arriba, ellos reconocerán su error y dirán que la de dinero tampoco deberá serlo.

Observando atentamente las cantidades verán que la de abajo no es ni dos ni tres veces mayor que la de arriba; sino algo más de lo primero y un poco menos de lo segundo y al fin llegarán á esta conclusión: SABIENDO EL VALOR DE 7 DOCENAS NO PUEDE ENCONTRARLE EL DE 18.

El maestro entónces dispondrá los datos en esta forma:

7 docenas valen 420 centavos,
....
18 ¿valen?

y hará que repitan que partiendo del valor de 7 docenas no puede saberse el de 18.

Luego volviendo al primer problema que resolvieron, verán otra vez que, partiendo del valor de 7 docenas puede encontrarse el de 1 y lo indicará así:

7 docenas valen 420 centavos.
(
1 ,, vale 60 ,,
(
18 ,, ¿valen?

Después volverá á llamar la atención de los niños sobre el segundo problema y repetirán que partiendo del valor de una docena se puede saber el de 18; lo que se indicará así:

7 docenas valen 420 centavos.
(
1 ,, vale 60 ,,
(
18 ,, ¿valen? 1080 ,,

Con lo que verán los niños que su conclusión de que, partiendo del valor de 7 docenas no puede saberse el de 18, era falsa, pues se puede llegar al resultado buscando antes el valor de UNA DOCENA, viniendo á ser para ellos la unidad, como el puente necesario para salvar el obstáculo que encontraron al principio.

Hasta aquí puede considerarse como terminada la primera parte, referente á que los niños encuentren por sí mismos la necesidad y conveniencia de reducir á la unidad para la resolución del problema; pero no queda por esto terminado el asunto, desde el momento en que así, sólo podrán resolver por regla de tres los problemas en que la división salga exacta.

Por lo tanto para que, como se dijo antes, puedan aplicar la regla de una manera inteligente y razonada á todos los casos que comprende, es necesario dar á los niños los conceptos siguientes:

1° Idea general de los quebrados: *

Se muestra á los niños una manzana, se divide en dos partes iguales preguntando luego el nombre de cada parte y cuantas salen de la manzana, para llegar á esta conclusión; LA MANZANA TIENE 2 MITADES. Se ejecuta lo mismo con otros objetos, como un pliego de papel, un metro de madera, el pizarrón [por medio de una linea] el contenido de un vaso, [vaciando la mitad,] la pieza de la clase, una banca, etc., siguiendo el mismo orden que con la manzana; para que de la reunión de casos lleguen los niños á la conclusión de que todo entero tiene dos mitades.

Del mismo modo se da la idea de cuartos, octavos, tercios, sextos, novenos, quintos, séptimos, décimos y luego muy rápidamente de onceavos, doceavos, etc,

2° Escritura de quebrados:

Podría hacerse con el orden siguiente: I. Preguntar el nombre de las partes cuando se hacen 2, 3, 4, 5, 8, 12, etc.. del entero.

II. Dado el nombre de las partes, [mitades, cuartos,

* Lo que se dice aquí acerca de los quebrados, es sólo de un modo accidental, pues al enseñanse la asignatura de 4° año lo hará el maestro con la extensión correspondiente.

quintos, doceavos etc.] que los niños digan cuántas se han hecho del entero.

III. Escribir quebrados como se escriben ordinariamente los enteros, es decir, 5 pesos, 3 varas, 4 octavos de vara, 3 novenos, 8 veinticinco avos, 12 ciento cincuenta y ocho avos.

IV. Que los niños digan en cuántas partes se ha dividido el entero en cada caso, y qué número podría servir para acordarse del nombre que debe darse á dichas partes, quedando así: $\frac{4}{8}$ $\frac{3}{9}$ $\frac{8}{25}$ $\frac{12}{158}$, llamando la atención sobre la rapidez y claridad que se obtiene en la escritura haciéndola de la última manera.

A continuación se darán á los niños los nombres de los términos del quebrado; y como ellos ya saben por lo anterior que el número que está debajo de la raya sólo sirve para recordar el NOMBRE ó DEDOMINACION de las partes, no encontrarán dificultad para retener la palabra DEDOMINADOR, al mismo tiempo que como el de arriba indica cuántas partes (ó el número de ellas) se quisieron escribir, encontrarán también muy oportunamente aplicado el dictado de NUMERADOR.

3° Indicar una división en forma de quebrado:

Se propondrá á los niños un problema que se preste para el caso, por ejemplo: repartir 184 naranjas entre 9 niños, y se les hará que se fijen en lo que le tocaría á cada niño si se les repartiesen las naranjas una por una.

Ellos contestarán, naturalmente, al preguntarles sobre la primer naranja que se distribuya, que á cada niño le corresponde $\frac{1}{9}$, de la segunda lo mismo y así de la tercera

hasta que de las 184 le corresponderán á cada uno $\frac{184}{9}$ Haciendo lo mismo con otras divisiones los niños infieren que TODA DIVISION SE PUEDE INDICAR EN FORMA DE QUEBRADO, poniendo el divisor como denominador.

4° Modo de hacer mayor un quebrado:

Se puede, para esto, dictar á los niños un quebrado cualquiera, por ejemplo: $\frac{3}{4}$ y hacer que multipliquen el numerador por 5 en esta forma $\frac{3}{4} \times 5 = \frac{15}{4}$

Se llama luego la atención sobre si el quebrado que resulta es mayor ó menor que el primero y cuántas veces mayor. Haciendo lo mismo con otros quebrados y con otros números y llamando en cada caso la atención acerca del cambio que sufre el valor del quebrado, los niños llegarán á estas dos conclusiones [que es conveniente formular por separado para que puedan expresarlas.]

SIEMPRE QUE SE MULTIPLICA EL NUMERADOR DE UN QUEBRADO, ESTE SE HACE MAYOR.

"Si se multiplica por 5 se hace 5 veces mayor, si por 4, 4 veces, etc.

Haciendo aplicación de todos estos conocimientos, pueden los niños resolver ya, problemas de regla de tres simple propiamente dicha, por ejemplo: En un vallado en que trabajan 15 hombres se han cavado 83 varas en la semana; si á la siguiente entran 8 hombres más ¿cuántas varas se cavarán?

Se dispondrían los datos:

15 hombres cavan 83
23 ,, ¿cavan?

Se razonará así: 15 cavan 83, 1 cavará $\frac{83}{15}$ y 23 cavarán $\frac{83 \times 23}{15}$

Los ejercicios anteriores, que he tenido oportunidad de poner en práctica, bastarán para que los niños puedan manejar el método de reducción á la unidad con conciencia del auxilio que les presta, haciendo que se ensanche el círculo de problemas que pueden resolver, sin tener necesidad de hacer otras operaciones, ni otros razonamientos que los que están acostumbrados á hacer para los problemas de multiplicar y dividir.

Todo consiste en proceder con la lentitud que las circunstancias exijan, según el desarrollo intelectual de los niños, y en no pasar nunca delante sin haberse asegurado por medio de muchos y variados ejercicios, de que los niños han entendido bien, pues no debe olvidarse nunca que, pasar al conocimiento siguiente sin que el anterior haya sido bien comprendido por los niños, es para el maestro lo mismo que para el militar dejar enemigos á la espalda,

Idea de decimales:

1 ° Escritura de una cantidad v. g., 3458 y lectura de ella por los niños.

2 ° Lectura de las diversas unidades que contiene, una por una: 3 millares, 4 centenas, 3 decenas y 8 unidades.

3 ° Valor de esas unidades, sacado de la lectura misma de la cantidad: los tres millares 3,000, las cuatro centenas 400, las cinco decenas 50 y las ocho unidades 8.

4 ° Valor de cada unidad, sacado de los valores anteriores: cada millar vale 1,000 (puesto que los tres valen 3,000). cada centena 100, cada decena 10 y cada unidad 1.

5 ° Comparación del valor de cada unidad con el de la que sigue á la derecha:

1 millar	se compone de	10 centenas.
1 centena	,, ,,	10 decenas.
1 decena	,, ,,	10 unidades.

6 ° Comparación de esas unidades, pasando uno ó más lugares:

Un millar vale 100 decenas, 1,000 unidades.

Si los niños vacilan v. g., para decir cuantas decenas vale el millar, se pregunta cuantas tiene la centena y se escribe.

1 centena tiene 10 decenas
¿10 ,, (ó 1 millar) cuántas tendrán?

Se hace que formulen el razonamiento y hagan mentalmente la operación.

7° Lectura del TOTAL de unidades de cierta clase que hay en una cantidad. Ejemplo: en 4,837 unidades, hay 483 decenas, 48 centenas, etc.

Para leer la decenas que hay en esa cantidad, conviene hacer que los niños reduzcan los millares á decenas, luego las centenas y agreguen después las decenas; llamando en seguida de cada caso su atención sobre que da lo mismo que LEER SEGUIDO HASTA LA CIFRA DE LAS DECENAS.

8° Escritura de una cantidad de pesos, (485 pesos) expresando las monedas de diferentes clases con que en la práctica se podría representar: 4 billetes de cien, 8 de diez y 5 de uno (4^{c} 8^{d} 5^{u})

9° Se escribe después del 5 otra cifra más 4^{c} 8^{d} 5^{u} 3) preguntando á los niños el valor de las monedas indicadas por esa cifra: llamando su atención sobre que las primeras de la izquierda son de 100, las que siguen de 10 y las que siguen de 1, encontrarán que el tres representa monedas de un valor 10 veces más pequeño que un peso, llamadas ordinariamente DECIMOS y precisamente el nombre de DECIMAS les da el maestro.

10° Lectura de la cantidad, cifra por cifra (4 cen., 8 dec., 5 pesos y 3 décimas.)

11° Comparación de la décima con la unidad, reducción de unidades á décimas y viceversa, comparación de la decena con la décima, reducciones, comparación con la centena, etc.

12 Para dar idea de las centésimas, se agrega una nueva cifra á la cantidad, (4^{c} 8^{d} 5^{u} 3 4) y se procede como en el No. 9, preguntando el valor de cada una de las nuevas monedas que será diez veces menor que el de la décima, y con relación al peso cien veces menor.

Repitiendo que la moneda 10 veces menor que el peso se llama décima, por analogía llamarán cienésima á la otra, dando después el maestro el término propio. Se lee la cantidad después, cifra por cifra y se hacen en seguida las comparaciones y reducciones indicadas antes.

Lo mismo se procederá para dar la idea y nombre de las milésimas y diezmilésimas.

Tal vez extrañará á muchos maestros que tratándose de un orden de ideas completamente nuevo para los niños, al tratar de las decimales, no haya hecho uso desde luego del procedimiento intuitivo; pero me he fijado en que la numeración decimal, no es en el fondo más que la continuación de la de los enteros, rigiéndose exactamente por las mismas convenciones y principios.

Siendo esto así, nada más natural que relacionarlas y dar á los niños la idea de las decimales, sacada de los conocimientos que sobre numeración hayan obtenido, introduciendo la intuición á última hora, en el ejempl o en que ya se va á dar nombre á las unidades, como se hizo en el No. 9.

Escritura de decimales.

1° Escritura de las siguientes cantidades: 2536, 2056, 2006 y 2000.

2° Lectura de la primera cantidad, cifra por cifra, llamando la atención sobre el lugar que ocupa cada especie de unidades.

3° Lectura de las otras cantidades, cifra por cifra, llamando la atención sobre qué especies faltan y qué hay en su lugar, para recordar la necesidad y uso de los ceros.

4° El maestro escribe una cantidad decimal (235'124) y que los niños la lean, cifra por cifra, llamándoles la atención sobre el lugar que ocupan después de los enteros (de la coma,) las décimas, centésimas y milésimas.

Desde al escribir la cantidad, el maestro dice á los niños hasta donde llegan los enteros y que los va á separar por medio de una coma, la cual,—para que no se confunda con otras que se ponen en las cantidades—conviene colocar en la parte superior.

5° Que los niños lean cantidades que el maestro escriba: 28'4—35'58—14'134—0'007—56'004—5'05.

I. Que lean los enteros.
II. Las decimales, cifra por cifra.
III. Reducción á la última especie.
IV. Lectura correcta y usual de la cantidad.

6° Que los niños escriban las siguientes cantidades:

—35'3—34'25—43'128—16'05—52'008—67'024—0'05, etc., llamando la atención en los casos en que escriban mal, sobre el lugar que deben ocupar las diversas especies de unidades decimales, para llenar con ceros los lugares intermedios donde falta alguna especie.

7° Lectura de los décimas, centésimas, etc., que haya POR TODO en una cantidad decimal: (456'384)

I. Lectura de los enteros (456.)
II. Reducción á décimas (4560.)

Si los niños no pueden reducir mentalmente se hará que lo efectúen en forma de problema:

1 vale 10 décimas.
456 ,, ?

se razona, y se hacen las operaciones según lo acostumbrado.

III Adición de las décimas (4563 décimas) haciendo ver que resulta lo mismo que leer seguido hasta las décimas.

Lo mismo se procederá para leer las centésimas y milésimas, haciendo ver en todos los casos que resulte lo mismo que LEER SEGUIDO HASTA LA CIFRA CORRESPONDIENTE A LAS UNIDADES de que se trate.